

Numero di matricola

-	-	$= \alpha - 1$	$= \beta - 1$	$= 10\gamma - 1$	$= 10\delta - 1$
---	---	----------------	---------------	------------------	------------------

Si consideri il modello semplificato di un sistema frenante per aerei utilizzato tipicamente su navi portaerei e rappresentato schematicamente in fig.1. Esso è costituito da una zavorra che viene collegata all'aereo mediante una fune durante la fase di atterraggio. Si supponga che per spostare in modo opportuno la zavorra e controllare l'atterraggio dell'aereo sia possibile agire sulla forza frenante u .

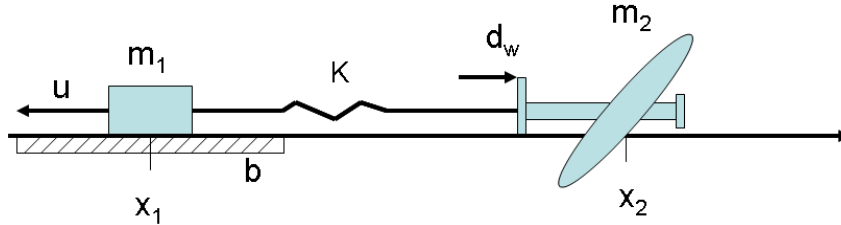


Figure 1: Sistema di atterraggio per aerei.

Si ipotizzi che durante l'atterraggio il moto sia monodimensionale, che sull'aereo agisca del vento e si possa trascurare inoltre l'attrito fra il terreno e l'aereo.

Il sistema risulta descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + b \dot{x}_1 + k(x_1 - x_2) = -u \\ m_2 \ddot{x}_2 + k(x_2 - x_1) = d_w \end{cases}$$

dove d_w è la forza di disturbo dovuta al vento $m_1 = 10000 + \alpha$ Kg ed $m_2 = 50000 + \beta$ Kg rispettivamente le masse della zavorra e dell'aereo, $k = 6000 + \gamma$ N/m la costante elastica della fune, $b = 500 + \delta$ N s/m il coefficiente di attrito fra terreno e zavorra. Le variabili x_1 ed x_2 rappresentano le posizioni del centro di massa dei due corpi, ossia zavorra e aereo. Si desidera controllare la posizione x_2 dell'aereo agendo sulla forza esterna u applicata su m_1 . L'aereo inizia la fase di atterraggio con una velocità iniziale non nulla e pari a $\dot{x}_2(0) = v = 20$ m/s.

- A) Per il sistema dato riportare la forma di stato e ricavare simbolicamente, nel dominio di Laplace, l'espressione dell'uscita x_2 in funzione dell'ingresso u e del disturbo d_w . Riportare esplicitamente lo schema a blocchi dell'intero sistema comprensivo di controllore.
- B) Tracciare manualmente i diagrammi di Bode asintotici di ampiezza e fase della funzione di trasferimento tra la posizione della massa m_2 e la forza u .
- C) Si consideri il progetto di un controllore in retroazione per la funzione di trasferimento richiesta al punto B in modo da soddisfare le seguenti specifiche:
 - C1) partendo dalla condizione iniziale data, il sistema raggiunga a regime esattamente il riferimento di posizione desiderato $x_{2d} = 50$ m e con vento nullo;
 - C2) la posizione dell'aereo durante il transitorio non deve superare $x_{2max} = 77.5$ m senza discostarsi del $\pm 5\%$ in un tempo non superiore a 20 s dal valore di regime;
 - C3) il rumore derivato dal trasduttore di misura della posizione x_2 a frequenze superiori a $160Hz$, sia attenuato di un fattore pari a 10^6 ;
 - C4) supponendo che l'azione di disturbo del vento sia approssimabile ad una forza sinusoidale di ampiezza $|d_w| \leq 100$ N e media nulla, agente a frequenze inferiori a $0.1Hz$ bisogna attenuare questo disturbo di un fattore 5.

Si descriva esplicitamente la procedura di progetto del controllore, commentando i passaggi effettuati durante le varie fasi di progetto; si corredi la trattazione con i diagrammi di Bode e i luoghi delle Radici utilizzati e si riporti l'espressione analitica del controllore ricavato.

