

Si consideri il sistema meccanico rappresentato in figura 1.

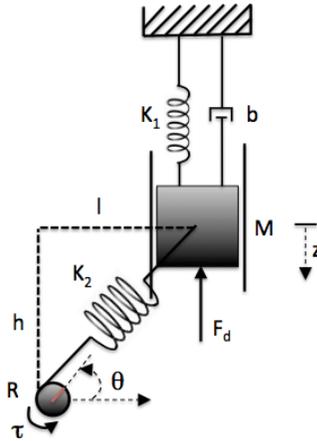


Figura 1: Sistema meccanico

Il sistema di Fig.1 è costituito da un carrello di massa  $M$  sospeso attraverso una molla di costante elastica  $K_1$  e vincolato a muoversi lungo una guida verticale con coefficiente di attrito viscoso  $b$ . La molla è sollecitata attraverso una coppia  $\tau$  su un disco di raggio  $R$  connesso alla massa da un cavo con elasticità caratterizzata da una costante  $K_2$ . Le grandezze  $h$  e  $l$  indicano l'altezza e la distanza del punto di attacco del cavo elastico sul disco (supposto costante) rispetto la posizione  $z = 0$  della massa. Infine la posizione della massa è disturbata dalla presenza di una forza  $F_d$ .

Le equazioni che regolano la dinamica del sistema sono:

$$\begin{cases} J\ddot{\theta}(t) + RK_2\sqrt{l^2 + (h - z(t))^2} + R^2K_2\theta(t) = \tau \\ M\ddot{z}(t) - gM + K_1z(t) - K_2(h - z(t)) - \frac{K_2(h - z(t))R\theta(t)}{\sqrt{l^2 + (h - z(t))^2}} + b\dot{z}(t) = -F_d \end{cases}$$

Nel sistema è disponibile un sensore per la misura della quota  $z$  della massa.

*Nota: Si riportino tutti i risultati numerici con almeno 3 cifre significative*

- A.1** Si trovi l'equilibrio del sistema in cui la coppia  $\tau$  e il disturbo  $F_d$  siano nulli.
- A.2** Si riporti simbolicamente il sistema in forma di stato linearizzato attorno al punto di equilibrio trovato precedentemente.
- A.3** Considerando i seguenti valori numerici  $J = 0.3 \text{ Kg m}^2$ ,  $M = 0.3 \text{ Kg}$ ;  $K_1 = 2.5 \text{ N/m}$ ;  $K_2 = 4.3 \text{ N/m}$ ;  $R = 0.8 \text{ m}$ ;  $b = 2.5 \text{ Kg m}^2/\text{sec}$ ;  $g = 9.8 \text{ m/sec}^2$ ;  $h = 2.5 \text{ m}$ ;  $l = 0.3 \text{ m}$ ; e supponendo di avere accesso alla uscita di misura  $z(t)$ , si determinino le funzioni di trasferimento tra la coppia  $\tau$ , la forza  $F_d$  e l'uscita  $z$ . Si determinino i modi propri del sistema.
- A.4** Si sintetizzi un controllore per la coppia  $\tau$  tale da:
- portare la massa esattamente nella posizione 2.076 m in modo tale che dopo al più 0.5 secondi la massa non sia mai più distante di 4.5 cm dal valore di regime. Infine si vuole evitare che la massa urti un ostacolo posto in posizione  $z = 2.176 \text{ m}$ . Supponendo che il disturbo  $F_d = 0.05\sin(0.1t)$  non comporti a regime sull'uscita un errore superiore a 2 mm.

Si riportino quindi

- le specifiche tradotte nel dominio della frequenza e visualizzate sul diagramma di Bode;
- il procedimento di progetto del controllore che si intende seguire illustrato con diagrammi a blocchi;
- il controllore progettato;
- i diagrammi di Bode del sistema nelle diverse fasi del progetto, mostrando il raggiungimento delle specifiche;
- la risposta al gradino del sistema controllato con le caratteristiche significative.

