

# Fondamenti di Automatica - II Parte

Antonio Bicchi

Università di Pisa

Versione del 17 Marzo 2025.

Alcune parti della dispensa sono in corso di integrazione o  
riscrittura.

Si consiglia di procedere ad aggiornarle circa mensilmente.

2A. *Bicchi: Fondamenti di Automatica - Parte II. Versione del 17 Marzo 2025*

# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>7</b>
1.1	Finalità e Organizzazione del Corso . . . . .	7
1.1.1	Obiettivi . . . . .	7
1.1.2	Metodologia del Corso . . . . .	8
1.1.3	Pre-requisiti . . . . .	8
1.1.4	Modalità di verifica . . . . .	8
1.1.5	Contenuti e Articolazione Temporale . . . . .	8
1.1.6	Testi suggeriti . . . . .	9
1.2	Di che si tratta . . . . .	10
<b>2</b>	<b>Stabilità</b>	<b>17</b>
2.1	Definizioni . . . . .	18
2.2	Sistemi LTI . . . . .	20
2.3	Peculiarità dei Sistemi Nonlineari . . . . .	23
2.4	Teoremi di Lyapunov . . . . .	26
2.4.1	Metodo indiretto di Lyapunov . . . . .	26
2.4.2	Metodo diretto di Lyapunov . . . . .	27
2.4.3	Teoremi del Metodo Diretto di Lyapunov . . . . .	28
2.4.4	Estensione al caso di Globale Asintotica Stabilità . . . . .	30
2.5	Teorema dell'Insieme Invariante Massimo . . . . .	31
2.5.1	Insieme Invariante Massimo e Regione di Asintotica Stabilità . . . . .	34
2.6	Teoremi inversi e di instabilità . . . . .	38
2.7	Stabilità dei Sistemi Lineari Stazionari con Lyapunov . . . . .	39
2.7.1	Sistemi Lineari Tempo-Continui . . . . .	39
2.7.2	Sistemi Lineari Tempo-Discreti . . . . .	41
2.7.3	Dimostrazione del metodo di linearizzazione . . . . .	42
2.8	Stima numerica della RAS . . . . .	43
2.8.1	Tolleranza alle perturbazioni iniziali . . . . .	46
2.8.2	Stima della RAS per sistemi controllati . . . . .	48
2.9	Velocità di Convergenza . . . . .	54

2.10	Costruzione di Krasovskii . . . . .	56
2.11	Sistemi non stazionari . . . . .	56
2.11.1	Studio di sistemi non stazionari con il metodo di Lyapunov . . . . .	58
<b>3</b>	<b>Raggiungibilità e Controllabilità</b>	<b>63</b>
3.1	Insieme di raggiungibilità . . . . .	64
3.1.1	Sistemi LTITC . . . . .	64
3.1.2	Sistemi LTITD . . . . .	66
3.1.3	Controllabilità all'origine . . . . .	67
3.1.4	Raggiungibilità di sistemi non LTI . . . . .	68
3.2	Cambiamenti di Coordinate . . . . .	70
3.3	Scomposizione Standard dei Sistemi . . . . .	70
3.3.1	Sottospazi invarianti . . . . .	70
3.3.2	Forma Standard di Raggiungibilità . . . . .	72
3.4	Lemma P.B.H. . . . .	78
3.5	Forma canonica di controllo . . . . .	80
<b>4</b>	<b>Pianificazione Ottima</b>	<b>85</b>
4.1	Minimizzazione del costo di controllo . . . . .	85
4.1.1	Sistemi LTITD . . . . .	86
4.1.2	Sistemi LTITC . . . . .	87
4.1.3	Sistemi LTITC: Campionamento e Approssimazione TD . . . . .	88
4.2	Applicazioni ed Estensioni . . . . .	91
4.2.1	Minima norma del controllo non vincolato . . . . .	92
4.2.2	Raggiungimento e Mantenimento . . . . .	96
4.2.3	Minima norma del controllo e controllo vincolato . . . . .	97
4.2.4	Ottimizzazione con pesi e vincoli sugli stati . . . . .	99
4.2.5	Pianificazione ricorsiva e Model Predictive Control . . . . .	102
<b>5</b>	<b>Retroazione degli stati</b>	<b>103</b>
5.1	Retroazione lineare degli stati nei sistemi LTI . . . . .	103
5.1.1	Formule per l'Allocazione dei Poli . . . . .	106
5.1.2	Invarianza degli zeri per retroazione . . . . .	108
5.1.3	Retroazione degli stati in sistemi a più ingressi . . . . .	108
<b>6</b>	<b>Sintesi di Controllori per Sistemi Nonlineari</b>	<b>111</b>
6.1	Sintesi di algoritmi di controllo con tecniche alla Lyapunov . . . . .	111
6.2	Problemi di Controllo di Robot . . . . .	114
6.3	Controllo Cinematico . . . . .	115
6.4	Controllo Cinematico di Bracci Robotici . . . . .	116