Soluzione

A) Scegliendo il vettore $Z = (x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2)^T$ il sistema in forma di stato risulta:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = z_3 \\ \dot{x}_2 = z_4 \\ \dot{z}_3 = -\frac{k}{m_1}(z_1 - z_2) - \frac{b}{m_1}z_3 - u \\ \dot{z}_4 = \frac{k}{m_2}(z_1 - z_2) + \frac{d_w}{m_2} \end{cases}$$

In modo più compatto, in termini matriciali, il sistema si può riscrivere come

$$\begin{cases} \dot{Z} = AZ + B_1 u + B_2 d_w = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k}{m_1} & \frac{k}{m_1} & -\frac{b}{m_1} & 0 \\ \frac{k}{m_2} & -\frac{k}{m_2} & 0 & 0 \end{pmatrix} Z + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{m_1} \\ 0 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m_2} \end{pmatrix} d_w \\ \tilde{y} = CZ = (0 \ 1 \ 0 \ 0) \tilde{Z}. \end{cases}$$

Per calcolare la funzione di trasferimento del sistema lineare in anello aperto, avente come ingresso u e come uscita la posizione dell'aereo x_2 è necessario prendere in considerazione le condizioni iniziali non nulle (ovvero il sistema inizialmente non rilassato essendo $z_4(0) = v$). In tal caso l'espressione dell'uscita L-trasformata $Y(s)$ relativamente all'ingresso $U(s)$, nel caso in cui la matrice di D sia nulla, risulta:

$$Y(s) = C(sI - A)^{-1} z(0) + [C(sI - A)^{-1} B]U(s).$$

L'espressione dell'uscita, comprensiva dell'azione del disturbo $D_w(s)$, è data infine da:

$$\begin{aligned} Y(s) &= [C(sI - A)^{-1} B_1]U(s) + C(sI - A)^{-1} z(0) + [C(sI - A)^{-1} B_2]D_w(s) = \\ &= [G_1 U(s) + G_2(s)z_4(0) + G_3(s)D_w(s)]. \end{aligned}$$

Valutando in maniera letterale le diverse espressioni si ha:

$$\begin{aligned} G_1(s) &= C(sI - A)^{-1} B_1 = -\frac{k}{s[s^3 m_1 m_2 + b s^2 m_2 + k s(m_1 + m_2) + b k]} \\ G_2(s)z_4(0) &= C(sI - A)^{-1} z_4(0) = \frac{(s^2 m_1 + s b + k)m_2 v}{s[s^3 m_1 m_2 + b s^2 m_2 + k s(m_1 + m_2) + b k]} \\ G_3(s) &= C(sI - A)^{-1} B_2 = \frac{s^2 m_1 + s b + k}{s[s^3 m_1 m_2 + b s^2 m_2 + k s(m_1 + m_2) + b k]} \end{aligned}$$

Si osservi che tutte le funzioni $G_i(s)$ ($i=1,2,3$) presentano lo stesso denominatore, con un polo nell'origine.

In particolare ponendo $d(s) = s[s^3 m_1 m_2 + b s^2 m_2 + k s(m_1 + m_2) + b k] = s d_0(s)$, si può scrivere:

$$\begin{aligned} G_1(s) &= n_1/d(s) = -k/d(s) \\ G_2(s) &= n_2/d(s) = (s^2 m_1 + s b + k)m_2/d(s) \\ G_3(s) &= n_3/d(s) = (s^2 m_1 + s b + k)/d(s) \end{aligned}$$

Un possibile schema a blocchi che rappresenta la situazione descritta e che tiene conto del disturbo e delle condizioni iniziali è riportato in fig.2. Fissando i parametri $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ nulli si ottiene numericamente:

$$G_1(s) = \frac{-10000}{5 \cdot 10^8 s^4 + 4 \cdot 10^8 s^3 + 6 \cdot 10^8 s^2 + 8 \cdot 10^7 s} = \frac{-2 \cdot 10^{-5}}{s(s + 0.1448)(s^2 + 0.6552s + 1.105)}.$$

B) I diagrammi di Bode asintotici di ampiezza e fase della funzione di trasferimento $G_1(s)$ sono riportati in (fig.3).

