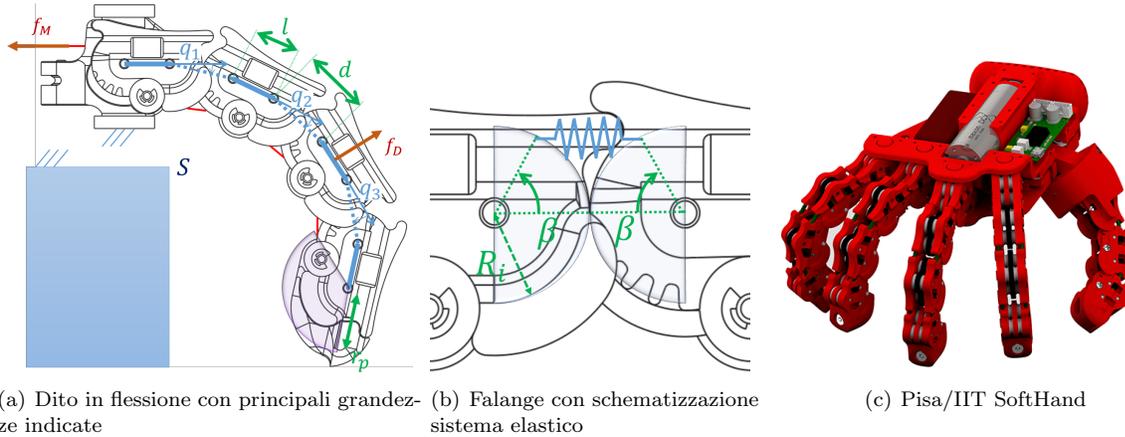


La Pisa/IIT SoftHand (figura 1(c)) è una mano sottoattuata ad un grado di attuazione e 19 gradi di libertà, capace di afferrare una vasta gamma di oggetti grazie alle sue capacità di adattabilità. In questo compito si dovrà affrontare il problema del controllo della chiusura di un singolo dito, in figura 1(a).



In una mano robotica tipicamente le inerzie risultano trascurabili rispetto ad eventuali effetti elastici o smorzanti. Dunque, il sistema dinamico di Figura 1(a) può essere descritto dalle seguenti equazioni

$$\begin{cases} \mu_1 \dot{q}_1 + 4k_1 R_1^2 (\cos(\beta) - \cos(\beta + q_1)) \sin(\beta + q_1) = \frac{1}{2} t_1 f + \frac{1}{2} [d(\cos(2q_2 + q_1) + 2\cos(q_2)) + l(1 + 2\cos(2q_2))] f_D \\ \mu_2 \dot{q}_2 + 4k_2 R_2^2 (\cos(\beta) - \cos(\beta + q_2)) \sin(\beta + q_2) = \frac{1}{2} t_2 f + \frac{1}{2} [d \cos(q_2) + l] f_D \\ \mu_3 \dot{q}_3 + 4k_3 R_3^2 (\cos(\beta) - \cos(\beta + q_3)) \sin(\beta + q_3) = \frac{1}{2} t_3 f \end{cases}$$

dove  $2q_i$  è l'angolo di chiusura dell'*i-esimo* giunto (la moltiplicazione 2 è dovuta alla particolare struttura del giunto, che rende comoda la scelta della metà dell'angolo  $q_i$  come variabile di stato). I termini indicati con le lettere  $\mu_i$  e  $k_i$  sono rispettivamente i coefficienti di smorzamento e le rigidzze (si noti che le molle sono in configurazione di equilibrio per  $q_i = 0$ ). L'effetto elastico risulta non lineare a causa della cinematica non lineare che lega l'angolo  $q_i$  all'allungamento della molla, figura 1(b). Il particolare sistema di attuazione, nell'ipotesi semplificativa di caduta di tensione dovuta all'attrito trascurabile, equivale ad un rapporto di trasmissione  $t_i$  fra la tensione applicata al filo  $f$  e la coppia risultante all'*i-esimo* giunto. Infine, un'eventuale forza esterna di disturbo  $f_D$  viene mappata sui giunti tramite un braccio dipendente dalla configurazione.

