

La dinamica verticale del veicolo a levitazione magnetica rappresentato in figura può essere modellata con buona approssimazione come un sistema composto da due parti: una sorgente di campo magnetico generato dalla corrente $i(t)$ che circola in una induttanza L e una massa m di materiale ferromagnetico sottoposta sia alla forza peso che alla forza magnetica. Tale modello può essere descritto dal seguente sistema di equazioni differenziali ordinarie

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = v(t)$$

$$m \frac{d^2h(t)}{dt^2} + b \frac{dh(t)}{dt} + K_m \frac{i^2(t)}{h^2(t)} = mg + F_d(t)$$

dove $h(t) \geq 0$ è la distanza, misurata mediante opportuni sensori, del veicolo rispetto alla guida, $v(t)$ è la tensione di alimentazione del circuito elettrico di eccitazione che genera il campo magnetico, $F_d(t)$ è un'azione di disturbo che agisce sulla massa stessa, R è la resistenza del circuito di eccitazione, K_m è il coefficiente di accoppiamento magnetico, b è il coefficiente di attrito viscoso e g è il modulo dell'accelerazione di gravità.

- 1 Si determinino le condizioni di equilibrio del sistema per una distanza del veicolo costante $\bar{h} = 0.05m$ e disturbo F_d nullo.
- 2 Si determini una rappresentazione del sistema linearizzato in forma di stato attorno alla configurazione di equilibrio corrispondente al caso di corrente positiva ($i > 0$) determinata al punto precedente.
- 3 Si considerino i seguenti valori numerici per i parametri del modello: $m = 50 \text{ kg}$, $L = 0.5 \text{ H}$, $R = 50 \Omega$, $K_m = 20 \text{ Nm}^2/\text{A}^2$, $b = 0.1 \text{ Ns/m}$, $g = 9.81 \text{ m/s}$.
 - Si scrivano le matrici numeriche del sistema linearizzato in forma di stato;
 - si ricavano le funzioni di trasferimento tra gli ingressi (v ed il disturbo F_d) e l'uscita h ;
 - si discuta circa la stabilità del sistema.

Verificare che le funzioni di trasferimento abbiano approssimativamente la forma

$$G_v(s) = \frac{-158}{(s + 100)(s + 19.8)(s - 19.8)}, \quad G_d(s) = \frac{0.02}{(s + 19.8)(s - 19.8)}$$

in caso negativo, per i punti successivi, è possibile utilizzare le funzioni di trasferimento qui fornite.

- 4 Si sintetizzi un controllore stabilizzante che, agendo sull'ingresso v , e considerando condizioni iniziali per il sistema pari a quelle di equilibrio, rispetti le seguenti specifiche:
 - sia in grado, nel momento dell'arresto, di portare il veicolo ad una distanza $h = 10 \text{ cm}$ dalla guida senza superare tale valore. Si vuole inoltre che la distanza di 9.75 cm venga raggiunta entro 2 s dall'inizio dell'arresto.
 - A fronte di un ingresso di disturbo $F_d(t) = 100 \sin(\omega_d t) \text{ N}$ con $\omega_d < 0.1 \text{ rad/s}$ le oscillazioni indotte sulla distanza h siano caratterizzate da un'ampiezza minore di 10^{-3} m .

- In presenza di un rumore di misura della strumentazione di misurazione della distanza h agente a pulsazioni $\omega_\nu > 700\text{rad/s}$, si richiede che l'ampiezza dell'effetto sull'uscita sia inferiore allo 1% del rumore stesso.

Si riportino quindi:

- le specifiche tradotte nel dominio della frequenza e visualizzate sul diagramma di Bode,
- il procedimento di progettazione del controllore illustrato con diagrammi a blocchi,
- la funzione di trasferimento del controllore progettato,
- i diagrammi di Bode del sistema nelle diverse fasi del progetto (mostrando il raggiungimento delle specifiche),
- la risposta al gradino del sistema controllato riportando le caratteristiche più significative.

Al fine di valutare quanto svolto al computer lo studente deve salvare ogni progetto del controllore effettuato con sisotool attraverso il comando "Save Session" che si trova nel sisotool stesso. Il nome del file da salvare deve essere nella forma CognomeMatricola.i.mat con "i" numero del controllore progettato. Il numero del controllore progettato deve essere coerente con quanto scritto nel foglio.