C) Consideriamo ora il progetto di un controllore in grado di garantire le specifiche statiche e dinamiche richieste. Ci si riferisce ad un sistema a blocchi in retroazione negativa come riportato in fig.2.

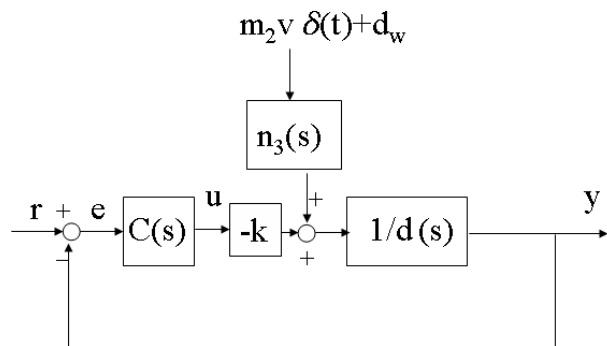


Figure 2: Schema a blocchi utilizzato per il controllo del sistema

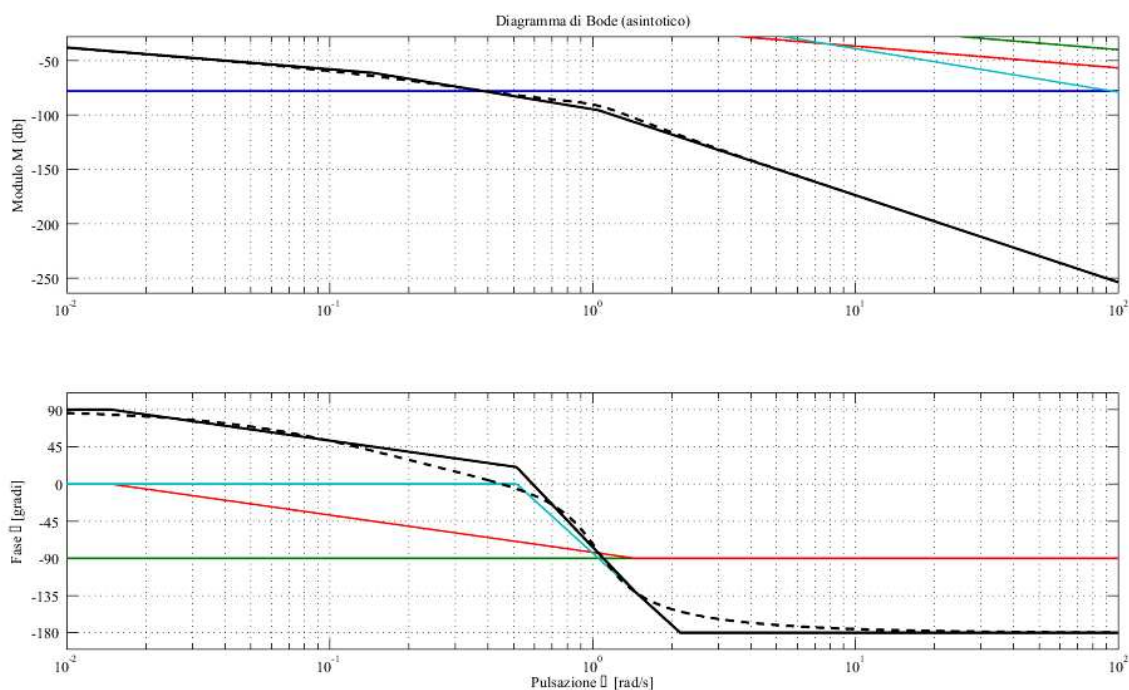


Figure 3: Diagrammi di Bode di ampiezza e fase asintotici e reali della funzione di trasferimento ad anello aperto calcolata al punto **B**).