6.4.1	Controllo di Postura . . . . .	116
6.4.2	Inseguimento di Movimento . . . . .	120
6.4.3	Controllo su Traccia . . . . .	121
6.5	Controllo cinematico di veicoli planari . . . . .	126
6.5.1	Modello di un veicolo di tipo unicycle . . . . .	127
6.5.2	Controllo di traccia con un unicycle . . . . .	130
6.5.3	Inseguimento di moto con un unicycle . . . . .	134
6.5.4	Controllo della postura di un unicycle . . . . .	141
6.6	Controllo Dinamico di Sistemi Meccanici Completamente At- tuati . . . . .	145
6.6.1	Controllo Dinamico di Sistemi Non Vincolati - Bracci Articolati . . . . .	145
6.6.2	Controllo Proporzionale Derivativo ai Giunti . . . . .	146
6.6.3	Controllo PD nello spazio operativo . . . . .	148
6.6.4	Controllo a Coppia Calcolata . . . . .	149
6.6.5	Controllo a Coppia Calcolata nello Spazio Operativo . . . . .	151
6.6.6	Robustezza del Controllo a Coppia Calcolata . . . . .	152
6.6.7	Controllo a Struttura Variabile . . . . .	156
6.6.8	Controllo in Backstepping . . . . .	158
6.6.9	Confronto tra le tecniche di controllo ai giunti. . . . .	161
6.6.10	Constrained Systems with Complete Actuation - Vehicles	161
6.6.11	Modeling . . . . .	161
6.6.12	Backstepping Control - General Case . . . . .	163
6.6.13	Backstepping Control of Constrained Lagrangian Sy- stems . . . . .	165
6.6.14	Modello e controllo dinamico di un unicycle . . . . .	165
6.7	Controlli Adattivi e ad Apprendimento . . . . .	175
6.7.1	Controllo Cinematico con Parametri Geometrici Incerti	175
6.7.2	Controllo Dinamico con Parametri Inerziali Incerti . . . . .	179
6.7.3	Controllo a Coppia Calcolata Adattivo . . . . .	181
6.7.4	Adaptive Backstepping Control . . . . .	183
6.7.5	Li-Slotine Adaptive Controller . . . . .	185
6.7.6	Convergenza della stima dei parametri . . . . .	186
6.7.7	Adaptative Backstepping Control for Dynamic Path Tracking with a Unicycle . . . . .	187
<b>7</b>	<b>Osservabilità e Ricostruibilità</b>	<b>191</b>
7.1	Insieme indistinguibile per sistemi LTI . . . . .	191
7.1.1	Sistemi LTITC . . . . .	192
7.1.2	Sistemi LTITD . . . . .	194
7.1.3	Ricostruibilità . . . . .	196

7.1.4	Cambiamenti di Coordinate . . . . .	197
7.2	Stima ottima . . . . .	197
7.2.1	Stima ottima LTITD . . . . .	198
7.2.2	Stima ottima LTITC . . . . .	199
7.3	Dualità . . . . .	200
7.4	Osservabilità di sistemi non LTI . . . . .	201
7.5	Forma Standard di Osservabilità . . . . .	201
7.6	Lemma P.B.H. . . . .	204
7.7	Forma canonica di osservazione . . . . .	205
7.8	Iniezione delle Uscite . . . . .	206
<b>8</b>	<b>Realizzazioni e Connessioni di Sistemi</b>	<b>209</b>
8.1	Scomposizione canonica (o di Kalman) . . . . .	209
8.2	Realizzazione di sistemi . . . . .	211
8.3	Effetti di Retroazione dello Stato e Iniezione delle Uscite . . .	216
8.4	Grado Relativo . . . . .	217
8.5	Raggiungibilità e Osservabilità di Sistemi Connessi . . . . .	218
8.5.1	Connessione in Serie . . . . .	219
8.5.2	Connessione in Parallelo . . . . .	220
8.5.3	Connessione in Retroazione . . . . .	222
<b>9</b>	<b>Regolazione dei sistemi</b>	<b>225</b>
9.1	Osservatore asintotico dello stato (o di Luenberger) . . . . .	226
9.2	Sintesi del regolatore . . . . .	227
9.2.1	Esempio . . . . .	229
9.3	Retroazione delle uscite . . . . .	232
9.3.1	Progetto del Regolatore e Specifiche . . . . .	235
9.3.2	Montaggio del controllore in catena di retroazione . . .	237
9.3.3	Pianificazione e Controllo (Feedback & Feedforward) .	239
9.4	Sintesi analitica . . . . .	239
<b>A</b>	<b>Richiami di Algebra Lineare</b>	<b>245</b>
A.1	Sistemi lineari di equazioni . . . . .	245
A.2	Scomposizione ai Valori Singolari e Pseudoinversa . . . . .	247
A.3	Interpretazioni e applicazioni della SVD . . . . .	249
A.3.1	Pseudoinversa . . . . .	249
A.3.2	Norma matriciale . . . . .	249
A.3.3	Condizionamento di un sistema di equazioni . . . . .	250
A.3.4	Compressione di dati . . . . .	252

# Capitolo 1

## Introduzione

Queste dispense di Fondamenti di Automatica – II Parte sono rivolte agli studenti di un corso di secondo livello (Laurea specialistica) in Ingegneria, e coprono materiale didattico corrispondente a circa 6 Crediti Formativi Universitari, tra cui 1 di attività di laboratorio.

### 1.1 Finalità e Organizzazione del Corso

Il corso si propone di fornire agli allievi nozioni e strumenti avanzati per l'analisi di sistemi meccanici dinamici, e per il progetto dei dispositivi per il loro controllo. Oltre a fornire metodologie di progetto, il corso si occupa di fornire agli allievi nozioni sulle tecnologie degli attuatori, dei sensori, e dei processori adottati nei sistemi di controllo per macchine e impianti meccanici.

#### 1.1.1 Obiettivi

Lo studente al termine del corso sarà posto in grado di:

- Analizzare e controllare sistemi meccanici complessi;
- Stimare i limiti di applicazione delle metodologie di controllo lineare nel caso di sistemi non lineari e utilizzare strumenti per ampliare tali limiti;
- Leggere e capire le specifiche dei dispositivi commerciali utilizzati nel controllo delle macchine e dei sistemi meccanici, e progettare sistemi di controllo che usino tali componenti.