**A.5** Si discretizzi la dinamica del controllore e si effettui la simulazione di una risposta al gradino del sistema controllato usando SIMULINK; si discuta la scelta del tempo di campionamento e si riportino:

- il codice MATLAB che implementa il controllore discreto;
- lo schema a blocchi SIMULINK utilizzato per la simulazione;
- l'andamento simulato dell'uscita del sistema con le caratteristiche significative.

## Soluzione

**A.1** Definendo  $x = [\theta \ z \ \dot{\theta} \ \dot{z}]^T$  come vettore di stato ed imponendo le condizioni di equilibrio,  $\dot{\theta} = 0$ ,  $\dot{z} = 0$ ,  $\ddot{\theta} = 0$ ,  $\ddot{z} = 0$ ,  $F_d = \tau = 0$  si ottiene:

$$\begin{cases} 0 = RK_2\sqrt{l^2 + (h-z)^2} + R^2K_2\theta \\ 0 = gM - K_1z + K_2(h-z) + \frac{K_2(h-z)R\theta}{\sqrt{l^2+(h-z)^2}} \end{cases}$$

da cui si ottiene l'equilibrio

$$\begin{cases} \bar{\theta} = -\frac{\sqrt{l^2 + (h - \frac{gM}{K_1})^2}}{R} \\ \bar{z} = \frac{gM}{K_1} \end{cases} \quad (1)$$

**A.2** Linearizzando il sistema attorno all'equilibrio precedentemente calcolato, si ottiene il sistema linearizzato approssimato nella consueta forma di stato

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \quad (2)$$

dove,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{R^2K_2}{J} & \frac{R(h-\bar{z})K_2}{J\sqrt{l^2+(h-\bar{z})^2}} & 0 & 0 \\ \frac{R(h-\bar{z})K_2}{M\sqrt{l^2+(h-\bar{z})^2}} & -\frac{K_1+K_2+\frac{l^2R\theta K_2}{(l^2+(h-\bar{z})^2)^{3/2}}}{M} & 0 & -\frac{b}{M} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{J} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{M} \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$C = [0 \ 1 \ 0 \ 0] \quad D = 0. \quad (4)$$

**A.3** Sostituendo i valori numerici riportati si ottengono le seguenti matrici:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -9.173 & 11.183 & 0 & 0 \\ 11.183 & -21.967 & 0 & -8.333 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 3.33 & 0 \\ 0 & -3.33 \end{bmatrix}, \quad (5)$$

$$C = [0 \ 1 \ 0 \ 0], D = 0, \quad (6)$$

La funzioni di trasferimento tra l'ingresso  $\tau$  e le uscita  $y = z$  e tra il disturbo  $F_d$  e  $y = z$  sono:

$$G(s) = \frac{37.28}{s^4 + 8.333s^3 + 31.14s^2 + 76.44s + 76.44} \quad (7)$$

$$G_d(s) = \frac{-3.333s^2 - 30.58}{s^4 + 8.333s^3 + 31.14s^2 + 76.44s + 76.44} \quad (8)$$

Essendo tutti i poli del sistema a parte reale strettamente negativa  $G$  e  $G_d$  sono asintoticamente stabili. Ci sono due modi reali in  $-4.237$  e in  $-1.876$  e una coppia di poli complessi coniugati in  $-1.1105 \pm j2.8958i$ . Si hanno quindi due modi esponenzialmente convergenti e dei modi oscillanti con frequenza  $2.8958$  ed esponenzialmente smorzati.

In figura 2 è riportato il diagramma a blocchi rappresentante il sistema con l'ingresso di controllo  $\tau$  il disturbo  $F_d$  e l'uscita di misura  $y = z$ .

**A.4** Poiché il sistema che si intende controllare  $G$  non presenta poli a parte reale positiva, non è necessario l'utilizzo di un anello di controllo stabilizzante. A tal riguardo si ricorda che l'ipotesi del teorema di Bode richiede che il sistema non sia *esponenzialmente* instabile. È possibile quindi procedere direttamente alla sintesi di un controllore  $C(s)$  che permetta il rispetto delle specifiche utilizzando il diagramma di Bode.