Si risponda alle seguenti richieste:

**A.1** Fissato  $f_D = 0$  e  $\beta = \frac{\pi}{2}$ , si identifichino le configurazioni di equilibrio statico del sistema al variare di  $f > 0$  tali che  $q_1, q_2, q_3 \in [0, \frac{\pi}{2}]$ . Tra tutte le condizioni di equilibrio trovate, si scelga quella tale per cui  $q_1 = q_2 = q_3 = \frac{\pi}{12}$ , discutendo gli eventuali vincoli da imporre sui parametri del sistema.

*Si consiglia l'utilizzo dell'uguaglianza  $\sin(\alpha) \cos(\alpha) = \frac{1}{2} \sin(2\alpha)$ .*

**A.2** Si consideri come funzione di uscita la distanza del polpastrello, approssimato con un settore circolare di raggio  $r_p$ , dal punto più vicino della superficie piana  $S$  dell'oggetto in figura 1(a)

$$p_x = d \cos(q_1) + l \cos(2q_1) + d \cos(2q_1 + q_2) + l \cos(2q_1 + 2q_2) + d \cos(2q_1 + 2q_2 + q_3) + l \cos(2q_1 + 2q_2 + 2q_3) - r_p$$

Si determini una rappresentazione in forma di stato del sistema linearizzato attorno alla configurazione di equilibrio determinata in precedenza.

Si discuta la stabilità del sistema al variare dei parametri, dandone un'interpretazione fisica.

**A.3** Considerando i seguenti valori numerici:  $r_p = 9.223$  mm  $R_1 = R_2 = R_3 = 10$  mm,  $k_1 = 0.3$  N/mm,  $k_2 = k_3 = 0.6$  N/mm,  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 7.5$  Nmm/s,  $t_1 = 15$  mm,  $t_2 = t_3 = 30$  mm,  $l = 7.5$ mm e  $d = 15$ mm

Si scrivano le matrici numeriche del sistema linearizzato in forma di stato. Si ricavino le funzioni di trasferimento tra: l'ingresso di controllo  $f$  e l'uscita  $p_x$ , l'ingresso di disturbo  $f_d$  e l'uscita  $p_x$ . Verificare

che il risultato abbia *approssimativamente* la forma

$$G(s) = \frac{-280(s+18)}{(s+28)(s+14)},$$
$$G_d(s) = \frac{-450(s+25)}{(s+28)(s+14)}.$$

in caso negativo, per i punti successivi è possibile utilizzare le funzioni di trasferimento qui fornite.

**A.4** Si sintetizzi un controllore stabilizzante in grado di assolvere i seguenti compiti:

- Al fine di afferrare l'oggetto si vuole muovere il dito fino a porre il polpastrello in contatto con la superficie  $S$ . L'oggetto purtroppo è molto fragile dunque, al fine di non romperlo, è necessario che la punta del dito non compenetri l'oggetto (ovvero si abbia sempre  $p_x \geq 0$ ). D'altronde, affinché l'afferraggio risulti stabile, sarà necessario che a regime il polpastrello sia esattamente in contatto con l'oggetto. Si richiede inoltre che il polpastrello raggiunga una distanza di 1.5 mm dalla superficie  $S$  entro 1.5 s senza in seguito più allontanarsene.
- Si consideri il caso in cui il dito entri in contatto sulla seconda falange con l'ambiente. In prima approssimazione possiamo considerare tale interazione come un ingresso di disturbo  $f_D$  a gradino, di ampiezza 0.1 N. Si richiede che tale disturbo non generi a regime nessuna variazione nella posizione relativa fra il polpastrello e la superficie dell'oggetto.
- Attenuare gli effetti di un forte rumore di misura  $n(t)$  localizzato su frequenze superiori ai 50 Hz, affinché le oscillazioni della posizione del polpastrello a regime non superino gli 0.001 mm. Tale rumore può essere modellato come  $n(t) = A_n \sin(\omega_n t + \sigma)$ , con  $A_n \leq 100$  mm, e frequenza pari a 50 Hz.

Si riportino quindi:

- le specifiche tradotte nel dominio della frequenza e visualizzate sul diagramma di Bode,
- il procedimento di progettazione del controllore illustrato con diagrammi a blocchi,
- la funzione di trasferimento del controllore progettato,
- i diagrammi di Bode del sistema nelle diverse fasi del progetto (mostrando il raggiungimento delle specifiche),
- la risposta al gradino del sistema controllato riportando le caratteristiche più significative.