### 1.1.2 Metodologia del Corso

Le lezioni sono prevalentemente tenute illustrando in aula il materiale di queste dispense, che sono peraltro rese disponibili agli studenti in rete. Il corso si avvale per le esercitazioni di strumenti informatici (software di analisi e simulazione) disponibili presso le strutture della facoltà.

### 1.1.3 Pre-requisiti

Un corso di base in Fondamenti di Automatica, che fornisca le basi di analisi dei sistemi lineari e di controllo ingresso-uscita.

### 1.1.4 Modalità di verifica

La prova è articolata in uno o più esercizi da svolgere autonomamente, con l'uso del materiale del corso e di ogni altro materiale ritenuto utile; ed in una o più domande cui rispondere oralmente interagendo con la commissione. Le prove saranno differenziabili nelle due parti di cui si compone il corso integrato. La commissione determina il voto basandosi su tutti gli elementi raccolti durante le prove.

### 1.1.5 Contenuti e Articolazione Temporale

1. Introduzione. Presentazione del corso. Problematiche di controllo di sistemi lineari ottenuti per linearizzazione da sistemi non lineari. Esempi delle limitazioni connesse alla progettazione classica (ingresso-uscita) del controllo.
2. Stabilità. Stabilità di un movimento e di un punto di equilibrio. Stabilità semplice ed asintotica. Stabilità di sistemi lineari. Metodo diretto ed indiretto di Lyapunov. Teoremi di Lasalle e Krasovskii. Cicli limite ed insiemi invarianti. Dominio di attrazione di un equilibrio. Globale asintotica attrattività. Velocità di convergenza. Equazione matriciale di Lyapunov e stabilità di sistemi lineari. Analisi della regione di attrattività di un sistema non lineare mediante linearizzazione.
3. Raggiungibilità e Controllabilità. Proprietà strutturali di un sistema dinamico. Insieme raggiungibile di sistemi lineari tempo invarianti (TC e TD). Matrice di raggiungibilità in funzione del tempo. Raggiungibilità e cambiamenti di coordinate lineari. Controllabilità all'origine.



Pianificazione ottima, pseudoinversa di Moore-Penrose e decomposizione ai valori singolari di una matrice. Raggiungibilità di sistemi lineari tempo varianti. Definizione di sottospazi invarianti e forma standard di controllabilità. Ripartizione degli autovalori della matrice di aggiornamento dello stato tra sottospazio raggiungibile e non. Verifiche dirette di raggiungibilità. Raggiungibilità di sistemi SISO. Lemma P.B.H.. Forma canonica di controllo. Raggiungibilità di sistemi MIMO.

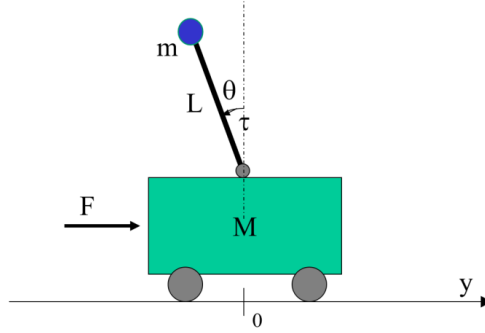
4. Retroazione degli stati. Controllo di sistemi lineari mediante retroazione degli stati. Invarianza delle proprietà di raggiungibilità di un sistema rispetto alla retroazione degli stati. Autovalori fissi e autovalori modificabili dalla retroazione. Algoritmi di allocazione degli autovalori. Invarianza degli zeri di trasmissione. Sistemi a più ingressi. Stabilizzabilità di un sistema lineare.
5. Osservabilità e Ricostruibilità. Osservabilità di sistemi lineari tempo invarianti (TC e TD). Insieme indistinguibile in funzione del tempo. Osservabilità e cambiamenti di coordinate lineari. Ricostruibilità dello stato. Sottospazi invarianti e forma standard di osservabilità. Stima Ottima. Osservabilità di sistemi lineari tempo varianti. Ripartizione degli autovalori della matrice di aggiornamento dello stato tra sottospazio inosservabile e non. Funzione di trasferimento e sottospazio inosservabile. Verifiche dirette di osservabilità. Osservabilità di sistemi SISO. Lemma P.B.H. di osservabilità. Forma canonica di osservazione. Scomposizione di Kalman.
6. Regolazione di sistemi e retroazione delle uscite. Retroazione statica delle uscite. Retroazione dinamica delle uscite. Osservatore asintotico dello stato. Realizzazione di sistemi. Regolatore.

### 1.1.6 Testi suggeriti

- E. Fornasini, G. Marchesini: “Appunti di Teoria dei Sistemi” (ed “Esercizi di Teoria dei Sistemi”), Ed. Libreria Progetto;
- P. Bolzern, R. Scattolini, N. Schiavoni: “Fondamenti di Controlli Automatici”, McGraw-Hill
- G. Marro, ”Controlli Automatici”, Zanichelli

## 1.2 Di che si tratta

Si consideri il sistema “pendolo inverso”, attuato da una forza  $F$  agente sul carrello e da una coppia  $\tau$  agente direttamente sul pendolo, rappresentato in fig. 1.2.