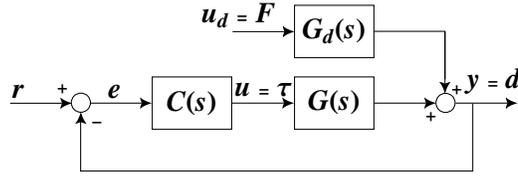


Figura 2: Diagramma a blocchi del sistema.

Il controllore, per soddisfare le specifiche, sarà del tipo

$$C(s) = \frac{K}{s^t} C_0(s), \text{ con } C_0(0) \geq 1.$$

Le specifiche statiche sono:

- raggiungere esattamente la posizione  $z = 2.076$  a partire dalla condizione di equilibrio  $\bar{z} = 1.176$ , ovvero un inseguimento esatto (con errore nullo) del gradino di ampiezza 0.9m.
- assestamento entro un intervallo di  $\pm 4.5$  cm (5% essendo il gradino di 0.9 m) entro un tempo di 0.5 sec;
- sovralongazione minore di  $\frac{2.176-2.076}{0.9} = 11\%$ .

Per la specifica sull'errore al gradino é necessario considerare un controllore di tipo 1 in quanto la funzione di trasferimento  $G(s)$  non ha poli nell'origine. La specifica sulla sovralongazione si impone tramite

$$S_{\%} = 100e^{-\frac{\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}} \leq 11\%$$

Da cui

$$\delta > 0.574888 \quad \implies \quad M_{\phi} \simeq 100\delta = 57.48 \quad (9)$$

Utilizzando una approssimazione a due poli dominanti per il sistema in anello chiuso, la specifica sull'assestamento si traduce come segue:

$$T_{a5} \simeq \frac{3}{\delta\omega_T} \quad \implies \quad \omega_T > 10.44 \text{ rad/s.}$$

**A.4.2** La componente dell'uscita dovuta ad un disturbo sinusoidale ad una frequenza  $\omega < \bar{\omega} = 0.1 \text{ rad/sec}$  é del tipo

$$y(t) = \|\bar{G}(j\omega)\| 0.05 \sin(\omega t + \angle \bar{G}(j\omega)). \quad (10)$$

Dove  $\bar{G}(s) = \frac{G_d(s)}{1+C(s)G(s)}$  è la funzione di trasferimento tra il disturbo e l'uscita. Facendo riferimento al caso cautelativo in cui  $\sin(\omega t + \angle \bar{G}(j\omega)) = 1$ , e considerando di aumentare il modulo  $\|\bar{G}(j\omega)\|$  con il suo valore massimo nel range di frequenze d'interesse, il controllo deve dunque essere scelto in modo tale che sull'uscita la variazione sia minore di 0.002m:

$$\|\bar{G}(j\omega)\| = \frac{\|G_d(j\omega)\|}{\|1 + C(j\omega)G(j\omega)\|} \leq \frac{0.002}{0.05} \quad \forall \omega \leq \bar{\omega}, \quad (11)$$

Poiché  $\bar{\omega}$  è di due ordini di grandezza minore della  $\omega_T$  è ragionevole applicare l'approssimazione  $\|1 + C(j\omega)G(j\omega)\| \approx \|C(j\omega)G(j\omega)\|$ . Il controllore quindi deve soddisfare

$$\|C(j\omega)G(j\omega)\| > \frac{0.05\|G_d(j\omega)\|}{0.002} \geq \frac{0.05 \cdot 0.4}{0.002} = 10. \quad \forall \omega \leq \bar{\omega} \quad (12)$$

Infatti, facendo riferimento alla figura 3 che riporta il diagramma di Bode della funzione di trasferimento del disturbo, si noti che per pulsazioni minori di 0.1rad/sec l'ampiezza di  $G_d(j\omega)$  è sempre maggiore di -8db che corrisponde ad essere sempre maggiore a circa 0.4.