I file ottenuti devono essere inviati al docente del corso:

- Teoria dei sistemi: lucia.pallottino@unipi.it
- Fondamenti di automatica: riccardo.costanzi@unipi.it

La versione elettronica del controllore verrà considerata solo nel caso di corrispondenza con quanto scritto nel foglio e pertanto NON sostituisce la descrizione cartacea del progetto del controllore richiesta nel compito.

Nota: Si riportino tutti i risultati numerici con almeno 3 cifre significative

Soluzione

1 Per ingressi costanti \bar{h} e $F_v = 0$ all'equilibrio ($\frac{d^2 h(t)}{dt^2} = \frac{dh(t)}{dt} = \frac{di(t)}{dt} = 0$) si ha:

$$\begin{aligned} R\bar{i} &= \bar{v} \\ K_m \frac{\bar{i}^2(t)}{\bar{h}^2(t)} &= mg \end{aligned}$$

Dalla seconda equazione si ha $\bar{i} = \pm \sqrt{\frac{mg}{K_m} \bar{h}^2}$.

Sostituendo nella prima equazione $\bar{v} = \pm \sqrt{\frac{mg}{K_m} R \bar{h}^2}$.

Le due configurazioni di equilibrio corrispondono quindi a valori di tensione e di corrente:

$$\begin{aligned} 1. (\bar{v}, \bar{i})_1 &= \left(\sqrt{\frac{mg}{K_m} R \bar{h}^2}, \sqrt{\frac{mg}{K_m} \bar{h}^2} \right) \\ 2. (\bar{v}, \bar{i})_2 &= \left(-\sqrt{\frac{mg}{K_m} R \bar{h}^2}, -\sqrt{\frac{mg}{K_m} \bar{h}^2} \right) \end{aligned}$$

2 Si desidera ricavare le equazioni del sistema dinamico lineare tangente al sistema nonlineare nel punto di equilibrio $(\bar{v}, \bar{i})_1 = \left(\sqrt{\frac{mg}{K_m} R \bar{h}^2}, \sqrt{\frac{mg}{K_m} \bar{h}^2} \right)$. Si indichi il vettore di stato per il sistema lineare con $x = [i - \bar{i}, h - \bar{h}, \dot{h} - \dot{\bar{h}}]$ e il vettore degli ingressi con $u = [v - \bar{v}, F_d - \bar{F}_d]$.

Le matrici dinamica e di ingresso del sistema lineare si possono dunque scrivere come:

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{2 K_m \bar{i}}{m \bar{h}^2} & \frac{2 K_m \bar{i}^2}{m \bar{h}^3} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} \\ B &= \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Indicando con $y = h = Cx + Du$ l'uscita del sistema, le matrici C e D si ottengono immediatamente:

$$\begin{aligned} C &= [0 \quad 1 \quad 0] \\ D &= [0 \quad 0] \end{aligned}$$

3 Sostituendo i valori numerici forniti nel testo si ottengono i seguenti valori di equilibrio degli stati (con le rispettive unità di misura)

$$(\bar{i}, \bar{h}, \dot{\bar{h}}) = (0.2476, 0.05, 0)$$

e degli ingressi (con le rispettive unità di misura)

$$(\bar{v}, \bar{F}_d) = (12.3807, 0)$$

che, sostituiti nelle matrici ricavate al punto precedente, forniscono il seguente risultato:

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} -100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -79.2364 & 392.4 & -0.002 \end{bmatrix} \\ B &= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Indicando con B_v e D_v la prima colonna delle matrici B e D , corrispondenti all'ingresso v , e con B_d e D_d la seconda colonna, corrispondenti all'ingresso di disturbo F_d , le funzioni di trasferimento cercate si possono ottenere calcolando:

$$G_v(s) = C(sI - A)^{-1}B_v + D_v = \frac{-158.47}{(s + 100)(s + 19.81)(s - 19.81)}$$

$$G_d(s) = C(sI - A)^{-1}B_d + D_d = \frac{0.02}{(s + 19.81)(s - 19.81)}$$

La funzione di trasferimento del sistema presenta 1 polo a parte reale positiva. Questo permette di concludere che il sistema è instabile.