Le equazioni dinamiche del sistema sono date da

$$\begin{cases} (M + m)\ddot{y} + b\dot{y} - mL \cos \theta \ddot{\theta} + mL \sin \theta \dot{\theta}^2 = F \\ (I + mL^2)\ddot{\theta} - mL \cos \theta \ddot{y} - mgL \sin \theta = \tau \end{cases} \quad (1.1)$$

Gli equilibri del sistema sono facilmente ottenuti, per  $\tau = 0$ , ponendo  $\dot{y} = \ddot{y} = \dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0$  nelle equazioni dinamiche, come le configurazioni che soddisfano  $\sin \theta = 0$ . Si ha quindi  $\theta = 0$  (equilibrio superiore) e  $\theta = \pi$  (equilibrio inferiore), per qualsiasi posizione  $x$  del carrello. È intuitivo che l’equilibrio superiore è instabile. L’equilibrio inferiore è chiaramente indifferente alla posizione del carrello  $y$ , e quindi il sistema se allontanato dall’equilibrio dato, non se ne allontana, ma non tende a tornarvi. Fatta eccezione per questa variabile, d’altronde, il sistema torna al valore di equilibrio inferiore perché lo smorzamento  $b > 0$  dissipa l’energia della perturbazione iniziale.

Ci si propone di progettare un controllore che, usando le misure disponibili (l’angolo  $\theta$ , e/o la posizione  $y$ ), agisca sugli attuatori disponibili (la forza  $F$  e/o la coppia  $\tau$ ) per rendere stabile l’equilibrio verticale superiore. Proviamo a seguire per sommi capi quanto faremmo con gli strumenti di un corso elementare di Fondamenti di Automatica, per capire quali limitazioni ci possano essere e motivare lo studio che faremo di metodi più avanzati.

Partendo dalla modellazione, riscriviamo il sistema di equazioni differenziali in forma normale, ovvero

$$\begin{bmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta(\theta)} W(\theta) \left( \begin{bmatrix} -b\dot{y} - mL\dot{\theta}^2 \sin \theta \\ mgL \sin \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F \\ \tau \end{bmatrix} \right),$$

dove

$$\Delta(\theta) = (M + m)(I + mL^2) - m^2L^2 \cos^2 \theta \neq 0$$

e

$$W(\theta) = \begin{bmatrix} I + mL^2 & mL \cos \theta \\ mL \cos \theta & M + m \end{bmatrix}.$$

Passiamo adesso a riscrivere il sistema nella forma di stato dei sistemi nonlineari

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u) \\ z &= h(x) \end{aligned}$$

Poniamo a questo fine lo stato  $x = [y \ \theta \ \dot{y} \ \dot{\theta}]^T \in \mathbb{R}^4$  e identifichiamo gli ingressi  $u_1 = F$ ,  $u_2 = \tau$ . Indicando per brevità  $\sin(x_2)$  con  $S_2$  e  $\cos(x_2)$  con  $C_2$ , il sistema risultante è scritto

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ -\frac{(mL^2+I)(LmS_2x_4^2+bx_3)-L^2gm^2C_2S_2}{\Delta} \\ -\frac{LmC_2(LmS_2x_4^2+bx_3)-LgmS_3(M+m)}{\Delta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{mL^2+I}{\Delta} \\ \frac{LmC_2}{\Delta} \end{bmatrix} F + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{LmC_2}{\Delta} \\ \frac{M+m}{\Delta} \end{bmatrix} \tau. \quad (1.2)$$

Si può osservare che la forma generale  $\dot{x} = f(x, u)$  è qui esplicitata in modo da mettere in evidenza i contributi dei singoli ingressi  $\dot{x} = f_d(x) + g_1(x)u_1 + g_2(x)u_2$ .

Per le uscite, potremo considerare l'angolo del pendolo e/o la posizione del carrello, ovvero

$$\begin{aligned} h_\theta &= x_2, \\ h_y &= x_1. \end{aligned}$$

Il sistema linearizzato rispetto al punto di equilibrio verticale superiore è dato da

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, \\ z &= Cx + Du \end{aligned}$$

con  $A = \left. \frac{\partial f(x,u)}{\partial x} \right|_0 \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ ,  $B = \left. \frac{\partial f(x,u)}{\partial u} \right|_0 \in \mathbb{R}^{4 \times 2}$ ,  $C = \left. \frac{\partial h(x,u)}{\partial x} \right|_0 \in \mathbb{R}^{2 \times 4}$ , e  $D = \left. \frac{\partial h(x,u)}{\partial u} \right|_0 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ . Nel dettaglio si ha:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & a_3 & a_4 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_F = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \quad B_\tau = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ b_1 & b_3 \\ b_2 & b_4 \end{bmatrix},$$

con

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{m^2gL^2}{\Delta(\bar{x})} & a_2 &= -\frac{b(I+mL^2)}{\Delta(\bar{x})} \\ a_3 &= \frac{mgL(M+m)}{\Delta(\bar{x})} & a_4 &= -\frac{bmL}{\Delta(\bar{x})} \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{I+mL^2}{\Delta(\bar{x})} \\ \frac{mL}{\Delta(\bar{x})} \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{mL}{\Delta(\bar{x})} \\ \frac{M+m}{\Delta(\bar{x})} \end{bmatrix}.$$

Usando i seguenti valori numerici:

Siano la massa del carrello  $M = 0.6$  [kg], la massa del pendolo  $m = 0.4$  [kg], il coefficiente di smorzamento viscoso  $b = 0.13$  [N/(msec)], la lunghezza del pendolo  $L = 0.51$  [m], e l'inerzia del pendolo  $I = 0.0051$  [kgm<sup>2</sup>]. Sostituendo questi valori numerici si ottiene

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2.6727 & -0.1818 & 0 \\ 0 & 31.1818 & -0.4545 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_F = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1.8182 \\ 4.5455 \end{bmatrix}, \quad B_\tau = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4.5455 \\ 53.0303 \end{bmatrix}.$$

Valutando gli autovalori di  $A$  si trova  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = 5.5651$ ,  $\lambda_3 = -5.6041$  e  $\lambda_4 = -0.1428$ , il che conferma l'instabilità dell'equilibrio superiore.