La specifica dinamica richiede quindi un guadagno d'anello (di  $C(s)G(s)$ ) maggiore di 20 dB per frequenze minori di 0.1rad/sec.

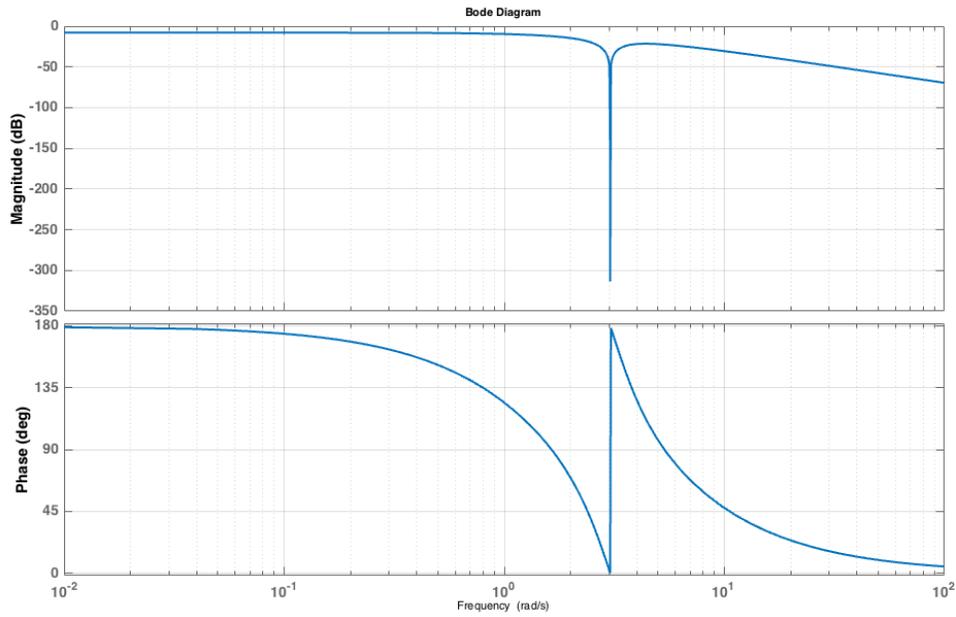


Figura 3: Diagramma di Bode della f.d.t.  $G_d(s)$ .