- 4 Per quanto riguarda il controllore è opportuno procedere alla progettazione di un sistema in cascata con doppio anello di retroazione - l'anello interno con il solo scopo di stabilizzare il sistema, l'anello esterno con lo scopo di soddisfare le specifiche richieste.

Si procede alla progettazione lavorando sul luogo delle radici; la forma del luogo ottenuto dalla funzione di trasferimento del sistema è riportato in figura 1. Un possibile approccio per la progettazione di un

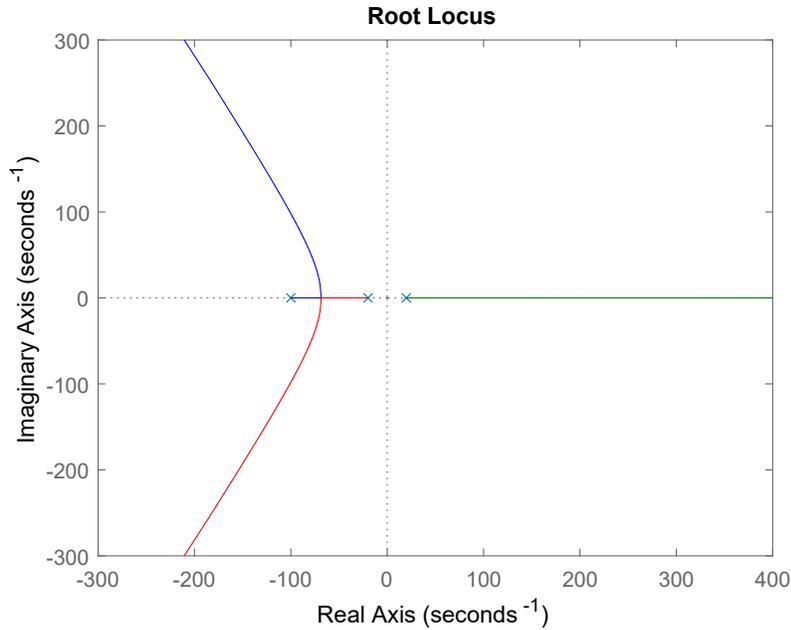


Figura 1: rlocus(Gv)

controllore stabilizzante è basato su un cambio di segno del guadagno e quindi sul luogo inverso che assume la forma il figura 2. Per attrarre nella regione di asintotica stabilità i due rami instabili del luogo delle radici di può procedere inserendo una rete anticipatrice semplice con uno zero in -30 ed un polo in -110; aumentando il guadagno fino a 500 si ottiene il risultato di stabilizzare il sistema con le radici che occupano le posizioni indicate nel grafico di figura 3. Il controllore risultante ha la seguente espressione:

$$C_1(s) = -500 \frac{1+0.033s}{1+0.0091s} = -1833.3 \frac{s+30}{s+110}$$

Adesso, è possibile procedere alla progettazione del controllore $C_2(s)$ per il soddisfacimento delle specifiche, con una funzione di trasferimento dell'anello interno pari a

$$G_{c1}(s) = \frac{C_1(s)G_v(s)}{1+C_1(s)G_v(s)} = 2.9053e05 \frac{s+30}{(s+145.5)(s+52.18)(s^2+12.33s+579.5)}$$

e con una funzione di trasferimento tra il disturbo e l'uscita pari a

$$G_{dc1}(s) = \frac{G_d(s)}{1+C_1(s)G_v(s)} = 0.02 \frac{(s+110)(s+100)}{(s+145.5)(s+52.18)(s^2+12.33s+579.5)}$$