Per le uscite  $\theta$  e  $y$  si ha poi

$$C = \begin{bmatrix} C_\theta \\ C_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La matrice  $D$  di accoppiamento diretto tra ingressi e uscite è una matrice di zeri di opportune dimensioni (tante righe e colonne quante sono le uscite e gli ingressi considerati, rispettivamente).

La matrice di trasferimento del sistema  $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$  è quindi una matrice due per due che descrive il rapporto tra i due ingressi e le due uscite. Supponendo che si abbia a disposizione il solo ingresso  $F$  (ovvero che il pendolo non sia attuato alla base) e l'uscita  $\theta$ , la funzione di trasferimento relativa è calcolata come

$$\theta(s) = C_\theta(sI - A)^{-1}B_F = \frac{mLs^2}{rs^4 + b(I + mL^2)s^3 - (M + m)mgLs^2 - bmgLs} F(s)$$

dove  $r = (M + m)(I + mL^2) - m^2L^2$ .

Si osserva che in questa funzione di trasferimento è possibile cancellare una  $s$  tra numeratore e denominatore. Resta comunque uno zero nell'origine, cioè un derivatore puro. Questo elemento, che può apparire strano, è fisicamente spiegabile per l'effetto che la forza ha sull'angolo del pendolo in presenza di smorzamento viscoso. Infatti, tipico effetto di un derivatore puro di una f.d.t. è una risposta a regime nulla in presenza di ingresso costante<sup>1</sup>, quale si verifica appunto nel nostro caso quando una forza costante sia

<sup>1</sup>Si pensi al teorema del valore finale quando sia  $F(s) = \frac{\bar{F}}{s}$

bilanciata a regime dallo smorzamento viscoso, stabilendo quindi una velocità di regime costante per il carrello, nella quale condizione il pendolo non è eccitato da alcuna forza inerziale (resta solo la forza peso, che ovviamente farebbe allontanare il pendolo dall'equilibrio superiore con perturbazioni arbitrariamente piccole).

Essendo il sistema instabile in anello aperto, non possiamo applicare direttamente la sintesi sui diagrammi di Bode, ma possiamo procedere ad una sintesi di controllore in cascata, introducendo un primo controllore stabilizzante, per poi agire ulteriormente sul sistema stabilizzato con un'ulteriore anello di retroazione per garantire le specifiche funzionali.

Per il progetto dell'anello di retroazione interna stabilizzante, possiamo usare la tecnica del luogo delle radici.

Dal luogo delle radici di  $G(s)$  è facile capire che non è possibile stabilizzare il sistema con una retroazione puramente algebrica, ma è necessario introdurre una retroazione dinamica, cioè nuovi poli nel controllore. Si osserva inoltre che il ramo che parte dal polo a parte reale positiva e termina sullo zero nell'origine dà sempre luogo ad un polo instabile in anello chiuso, se non viene interrotto ponendo un polo sul semiasse reale positivo. Il progetto può continuare aggiungendo quindi uno zero a parte reale negativa ed una o più azioni anticipatrici che attraggano i rami del luogo nel semipiano sinistro per qualche valore opportuno del guadagno del controllore. A conclusione di questa fase di progetto ci si rende conto che la mancanza di sistematicità del progetto sul luogo delle radici permette di trovare soluzioni solo in casi relativamente semplici, ma può rendere proibitivamente complessa la stabilizzazione di sistemi generali.

Si noti inoltre che, nel progetto eseguito sino a questo punto, la variabile di posizione del carrello è stata ignorata. Il suo comportamento non risulta convergente, come è possibile vedere considerando la f.d.t.

$$y(s) = \frac{[(I + mL^2)s^2 - mgL]}{rs^4 + b(I + mL^2)s^3 - (M + m)mgLs^2 - bmgLs} F(s)$$

e la sua risposta quando in ingresso sia posto il segnale prodotto dal controllore progettato per la stabilizzazione dell'angolo. Si può osservare che, con gli strumenti di progetto disponibili con i corsi elementari di controllo per f.d.t. SISO, non riusciamo a stabilizzare la variabile  $y$  usando la sola misura della uscita  $\theta$ .

Quando poi si applichi il controllore calcolato per stabilizzare il sistema linearizzato al sistema originale (nonlineare), possiamo osservare che il pen-

dolo torna effettivamente al valore angolare desiderato solo per perturbazioni dello stato iniziale piuttosto limitate, ma diverge altrimenti.

A questo fine, potrebbe essere utile sfruttare la possibilità di applicare anche una coppia  $\tau$  oltre che la spinta  $F$ . Il sistema si configurerebbe in questo modo come un sistema con multipli ingressi e multiple uscite (MIMO): per questi sistemi non sono ancora stati visti metodi di progettazione del controllo adeguati.

In alcuni casi, la condizione iniziale del sistema è necessariamente lontana da quella di equilibrio: si pensi ad esempio al problema di portare il sistema da una configurazione iniziale con pendolo nell'equilibrio inferiore a quello superiore. In questo caso, non è facile e neppure appare sensato procedere con un controllo puramente in retroazione (l'errore di angolo del pendolo sarebbe inizialmente molto grande, pari a  $\pi$ ), e sembra più ragionevole procedere prima ad una pianificazione preliminare della traiettoria che si vuole sia eseguita, e solo successivamente al controllo in retroazione del sistema rispetto a questa pianificazione.