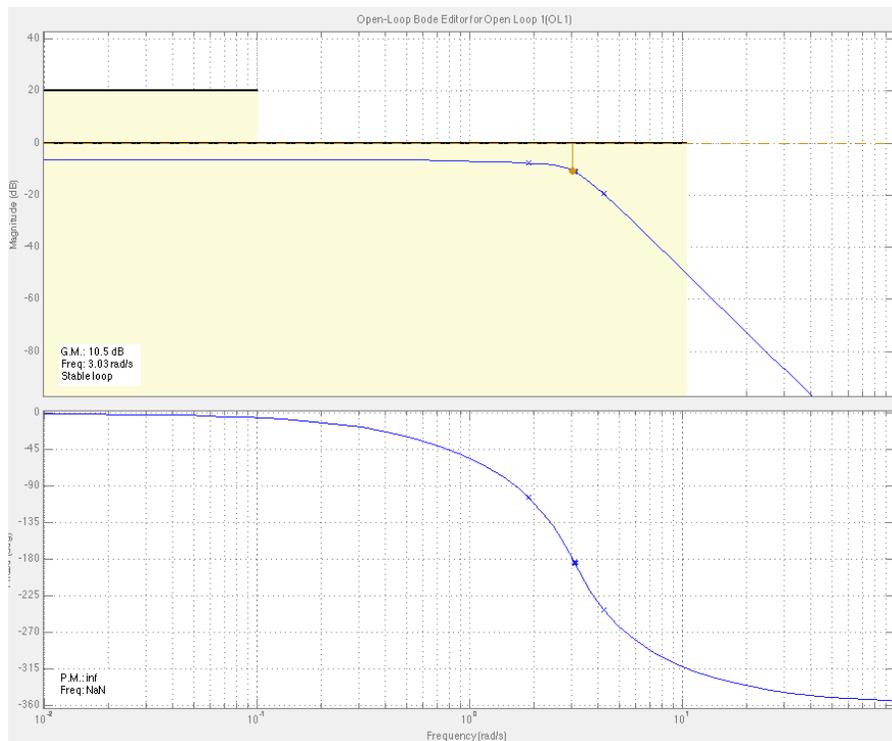


Figura 4: Diagrammi di Bode della f.d.t.  $G(s)$  con le specifiche da rispettare.

**A.4.3** La figura 4 mostra il diagramma di Bode di  $G(s)$  con la specifica sulla pulsazione di taglio, sul margine di fase e sui guadagni in bassa frequenza per attenuare i disturbi sull'uscita.

Il diagramma di Bode quando si considera un polo nell'origine del controllore è riportato in Figura 5.

Per poter aumentare l'ampiezza alle basse frequenze e la pulsazione di taglio, senza diminuire il margine di fase, si possono inserire 2 coppie di zeri complessi coniugati che richiamano i rami del luogo delle radici che non giacciono sulla retta reale negativa. Ad esempio poniamo gli zeri in  $-1.4845 \pm j 3.4459$  e

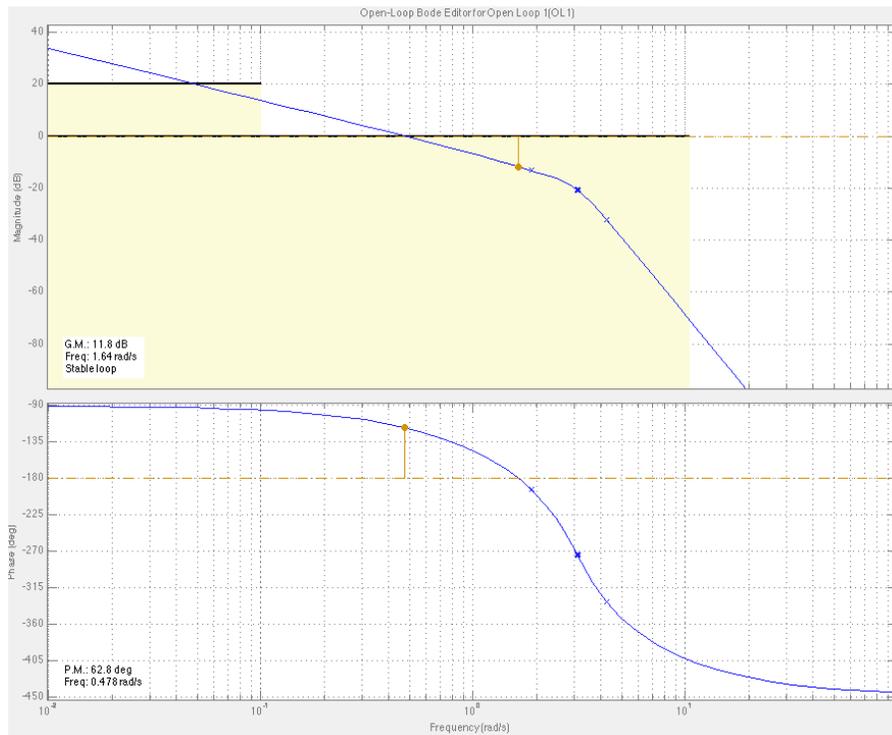


Figura 5: Diagrammi di Bode della f.d.t.  $\frac{1}{s}G(s)$  con le specifiche da rispettare.

$-1.5114 \pm j 1.2387$ . Scegliendo una costante di guadagno del controllore pari a 60 si ottiene il diagramma di Bode in 6 e si può notare che le specifiche sono verificate.