- C1)** Essendo l'impianto ad anello aperto stabile, per progettare il controllore è possibile operare direttamente sui diagrammi di Bode. Osservando che la fdt $G_1(s)$ ha un polo nell'origine, si fa riferimento al progetto di un controllore del tipo

$$C(s) = \frac{K_c}{s^t} \hat{C}(s), \quad \text{con} \quad \hat{C}(0) = 1,$$

Si consideri la scelta del tipo t e della costante di guadagno K_c del controllore scelta negativa, essendo il guadagno statico della $G_1(s)$ negativo. Per soddisfare la specifica statica è sufficiente scrivere la funzione di trasferimento fra l'errore $E(s)$ e il riferimento $R(s)$ e tra l'errore e il disturbo $D_v(s)$ ovviamente comprensivo di condizioni iniziali.

$$E(s) = \frac{1}{1 + C(s)G_1(s)} R(s) - \frac{G_3}{1 + C(s)G_1(s)} [m_2 v].$$

Essendo il sistema di tipo 1, l'errore a regime di posizione x_2 è nullo qualunque sia il valore del riferimento a gradino assegnato. Si osservi che anche la condizione di velocità $v(t)$ dell'aereo nulla a regime è rispettata.

- C2)** La specifica sulla posizione da raggiungere senza superare la posizione massima in un tempo fissato si traduce evidentemente in una specifica sulla sovraelongazione e sul tempo di assestamento. In

particolare risulta che:

$$S = \frac{|x_{2max} - x_{2r}|}{|x_{2r}|} = \frac{77.5 - 50}{50} = 55\%.$$

Questa specifica è verificata da un sistema in anello chiuso approssimabile con un sistema del secondo ordine con smorzamento dei poli dominanti pari a 0.1869 (come si ricava dalla espressione della sovraelongazione dei sistemi di secondo ordine $S = e^{-\frac{\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}}$). Sul piano di Bode, questo significa che si ammette un margine di fase $\phi_M \approx 19^\circ$. La specifica sul tempo di assestamento, per il caso di sistema in anello chiuso a due poli dominanti indica che la pulsazione naturale dei due poli deve essere $\omega_N \geq 3/(\delta T_a) \approx 0.8026 \text{ rad/sec}$. Questa specifica in particolare si riflette nel chiedere che il diagramma delle ampiezze di $C(j\omega)G(j\omega)$ intersechi l'asse a 0db a pulsazioni superiori a 0.81 rad/sec .

Tale specifiche non risultano attualmente rispettate essendo peraltro il sistema instabile ad anello chiuso. Per migliorare la pulsazione di taglio si può agire sul guadagno ed utilizzare un'azione anticipatrice. Ponendo ad esempio due zeri reali in -0.2 e fissando il guadagno del controllore a -5000 si ottengono i diagrammi di Bode riportati fig.4. In tal caso si ha un margine di fase di 20.3°

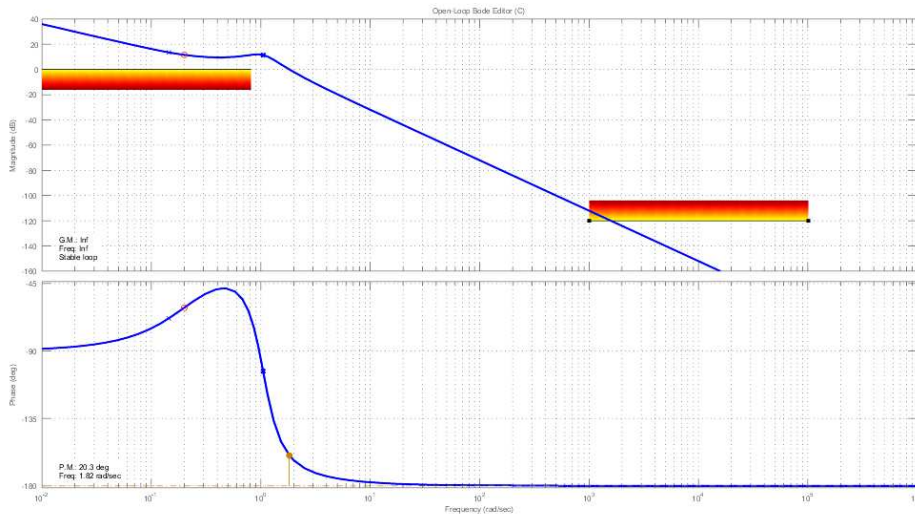


Figure 4: Diagramma di Bode del sistema dopo la compensazione $C(s) = -5000(1 + 5s)^2$

e una pulsazione di taglio di 1.82 rad/sec e quindi entrambe le specifiche risultano rispettate.