**A.5** Si discretizzi la dinamica del controllore e si effettui la simulazione della risposta del sistema controllato al disturbo a gradino  $f_D$  riportata al punto precedente usando SIMULINK; si discuta la scelta del tempo di campionamento e si riportino:

- il codice MATLAB che implementa il controllore discreto;
- lo schema a blocchi SIMULINK utilizzato per la simulazione;
- l'andamento simulato dell'uscita del sistema con le caratteristiche significative.

*Nota: Si riportino tutti i risultati numerici con almeno 3 cifre significative*

## Soluzione

**A.1** Imponendo  $\dot{q}_i = 0, \forall i \in \{1, 2, 3\}$  le equazioni del moto si riducono a

$$\begin{cases} 4 k_1 R_1^2 (\cos(\frac{\pi}{2}) - \cos(\frac{\pi}{2} + q_1)) \sin(\frac{\pi}{2} + q_1) = \frac{1}{2} t_1 f \\ 4 k_2 R_2^2 (\cos(\frac{\pi}{2}) - \cos(\frac{\pi}{2} + q_2)) \sin(\frac{\pi}{2} + q_2) = \frac{1}{2} t_2 f \\ 4 k_3 R_3^2 (\cos(\frac{\pi}{2}) - \cos(\frac{\pi}{2} + q_3)) \sin(\frac{\pi}{2} + q_3) = \frac{1}{2} t_3 f \end{cases}$$

Da cui  $\frac{t_i}{8 k_i R_i^2} f = \sin(q_i) \cos(q_i) = \frac{1}{2} \sin(2q_i), \forall i \in \{1, 2, 3\}$ . Ed esplicitando si ottiene il generico equilibrio al variare della forza applicata sul filo:

$$q_i = \frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{t_i}{4 k_i R_i^2} f\right) \quad \forall i \in \{1, 2, 3\}$$

Quindi risulta necessario che  $\alpha = \frac{t_i}{4 k_i R_i^2}, \forall i \in \{1, 2, 3\}$ . Infine se ne deduce che l'ingresso necessario al fine di generare l'equilibrio richiesto è

$$\bar{f} = \frac{1}{2 \alpha}$$

**A.2** Il sistema si porta in forma di stato semplicemente dividendo per  $\mu_i$ :

$$\begin{cases} \dot{q}_1 = -\frac{4 k_1 R_1^2}{\mu_1} (\cos(\beta) - \cos(\beta + q_1)) \sin(\beta + q_1) + \frac{1}{2\mu_1} t_1 f + \frac{1}{2\mu_1} [d(\cos(2q_2 + q_1) + 2 \cos(q_2)) + l(1 + 2 \cos(2q_2))] f_D \\ \dot{q}_2 = -\frac{4 k_2 R_2^2}{\mu_2} (\cos(\beta) - \cos(\beta + q_2)) \sin(\beta + q_2) + \frac{1}{2\mu_2} t_2 f + \frac{1}{2\mu_2} [d \cos(q_2) + l] f_D \\ \dot{q}_3 = -\frac{4 k_3 R_3^2}{\mu_3} (\cos(\beta) - \cos(\beta + q_3)) \sin(\beta + q_3) + \frac{1}{2\mu_3} t_3 f \end{cases}$$

Linearizzando queste equazioni attorno alla condizione di equilibrio individuata in precedenza si ottiene

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu + B_d u_d = \\ & \begin{bmatrix} -\frac{4 k_1 R_1^2}{\mu_1} \cos(2q_1) & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{4 k_2 R_2^2}{\mu_2} \cos(2q_2) & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{4 k_3 R_3^2}{\mu_3} \cos(2q_3) \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \frac{t_1}{2\mu_1} \\ \frac{t_2}{2\mu_2} \\ \frac{t_3}{2\mu_3} \end{bmatrix} u + \\ & + \begin{bmatrix} \frac{1}{2\mu_1} (d(\cos(\pi/4) + 2 \cos(\pi/12)) + l(1 + 2 \cos(\pi/6))) \\ \frac{1}{2\mu_2} (d \cos(\pi/12) + l) \\ 0 \end{bmatrix} u_d. \end{aligned}$$