Nella applicazione di questo controllore all'originale sistema fisico, si evidenziano quindi alcune importanti limitazioni delle tecniche studiate nei corsi elementari di controllo:

- la stabilizzazione ottenuta attraverso lo studio del modello linearizzato vale solo localmente. Condizioni iniziali perturbate di una quantità finita possono provocare instabilità del vero sistema;
- la posizione del carrello non è in generale stabilizzata, anzi può divergere allontanandosi dalla regione ammissibile, anche se l'angolo del pendolo è stabilizzato correttamente;
- il progetto del controllore stabilizzante mediante luogo delle radici non è sistematico, essendo affidato alla capacità ed esperienza del progettista. Per alcuni sistemi (in particolare, ad esempio, per quelli che abbiano zeri e/o poli a parte reale positiva) questa tecnica può richiedere un lungo tempo di progetto;
- per problemi in cui non si debba semplicemente stabilizzare il sistema, ma lo si voglia fare evolvere secondo delle traiettorie desiderate, il solo controllo in retroazione è uno strumento insufficiente.

Questa seconda parte del corso di Fondamenti di Automatica si rivolge allo studio di tecniche che permettano di evitare questi inconvenienti. In particolare, lo studio comprenderà

- metodi per la valutazione della stabilità degli equilibri dei sistemi non-lineari, la quantificazione delle perturbazioni accettabili, e il progetto di tecniche di controllo che si basino quando possibile direttamente sul modello nonlineare;
- metodi per comprendere quali dinamiche del sistema completo possano non essere catturate dal modello con funzione di trasferimento, e valutarne la possibile instabilità;
- metodi per pianificare in modo ottimo le traiettorie di sistemi dinamici, tenendo anche conto di nonlinearietà e vincoli sugli ingressi e sugli stati;
- metodi per controllare sistemi MIMO;
- metodi per progettare controllori lineari stabilizzanti che possano rendere sistematico il progetto e la verifica della stabilità.





# Capitolo 2

## Stabilità

Consideriamo un sistema nonlineare definito in modo molto generale da

$$\mathbb{D}x = f(x, u, t), \quad (2.1)$$

in uno spazio di stato Euclideo  $x \in \mathbb{R}^n$ . Indicheremo con  $\|\cdot\|$  la norma degli stati  $x \in \mathbb{R}^n$ .

Siano  $x(0) = \bar{x}$  le condizioni iniziali, e sia  $\bar{u}(t)$  la funzione di ingresso applicata al sistema (2.1): indichiamo la corrispondente soluzione (o “movimento”) del sistema con la notazione  $x(\bar{x}, \bar{u}, t)$ . Particolari movimenti sono gli equilibri, per i quali  $\bar{u}(t) \equiv \bar{u}$  e  $x(\bar{x}, \bar{u}, t) \equiv \bar{x}$  sono costanti.

Quando la particolare funzione o successione di ingresso sia assegnata e fissa, si potrà fare a meno di citarla esplicitamente nella descrizione del sistema ( $\mathbb{D}x = f(x, t)$ ) e delle sue soluzioni ( $x(\bar{x}, t)$ ).

Si dice *orbita* (o traccia)  $T_{\bar{x}}$  di un sistema passante per  $\bar{x}$  la curva (cioè l'insieme dei punti) percorsa dallo stato, ovvero  $T_{\bar{x}} = \{\xi \in \mathbb{R}^n | \exists t, \xi = x(\bar{x}, t)\}$ . Per definizione, qualsiasi soluzione a partire da un punto di un'orbita rimane indefinitamente sull'orbita stessa (si dice che l'orbita è un invariante del sistema). La distanza di un punto  $x \in \mathbb{R}^n$  da un'orbita  $T_{\bar{x}}$  è  $d(x, T_{\bar{x}}) = \min_{\xi \in T_{\bar{x}}} \|x - \xi\|$ .

Orbite di particolare interesse sono quelle chiuse, che vengono percorse periodicamente dal sistema. Se un sistema possiede orbite chiuse e isolate, queste sono dette *cicli limite* del sistema. Si noti che solo i sistemi nonlineari possono avere cicli limite<sup>1</sup>

Intuitivamente associato al concetto di equilibrio è quello di stabilità, che ha molti aspetti: rispetto alle perturbazioni delle condizioni iniziali, rispetto alle variazioni dell'ingresso, oppure rispetto a cambiamenti del modello,

---

<sup>1</sup>I sistemi lineari possono avere orbite chiuse, ma non isolate: si pensi ad esempio ad un sistema LTITC con due autovalori immaginari puri, per il quale tutte le orbite sono cerchi centrati nell'origine.

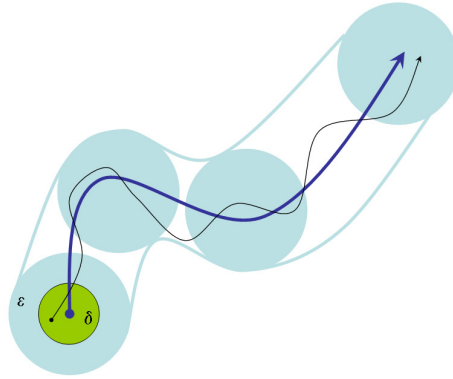


Figura 2.1: Illustrazione del concetto di stabilità di un movimento

etc.. Ci concentreremo su quello che riguarda la stabilità rispetto alle perturbazioni delle condizioni iniziali. Considereremo cioè comparativamente le soluzioni del sistema in condizioni nominali  $x(\bar{x}, \bar{u}, t)$  e in condizioni perturbate  $x(\bar{x}', \bar{u}, t)$ , e diremo stabili quei movimenti che sono poco alterati da piccole alterazioni delle condizioni iniziali. Cercheremo di rendere preciso questo concetto, e di stabilire tecniche per decidere della stabilità o meno di un equilibrio.