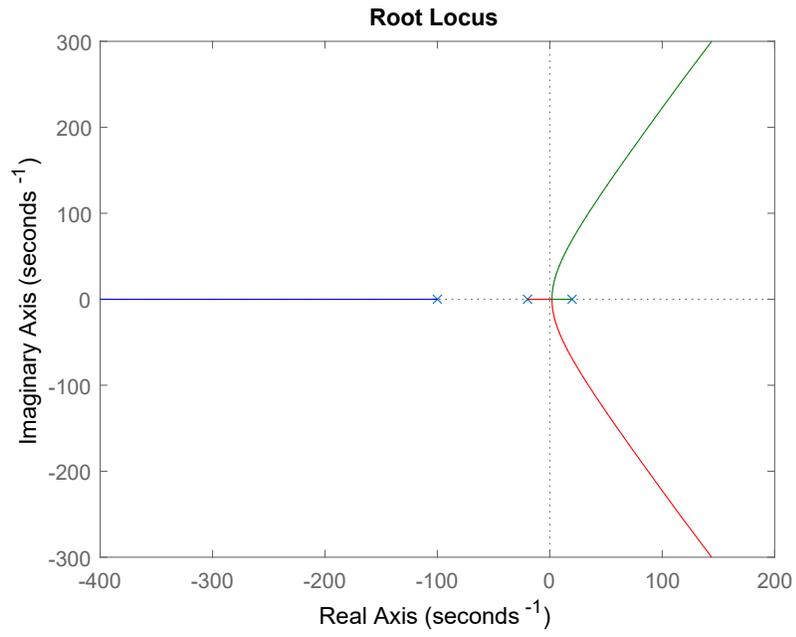


Figura 2: rlocus(Gv) - luogo inverso

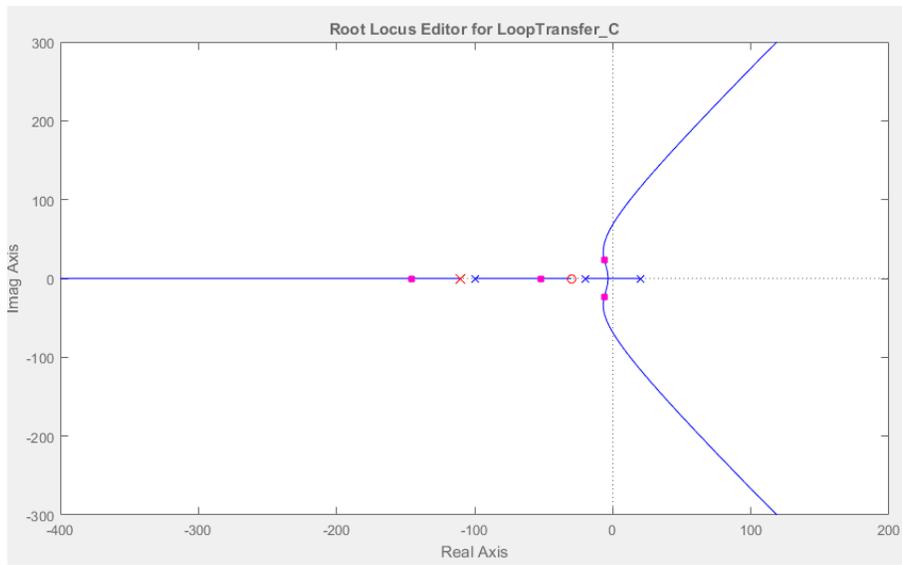


Figura 3: rlocus(Gv) - con controllore

4.1 Si procede anzitutto a progettare un controllore che consenta di soddisfare le specifiche relative alla risposta al gradino. Si chiede che il sistema, partendo da una condizione di equilibrio pari a $\bar{h} = 0.05 m$, sia portato ad una uscita pari a $h_\infty = 10 cm = 0.1 m$, vale a dire un'ampiezza del gradino pari a $0.05 m$:

- si richiede che il valore desiderato venga raggiunto “esattamente” \Rightarrow è necessario almeno un polo nell'origine per la funzione di trasferimento di anello aperto $C_2(s)G_{c1}(s)$ e considerando che in $G_{c1}(s)$ non è presente sarà necessario inserirlo nel controllore $C_2(s)$
- si richiede che il valore desiderato venga raggiunto “senza mai superarlo” \Rightarrow non è ammessa sovraelongazione, condizione che impone un vincolo sul margine di fase che dovrà essere circa uguale a $\pi/2$ radianti
- si richiede inoltre che la distanza di $9.75 cm$ venga raggiunta entro $2 s$ dall'inizio dell'arresto; si tratta di una specifica sul tempo di assestamento al $p\% = \frac{0.1-0.0975}{0.05}100 = \frac{0.0025}{0.05}100 = 5\%$ che si traduce in una specifica sulla pulsazione di taglio $\omega_t \geq \frac{3}{2} \Rightarrow \omega_t \geq 1.5 rad/s$