Essendo il sistema già in forma diagonale è immediato affermare che il sistema sia stabile per ogni scelta di  $k_i$  e  $\mu_i$  concordi in verso, ed in particolare per  $k_i > 0$  e  $\mu_i > 0$  come fisicamente ragionevole (si tratta infatti di tre sistemi molla smorzatore disaccoppiati). Non sarà pertanto necessaria la progettazione di un controllore stabilizzante. Per quanto riguarda l'uscita del sistema, si ha  $y = Cx$ , con

$$C^T = \begin{bmatrix} -2[d(\frac{1}{2} \sin(\frac{\pi}{12}) + \sin(\frac{\pi}{4}) + \sin(\frac{5\pi}{12})) + l(\sin(\frac{\pi}{6}) + \sin(\frac{\pi}{3}) + \sin(\frac{\pi}{2}))] \\ -2[d(\frac{1}{2} \sin(\frac{\pi}{4}) + \sin(\frac{5\pi}{12})) + l(\sin(\frac{\pi}{3}) + \sin(\frac{\pi}{2}))] \\ -2[d(\frac{1}{2} \sin(\frac{5\pi}{12}) + l(\sin(\frac{\pi}{2}))] \end{bmatrix}$$

**A.3** Le matrici numeriche del sistema linearizzato sono

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} -13.8564 & 0 & 0 \\ 0 & -27.7128 & 0 \\ 0 & 0 & -27.7128 \end{bmatrix} \\ B &= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad B_d = \begin{bmatrix} 4.005 \\ 1.4659 \\ 0 \end{bmatrix} \\ C &= -2 [44.781, 33.787, 14.744] \end{aligned}$$

La funzione di trasferimento tra l'ingresso di controllo  $u$  e l'uscita  $y$  è

$$G(s) = \frac{-283.69(s + 18.23)}{(s + 13.86)(s + 27.71)},$$

mentre la funzione di trasferimento tra l'ingresso di disturbo  $u_d$  e l'uscita  $y$  è

$$G_d(s) = \frac{-457.76(s + 24.71)}{(s + 27.71)(s + 13.86)}.$$

Come già discusso al punto precedente il sistema risulta stabile e non necessita di nessun controllo stabilizzante

**A.4** Si procede a sintetizzare il controllore  $C(s)$  affinché il sistema in anello chiuso rispetti le specifiche.

- Si vuole portare il sistema dal valore di  $p_x = p_x(\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{12}) = 30$  mm al valore di regime desiderato  $p_x = 0$  mm. Il gradino del segnale di riferimento in ingresso al sistema ha dunque ampiezza  $p_{STEP} = -30$  mm.
- Si richiede di non superare mai con il polpastrello la superficie dell'oggetto, i.e.  $p_x < 0 \forall t$ . Questo equivale ad imporre che il controllore progettato non generi sovraelongazione. Si può cercare di rispettare tale specifica con un controllo che punti ad approssimare il sistema in ciclo chiuso con un sistema ad un polo dominante.
- Si vuole che l'uscita entri in un intervallo di  $[0, 1.5]$  mm, senza più uscirne, dopo 1.5 secondi. L'intervallo corrisponde a richiedere una tolleranza percentuale di:

$$tol_{PERC} = \frac{1.5}{30} = 5\%$$

rispetto al valore di regime. La specifica sulla pulsazione di taglio  $\omega_T$  per un sistema del primo ordine è:

$$T_{a5} \simeq \frac{3}{\omega_T} < 1.5 \text{ s} \quad \implies \quad \omega_T > 2 \text{ rad/s}.$$

- La richiesta di arrivare perfettamente a contatto a regime equivale a richiedere errore a regime nullo. Siccome il sistema fisico non include un polo nell'origine esso dovrà essere introdotto tramite il controllore.
- si richiede infine che l'errore per disturbi a gradino sia nullo. Essendo la funzione di trasferimento fra disturbo ed errore in anello chiuso

$$G_d^2(s) = -\frac{G_d}{1 + GC},$$

se ne deduce che, per il teorema del valore finale

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{G_d}{1 + GC} \frac{1}{s} = 0,$$

condizione sufficiente per il soddisfacimento della specifica sia la presenza di un polo nell'origine per il sistema in anello aperto. Dunque questa specifica e la precedente sono soddisfatte entrambe da un controllore nella forma

$$C(s) = \frac{K}{s} C_0(s)$$

- Si richiede che un rumore di misura  $n(t)$  non produca a regime uno spostamento superiore a 0.001 mm. Appliciamo dunque il teorema della risposta armonica. La funzione di trasferimento fra la trasformata  $D(j\omega)$  del rumore  $n$  e la trasformata  $Y(j\omega)$  dell'uscita è data da

$$Y(j\omega) = -\frac{C(j\omega)G(j\omega)}{1 + C(j\omega)G(j\omega)} D(j\omega) = \bar{G}(j\omega) D(j\omega). \quad (1)$$