## 2.1 Definizioni

Un movimento  $x(t) = x(\bar{x}, t)$  è stabile per il sistema (2.1) se tutti i movimenti che originano da condizioni iniziali sufficientemente vicine a  $\bar{x}$  rimangono arbitrariamente vicine a  $x(\bar{x}, t)$  stesso. In formule, se  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$  tale che, se  $\|\bar{x}' - \bar{x}\| < \delta$ , allora  $\|x(\bar{x}', t) - x(\bar{x}, t)\| < \epsilon, \forall t$  (vedi fig. 2.1).

Un movimento  $x(\bar{x}, t)$  è attrattivo per il sistema (2.1) (ovvero il sistema è convergente rispetto a quel movimento) se, per tempi sufficientemente lunghi, tutti i movimenti che originano da condizioni iniziali sufficientemente vicine a  $\bar{x}$  tendono a  $x(\bar{x}, t)$ ; ovvero, se  $\exists \delta > 0 : \|\bar{x}' - \bar{x}\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(\bar{x}', t) - x(\bar{x}, t)\| = 0$ .

Un movimento è asintoticamente stabile se è stabile ed attrattivo (vedi fig. 2.2). È instabile se non è stabile.

Questi concetti si specializzano per i particolari movimenti che sono i punti di equilibrio (vedi fig. 2.3), ovvero quelle soluzioni  $x(\bar{x}, t) = \bar{x}, \forall t$ :

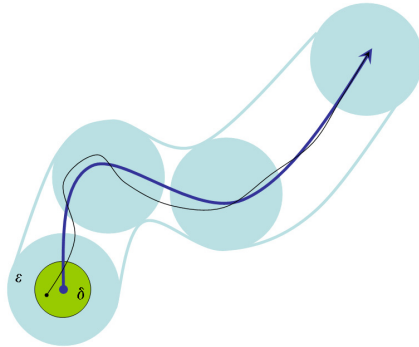
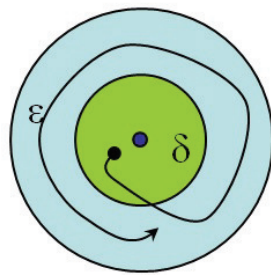
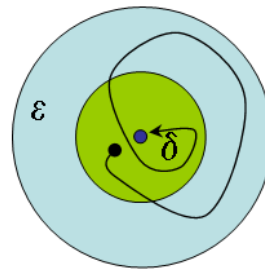


Figura 2.2: Illustrazione del concetto di asintotica stabilità di un movimento.



Equilibrio stabile



Equilibrio asintoticamente stabile

Figura 2.3: Illustrazione dei concetti di stabilità di un equilibrio

Uno stato di equilibrio  $\bar{x}$  è stabile per il sistema (2.1) se  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 :$   
 $\|\bar{x}' - \bar{x}\| < \delta \Rightarrow \|x(\bar{x}', t) - \bar{x}\| < \epsilon, \forall t.$

Uno stato di equilibrio  $\bar{x}$  è attrattivo per il sistema (2.1) se  $\exists \delta > 0 :$   
 $\|\bar{x}' - \bar{x}\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(\bar{x}', t) - \bar{x}\| = 0.$

Uno stato di equilibrio è asintoticamente stabile se è stabile ed attrattivo.  
 È instabile se non è stabile. Un equilibrio stabile, ma non asintoticamente stabile, viene anche detto *semplicemente* o *marginalmente* stabile.

I problemi di stabilità e attrattività di un qualsiasi stato di equilibrio di un sistema possono essere riportati allo studio delle analoghe proprietà dell'origine per un sistema opportuno. Allo stesso modo, i problemi di stabilità

relativi ai movimenti di un sistema possono sempre essere riportati ad analoghi problemi di stati di equilibrio di un differente sistema, i cui stati sono le differenze tra il movimento perturbato e quello di riferimento. Infatti, se indichiamo per brevità di notazione con  $\bar{x}(t) = x(\bar{x}, t)$  la soluzione nominale e con  $x(t) = x(\bar{x}', t)$  la soluzione perturbata a partire da condizioni generiche, e poniamo  $\tilde{x}(t) = x(t) - \bar{x}(t)$ , si ottiene da (2.1)

$$\mathbb{D}\tilde{x} = f(x(t)) - f(\bar{x}(t)) \stackrel{def}{=} \tilde{f}(\tilde{x}, t)$$

per una funzione  $\tilde{f}(\cdot)$  opportunamente definita, con condizioni iniziali  $\tilde{x}(0) = \bar{x}' - \bar{x}$ , ed equilibrio in  $\tilde{x} = 0$ . Si noti che il sistema ottenuto può essere non stazionario, anche se il sistema per il quale si voleva studiare la stabilità del movimento era stazionario.

**Esempio:** Si consideri il sistema nonlineare stazionario  $\dot{x} = \sin(x) + u$ , con ingresso costante  $\bar{u} = 1$  e  $\bar{x} = 1$ . La soluzione di riferimento in questo caso particolare è calcolabile esplicitamente come  $\bar{x}(t) = -2 \arctan(\frac{2+t-c}{t-c})$ , con  $c = 2/(1+\tan(0.5))$  (ovviamente, in molti altri casi una soluzione esplicita può non essere disponibile). Si ha

$$\dot{\tilde{x}} = \sin(x) + 1 - \sin(\bar{x}(t)) - 1 = \sin(\tilde{x} + \bar{x}(t)) - \sin(\bar{x}(t)) := \tilde{f}(\tilde{x}, t)$$

con  $\tilde{x}(0) = x(0) - 1$ . Il modello linearizzato attorno all'equilibrio  $\tilde{x} = 0$  (in cui  $\tilde{f}(0, t) \equiv 0$ ) è dato da

$$\dot{\tilde{x}} = A(t)\tilde{x}$$

con  $A(t) = \left. \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tilde{x}} \right|_{\tilde{x}=0} = \cos(-2 \arctan(\frac{2+t-c}{t-c}))$ . Il sistema traslato ed il suo linearizzato sono quindi tempo varianti. Si osservi incidentalmente che  $A > 0$  per  $t < T \approx 0.3$ , e  $A < 0$  per  $t > T$ . ◇