4.2 Una volta chiuso anche l'anello esterno, l'uscita è legata al disturbo dalla funzione di trasferimento

$$\frac{Y(s)}{F_d(s)} = \frac{G_{dc1}(s)}{1 + C_2(s)G_{c1}(s)}$$

Secondo il teorema della risposta armonica, la specifica è assicurata se, per le pulsazioni di interesse $\omega_d < 0.1 rad/s$, è rispettato il seguente vincolo sul modulo della funzione di trasferimento $\frac{Y(s)}{F_d(s)}$.

$$\frac{\|G_{dc1}(j\omega_d)\|}{\|1 + C_2(j\omega_d)G_{c1}(j\omega_d)\|} < \frac{10^{-3}}{100} \Rightarrow \frac{\|G_{dc1}(j\omega_d)\|}{\|1 + C_2(j\omega_d)G_{c1}(j\omega_d)\|} < 10^{-5}$$

Essendo a bassa frequenza, vale l'approssimazione $\|1 + C_2(j\omega_d)G_{c1}(j\omega_d)\| \approx \|C_2(j\omega_d)G_{c1}(j\omega_d)\|$, possia-

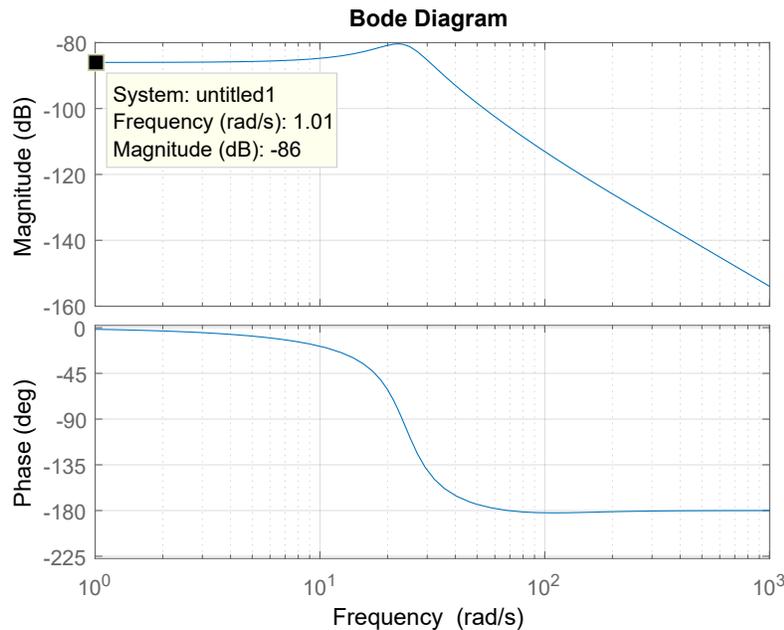


Figura 4: bode(G_{dc1})

mo tradurre la specifica in un vincolo sul modulo della funzione di trasferimento di anello aperto, infatti, passando ad esprimere i moduli in decibel, otteniamo:

$$\|C_2(j\omega_d)G_{c1}(j\omega_d)\|_{dB} > \|G_{dc1}(j\omega_d)\|_{dB} - 20\log_{10}(10^{-5})$$

dal diagramma di Bode del modulo della funzione di trasferimento $G_{dc1}(s)$ per le pulsazioni di interesse (figura 4) si ricava il valore ($-86dB$) che massimizza il modulo considerato, e quindi, la condizione che permette di soddisfare la specifica risulta:

$$\|C_2(j\omega_d)G_{c1}(j\omega_d)\|_{dB} > -86dB + 100dB \Rightarrow \|C_2(j\omega_d)G_{c1}(j\omega_d)\|_{dB} > 14dB$$

4.3 L'uscita è legata al rumore di misura dalla funzione di sensitività complementare, cambiata di segno:

$$\frac{Y(s)}{\nu(s)} = -\frac{C_2(s)G_{c1}(s)}{1 + C_2(s)G_{c1}(s)}$$

Per un disturbo in alta frequenza $\omega_\nu > 700$ rad/s, vale l'approssimazione

$$\left\| \frac{Y(j\omega_\nu)}{\nu(j\omega_\nu)} \right\| \approx \|C_2(j\omega_\nu)G_{c1}(j\omega_\nu)\|$$

per cui, detta A_N l'ampiezza del rumore di misura, la specifica si traduce in

$$\|C(j\omega_\nu)G_1(j\omega_\nu)\| < \frac{0.01A_N}{A_N} = 0.01$$

o, in decibel, -40 dB.