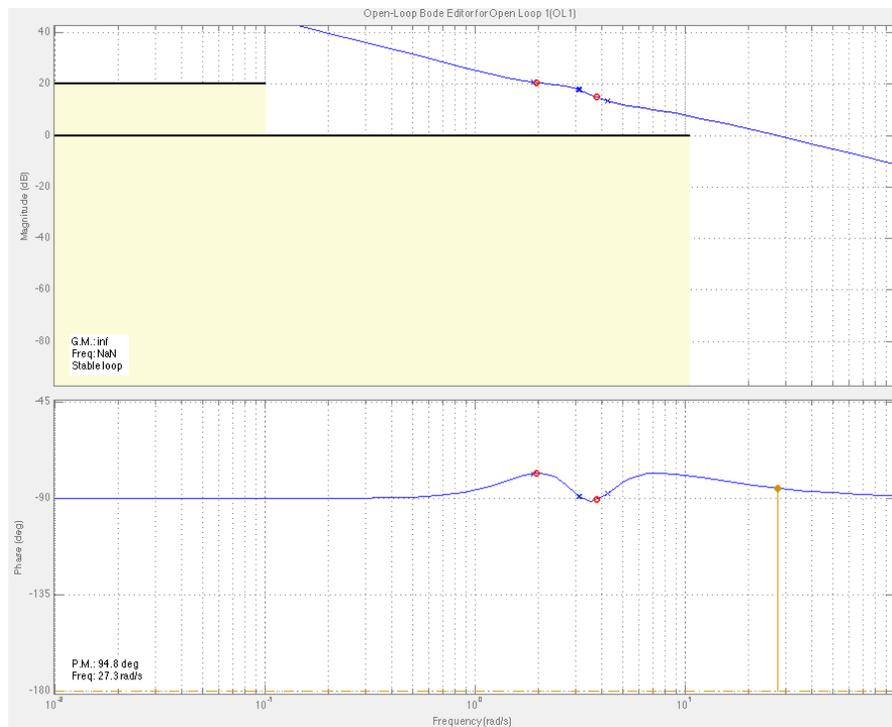


Figura 6: Diagrammi di Bode della f.d.t.  $C(s)G(s)$  con zeri inseriti  $-1.4845 \pm j 3.4459$  e  $-1.5114 \pm j 1.2387$  e  $K = 60$  in le specifiche da rispettare.

Per ottenere un controllore strettamente causale si aggiungono 2 coppie di poli complessi in alta frequenza.

Ad esempio mettendo poli in  $-500 + j 1.5$  e  $-550 + j 2.5$  si ottiene un controllore del tipo

$$C(s) = \frac{8.4406 \cdot 10^{10} (s^2 + 3.023s + 3.819)(s^2 + 2.969s + 14.08)}{s(s^2 + 1000s + 2.5 \cdot 10^5)(s^2 + 1100s + 3.025 \cdot 10^5)}.$$

I diagrammi di Bode della f.d.t.  $C(s)G(s)$  con le specifiche rispettate sono riportate in Figura 7.