- C3)** Per imporre la specifica di reiezione del rumore in alta frequenza, bisogna fare in modo che sia

$$|-C(s)G_1(s)| < 10^{-6}|1 + C(s)G_1(s)|$$

nelle pulsazioni di interesse.

Ciò equivale approssimativamente a chiedere che sia $|C(j\omega)G(j\omega)|_{db} \leq -120 \text{ db}, \forall \omega > 2\pi \cdot 160 \approx 1005 \text{ rad/s}$. Si garantisce questa specifica inserendo nel compensatore due poli ad alta frequenza, peraltro necessari per la causalità del sistema, ad es. in -500 , ottenendo il diagramma di Bode riportato in fig.5. In questo modo si ottiene un margine di fase di 19.9° e una pulsazione di taglio di 1.82 rad/sec .

- C4)** Per quanto riguarda l'ultima specifica basta considerare la funzione di trasferimento fra il disturbo d_w e l'uscita y_d :

$$Y_d(s) = \frac{G_3}{1 + CG_1} D_w(s).$$

Essendo l'ampiezza del disturbo contenuta nella banda di interesse (al massimo 100 N per pulsazioni minori di 0.628 rad/s), è possibile utilizzare il teorema della risposta armonica. Nell'ipotesi di sistema a regime si ha:

$$|y_d(t)_{reg}| = \left| \frac{G_3(j\omega)}{1 + C(j\omega)G_1(j\omega)} \right|_{\omega \leq 0.628 \text{ rad/s}} \cdot 100$$

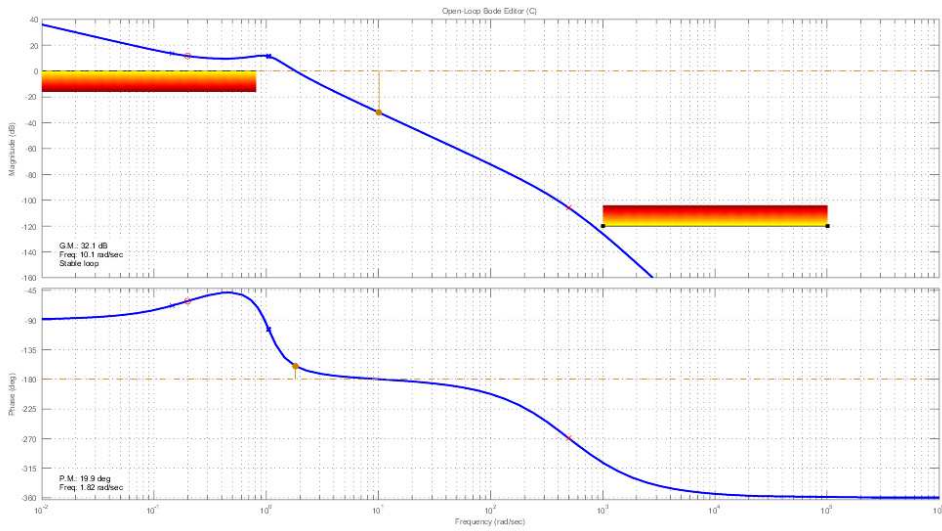


Figure 5: Diagrammi di Bode relativi al sistema con la compensazione del disturbo di misura.