Si noti che la conoscenza dell'ampiezza A_N sarebbe superflua.

Una volta tradotte tutte le specifiche, riportate sul diagramma di Bode in figura 5, è possibile procedere al progetto del controllore. Per il soddisfacimento delle specifiche statiche è necessario inserire un polo

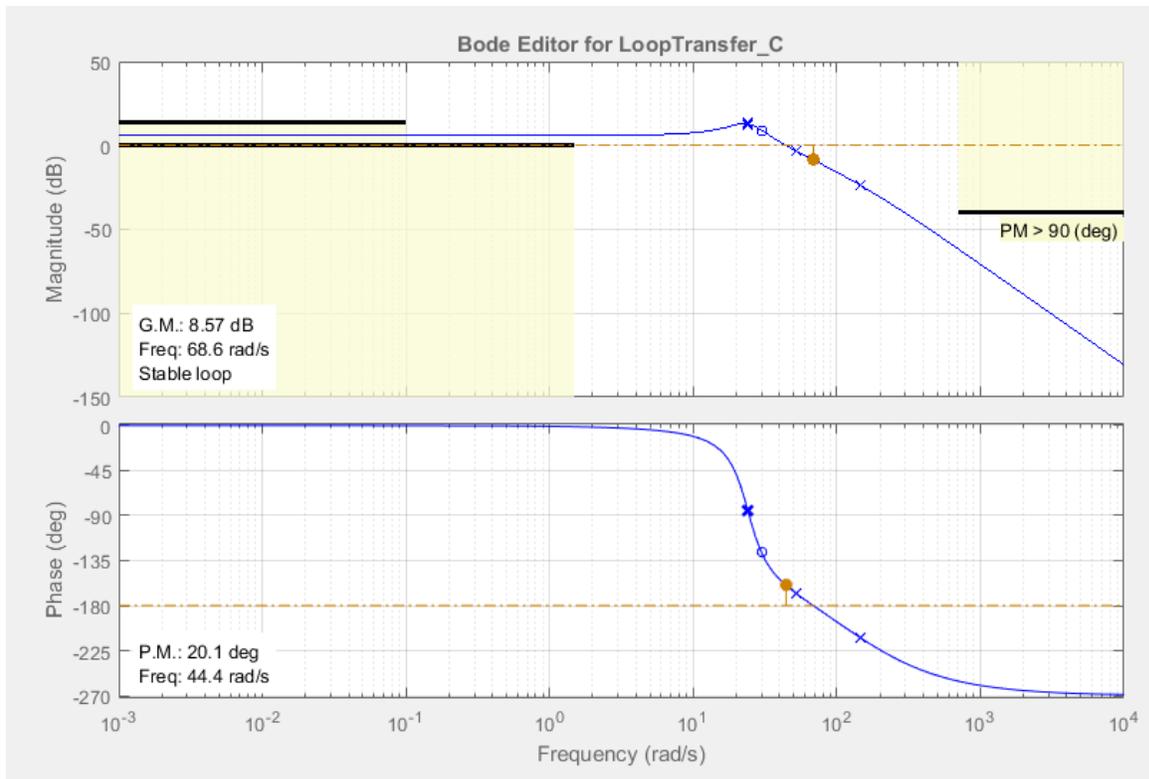


Figura 5: Diagramma di Bode di $G_{c1}(s)$ con specifiche richieste

nell'origine, ottenendo il diagramma di Bode di figura 6. Osservando il diagramma di Bode ottenuto, si nota che non sono necessarie ulteriori modifiche per il soddisfacimento delle specifiche. Il controllore $C_2(s) = \frac{1}{s}$ è infatti sufficiente per rispettarle tutte. L'analisi della risposta al gradino (figura 7) del sistema controllato ed in particolare le principali caratteristiche che si possono dedurre confermano che le specifiche sono soddisfatte:

- tempo di assestamento al 5% pari a 1.49 s
- sovralongazione nulla

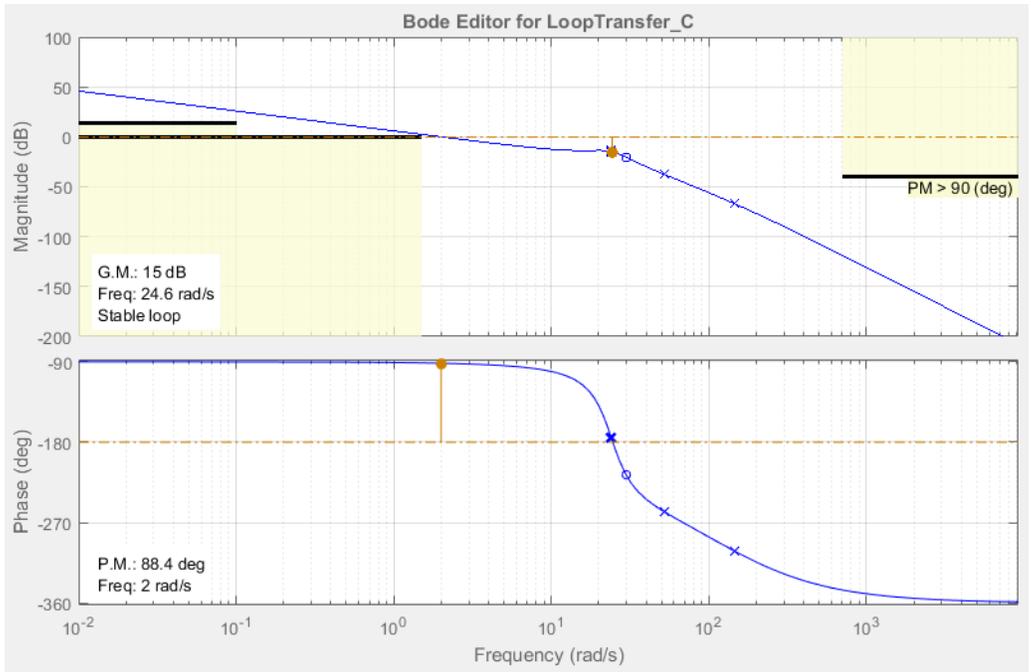


Figura 6: Diagramma di Bode del sistema controllato con soddisfacimento delle specifiche

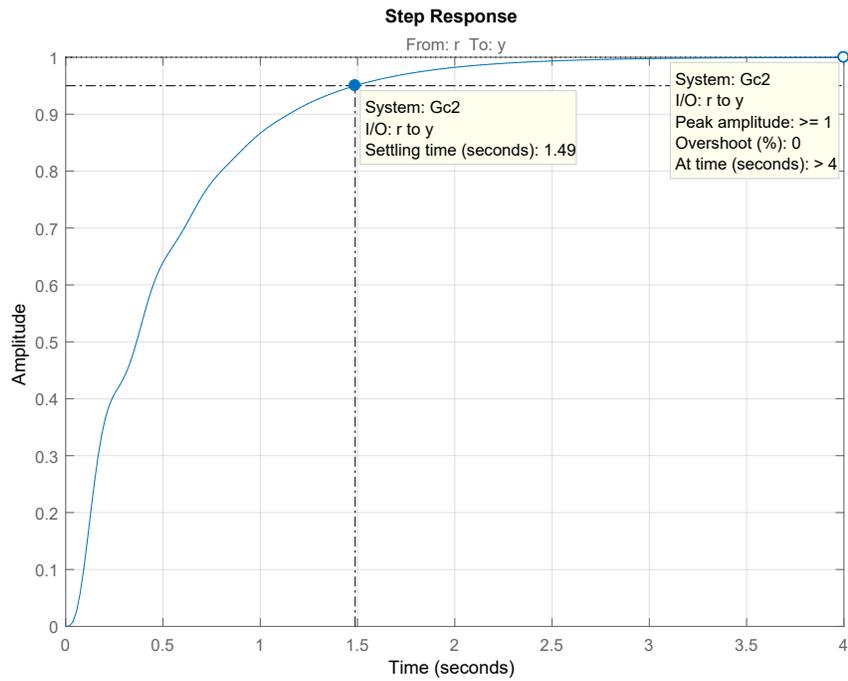


Figura 7: Risposta al gradino del sistema controllato