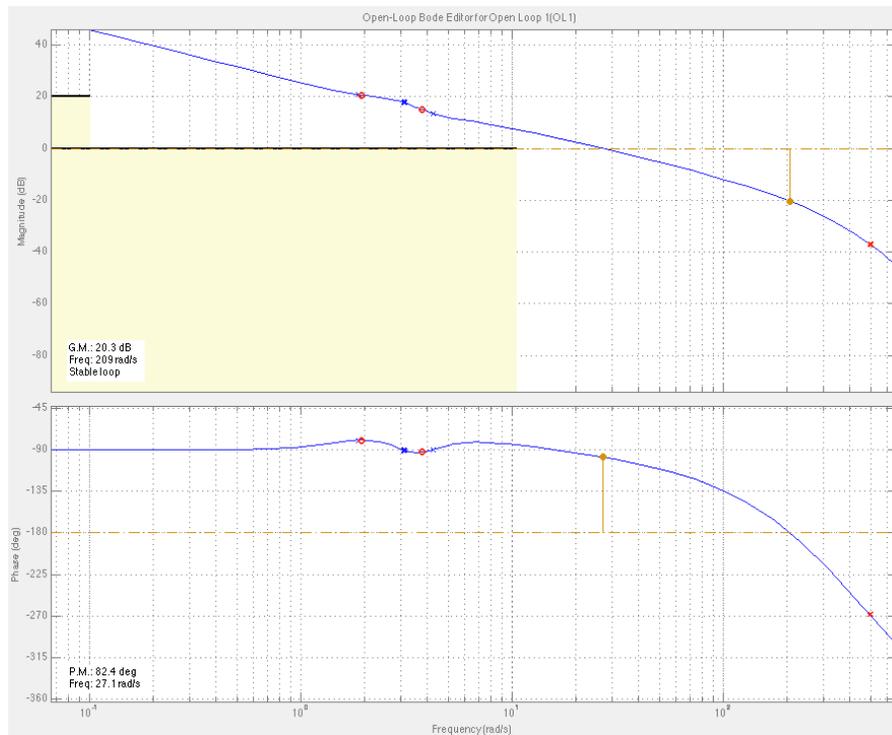


Figura 7: Diagrammi di Bode della f.d.t.  $C(s)G(s)$  con il controllore determinato in cui si vede che le specifiche sono rispettate.

La risposta al gradino del sistema controllato é riportata in Figura 8. Si può notare come, con le scelte effettuate, il sistema controllato si comporti come un sistema del primo ordine.

**A.5** Il codice di una funzione che simuli la dinamica discretizzata del controllore, ad esempio implementato come una Matlab function, è riportato di seguito.

```
function out = controllore(in)

% definizione del controllore
s = tf('s');
C1 = 8.4406e10*(s^2 + 3.023*s + 3.819)*(s^2 + 2.969*s + 14.08)/(s*(s^2 + 1000*s + 2.5e05)*(s^2 + 1100*s + 3.025e05));

% controllore in spazio di stato
C_ss = ss(C1);

% errore (in ingresso al controllore)
e = in(1);
% stato del controllore
x = in(2:end);

% campionamento: almeno 5-10 volte piu' veloce degli autovalori
% piu' veloci del controllore - controllando che questo rimanga stabile
Ts = 0.001;

% matrici discretizzate
Ad = C_ss.a*Ts + eye(size(C_ss.a));
Bd = C_ss.b*Ts;
Cd = C_ss.c;
Dd = C_ss.d;

% controllo del sistema (uscita del controllore)
u = Cd*x + Dd*e;
% nuovo stato
```

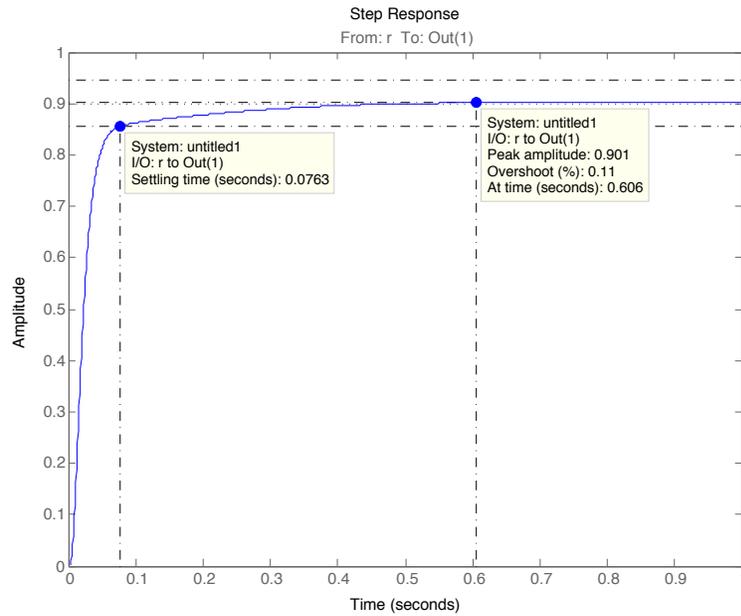


Figura 8: Risposta al gradino di ampiezza 0.9m del sistema controllato.

```
x = Ad*x + Bd*e;
out = [u; x];
```