Bisogna imporre che $\left| \frac{G_3(j\omega)}{1+C(j\omega)G_1(j\omega)} \right|_{\omega \leq 0.628 \text{ rad/s}} \leq \frac{1}{5}$. Essendo nella banda di interesse $C(j\omega)G_1(j\omega) \gg 1$ allora:

$$\left| \frac{G_3}{1+CG_1} \right| \approx \left| \frac{G_3}{CG_1} \right| = \left| \frac{n_3}{Cn_1} \right|.$$

Si deve avere che $\left| \frac{Cn_1}{n_3} \right|_{\omega \leq 0.628 \text{ rad/s}} \geq 5$, ovvero $\left| \frac{Cn_1}{n_3} \right|_{\text{db}} \geq 13.9794$. Ricavando i diagrammi di Bode della funzione $\frac{Cn_1}{G_3} = 3906250 \frac{(s+0.2)^2}{(s+500)^2(s+0.000125)}$ (fig.6) si ha che la specifica risulta già rispettata.

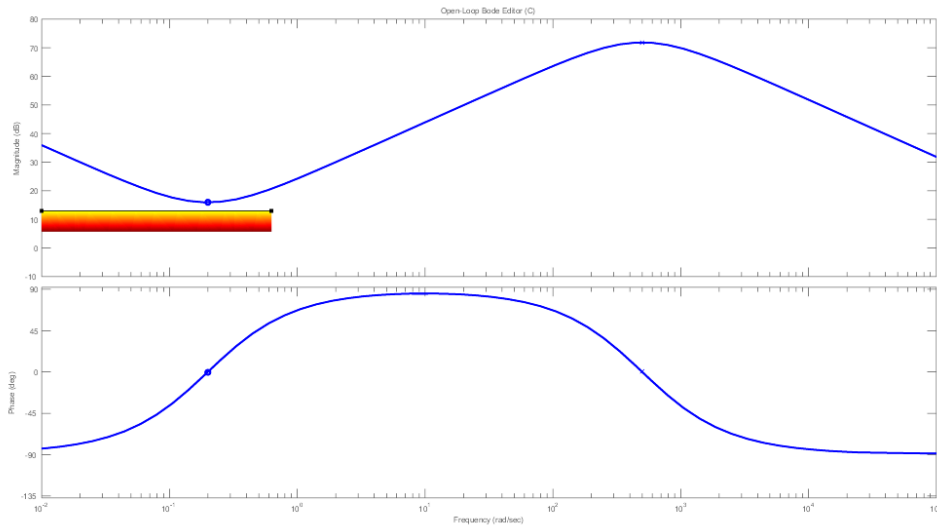


Figure 6: Diagrammi di Bode della funzione $\frac{Cn_1}{G_3}$.

Il controllore risultante è dunque

$$C(s) = -5000 \frac{(1+5s)^2}{(1+0.002s)^2}.$$

A verifica finale del progetto del controllore viene riportata in 7 la risposta al gradino del sistema in anello chiuso che tiene conto delle condizioni iniziali. Approssimativamente si ha una sovralongazione 28% ed un tempo di assestamento di 15 s.

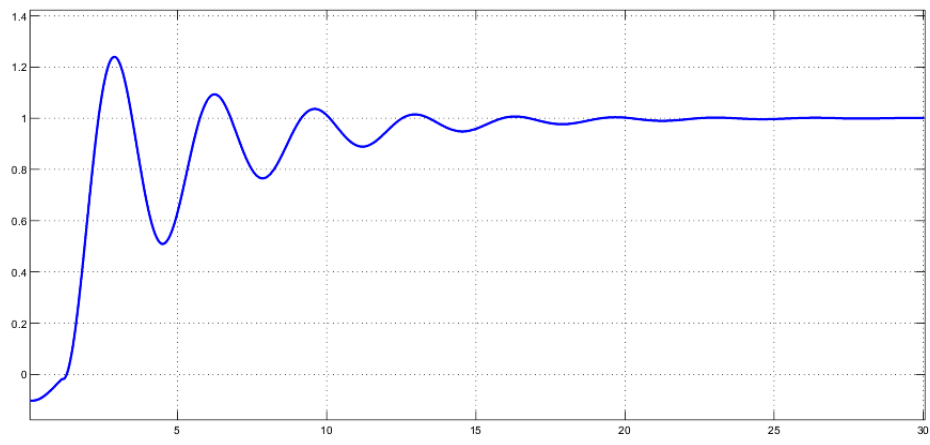


Figure 7: Risposta al gradino del sistema chiuso in retroazione.