La componente dell'uscita dovuta ad un rumore sinusoidale ad una frequenza generica  $\omega_k$  sarà quindi del tipo

$$y(t) = |\bar{G}(j\omega_k)| |D(j\omega_k)| \sin(\omega_k t + \angle \bar{G}(j\omega_k + \psi)). \quad (2)$$

Facendo riferimento al caso cautelativo in cui  $\sin(\omega_k t + \angle \bar{G}(j\omega_k) + \psi) = 1$ , e considerando di maggiore il modulo  $|\bar{G}(j\omega)|$  con il suo valore massimo nel range di frequenze d'interesse, il modulo della componente sinusoidale del rumore da considerare è pari a 100mm.

Il controllo deve dunque essere scelto in modo tale che

$$|\bar{G}(j\omega)| = \frac{|C(j\omega)G(j\omega)|}{|1 + C(j\omega)G(j\omega)|} \leq \frac{0.001}{100} \quad \omega = 50Hz, \quad (3)$$

Oppure più cautelativamente:

$$|\bar{G}(j\omega)| = \frac{|C(j\omega)G(j\omega)|}{|1 + C(j\omega)G(j\omega)|} \leq \frac{0.001}{100} \quad \forall \omega \geq 50\text{Hz} \simeq 314\text{rad/s}, \quad (4)$$

Essendo il rumore ad alte frequenze è possibile applicare l'approssimazione  $|1 + C(j\omega)G(j\omega)| \approx 1$ . Il controllore quindi deve soddisfare

$$|C(j\omega)G(j\omega)| \leq 0.00001. \quad \forall \omega \geq 50\text{Hz} \simeq 314\text{rad/s}, \quad (5)$$

Il guadagno d'anello per soddisfare questa specifica dovrà essere minore di  $20 \log_{10}(0.00001) = -100$  dB per le frequenze considerate.

La figura 1 mostra il diagramma di Bode di  $G_2(s)$  con le specifiche sulla frequenza di taglio e sul guadagno ad alta frequenza che devono essere rispettate per l'attenuazione dei disturbi.

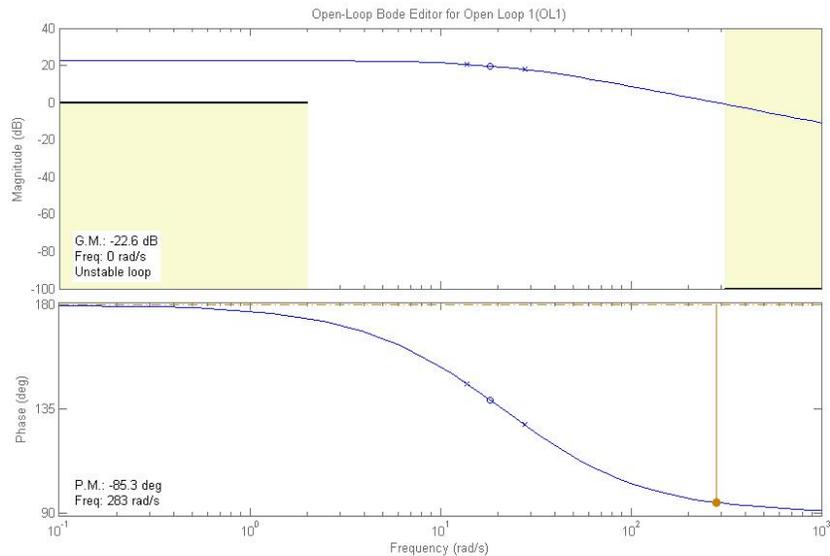


Figura 1: Diagrammi di Bode della f.d.t.  $G(s)$  con le specifiche da rispettare.