Esso può essere utilizzato per simulare il sistema con controllore chiuso in retroazione con uno schema Simulink come quello di fig. 9. Da notare in particolare il blocco **memory**, necessario per mantenere traccia dello stato del controllore, ed il fatto che il blocco **Matlab-function** collegato al codice presentato ha un campionamento pari a quello del controllore stesso, ovvero 0.001 s.

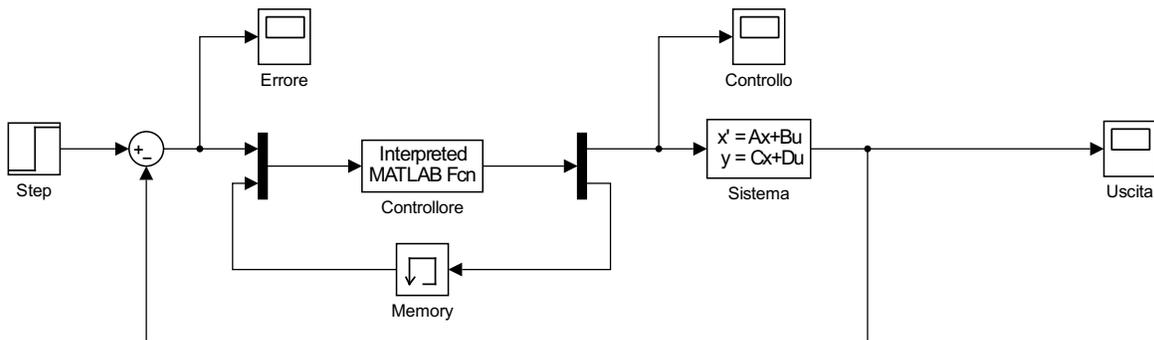


Figura 9: Schema Simulink utilizzabile per simulare la risposta del sistema in ciclo chiuso con il controllore discretizzato.

In Fig. 10 si può vedere come la risposta simulata si comporti fedelmente a quanto visto in precedenza con il sistema continuo.

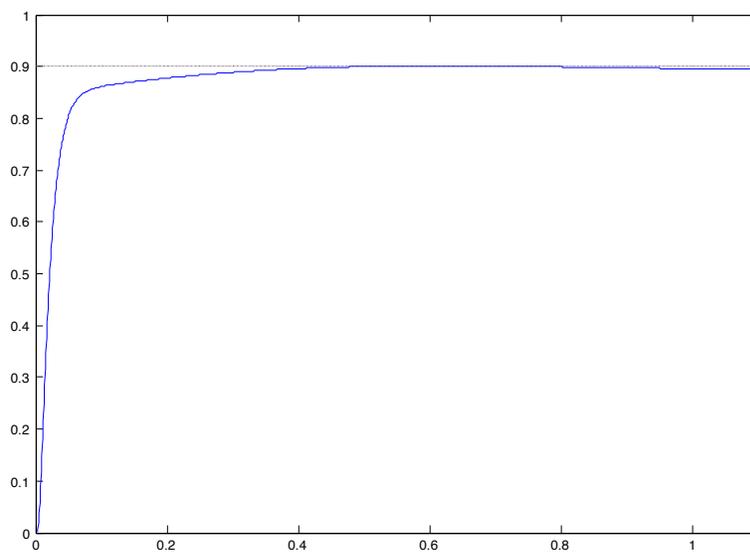


Figura 10: Risposta al gradino simulata in Simulink del sistema controllato con controllore discretizzato.