Un controllore che permetta al sistema di rispettare tutte le specifiche, compresa la causalità, è il seguente:

$$C(s) = -300 \frac{1}{s(s+40)^2}.$$

nel quale si è provveduto ad inserire un integratore, a scegliere il guadagno al fine portare la frequenza di taglio sopra quella minima, e ad aggiungere due poli a frequenze più alte per soddisfare le stringenti specifiche di attenuazione del rumore.

Il sistema chiuso in retroazione risulta essere:

$$G_{cl}(s) = 85107 \frac{s + 18.23}{(s + 22.09)(s + 9.005)(s + 3.997)(s^2 + 86.48s + 1952)}.$$

Per questo sistema è riportata la risposta al gradino in figura 3.

**A.5** Il codice di una funzione che simuli la dinamica discretizzata del controllore, ad esempio implementato come una Matlab function, è riportato di seguito.

```
function out = controllore(in)
% definizione del controllore
s = tf('s');
C1 = -300/(s*(s+40)^2);
% controllore in spazio di stato
```

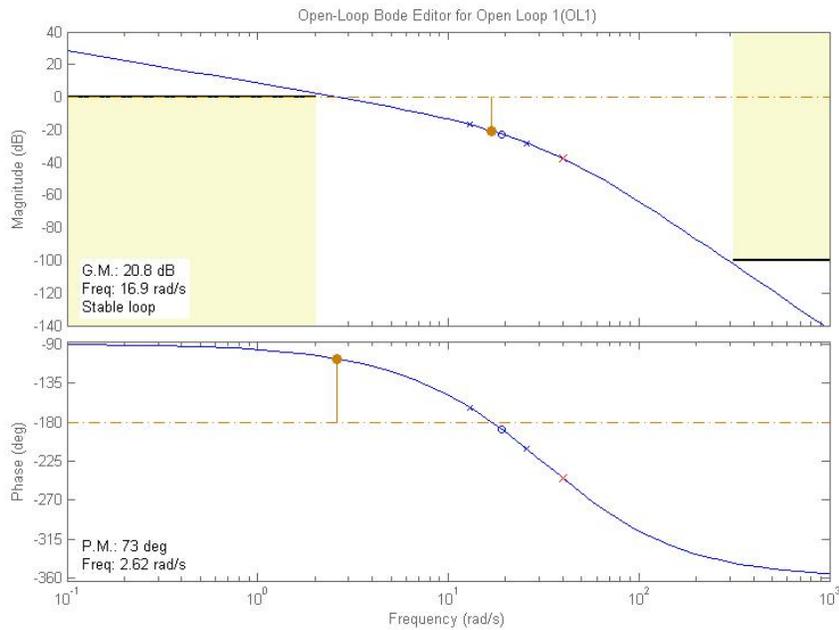


Figura 2: Diagrammi di Bode della f.d.t.  $G(s)C(s)$  con le specifiche rispettate.

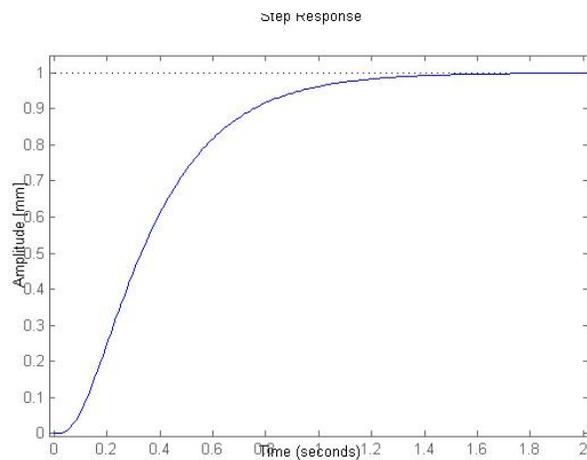


Figura 3: Risposta allo scalino del sistema in anello chiuso.

```

C_ss = ss(C1);

% errore (in ingresso al controllore)
e = in(1);
% stato del controllore
x = in(2:end);

% campionamento: circa 5-10 volte piu' veloce degli autovalori
% piu' veloci del controllore - controllando che questo rimanga stabile
Ts = 0.0025;

% matrici discretizzate
Ad = C_ss.a*Ts + eye(size(C_ss.a));
Bd = C_ss.b*Ts;
Cd = C_ss.c;
Dd = C_ss.d;

% controllo del sistema (uscita del controllore)
u = Cd*x + Dd*e;
% nuovo stato
x = Ad*x + Bd*e;

out = [u; x];

```