Concetti simili sono definiti per le orbite dei sistemi. Un'orbita  $T_{\bar{x}}$  è stabile per il sistema (2.1) se tutti i movimenti che originano da condizioni iniziali sufficientemente vicine a  $T_{\bar{x}}$  rimangono arbitrariamente vicine a  $T_{\bar{x}}$ ; ovvero se  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$  tale che, se  $d(x', T_{\bar{x}}) < \delta$ , allora  $d(x', t), T_{\bar{x}} < \epsilon, \forall t$ . L'orbita è attrattiva per il sistema se  $\exists \delta > 0 : d(x', T_{\bar{x}}) < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} d(x(x', t), T_{\bar{x}}) = 0$ .

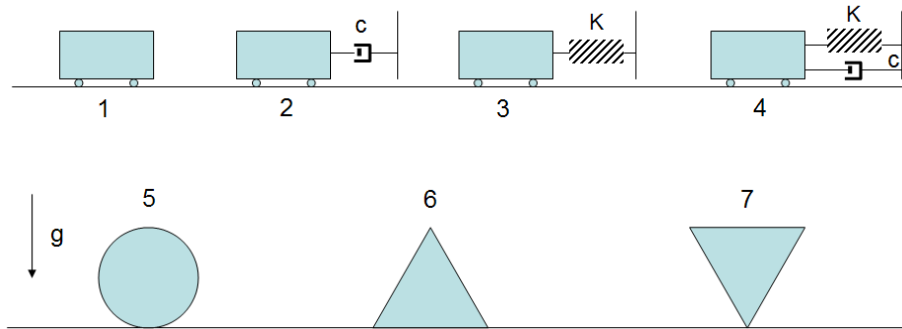
## 2.2 Sistemi LTI

Per i sistemi LTI, conoscendo già le soluzioni esplicite, è possibile applicare questi concetti immediatamente:

1. L'origine è un punto di equilibrio asintoticamente stabile per il sistema  $\dot{x} = Ax$  se tutti i modi del sistema sono convergenti a zero (ovvero se tutti gli autovalori di  $A$  hanno parte reale strettamente negativa); è semplicemente stabile se tutti i modi del sistema sono limitati (ovvero se tutti gli autovalori hanno parte reale non positiva, e quelli a parte reale nulla hanno tutti molteplicità geometrica pari a quella algebrica). Se l'origine è instabile (ovvero, non è stabile), possiede almeno un modo divergente a infinito. Se la divergenza di almeno uno dei modi è esponenziale (quindi se  $A$  ha almeno un autovalore a parte reale positiva), si dice esponenzialmente instabile. Se tutti i modi divergenti sono invece polinomiali (quindi se  $A$  ha autovalori sull'asse immaginario associati a miniblocchi di Jordan di ordine due o superiore), si dice polinomialmente instabile.
2. L'origine è un punto di equilibrio stabile e attrattivo per il sistema  $x(t+1) = Ax(t)$  se tutti i modi del sistema sono convergenti a zero (ovvero se tutti gli autovalori di  $A$  hanno modulo strettamente minore di uno); è semplicemente stabile se tutti i modi del sistema sono limitati (ovvero se tutti gli autovalori hanno modulo non maggiore di uno, e quelli a modulo unitario hanno tutti molteplicità geometrica pari a quella algebrica). Se l'origine è instabile (ovvero, non è stabile), possiede almeno un modo divergente a infinito. Se la divergenza di almeno uno dei modi è esponenziale (quindi se  $A$  ha almeno un autovalore a modulo maggiore di uno), si dice esponenzialmente instabile. Se tutti i modi divergenti sono invece polinomiali (quindi se  $A$  ha autovalori sul cerchio unitario associati a miniblocchi di Jordan di ordine due o superiore), si dice polinomialmente instabile.
3. Se uno stato (in particolare l'origine) di un sistema LTI è stabile [rispettivamente, as. stabile], allora ogni altro stato di equilibrio, ed ogni movimento di riferimento sono stabili [as. stabili]. Si può quindi parlare di stabilità *del sistema*.
4. La asintotica convergenza a zero degli stati vale a partire da qualsiasi condizione iniziale: un sistema LTI asintoticamente stabile è anche *globalmente* asintoticamente convergente.
5. In un sistema LTI, la attrattività comporta la stabilità, e la instabilità comporta la divergenza (cioè la illimitatezza) dei movimenti.
6. In un sistema LTI asint. stabile, tutti i modi convergono a zero esponenzialmente.

Riguardo al punto 3, si osservi che, se l'origine è asintoticamente stabile, allora è anche l'unico punto di equilibrio per il sistema. Si può ciononostante parlare di asintotica stabilità di movimento, ad esempio in corrispondenza a ingressi  $\bar{u} \neq 0$ . Se invece esiste un punto di equilibrio  $\bar{x} \neq 0$ , allora ovviamente esiste un intero sottospazio di punti di equilibrio, coincidente con il kernel di  $A$ . Perchè ciò accada, è necessario e sufficiente che  $A$  abbia un autovalore nullo.

**Esempio:** Si considerino i sistemi meccanici di figura, tutti dotati di massa. Gli elementi elastici e gli smorzatori hanno caratteristica lineare non precisata. Per i sistemi 5, 6 e 7, si consideri impossibile lo strisciamento sul piano.



Lo stato di equilibrio del sistema 1) rappresentato in figura è instabile in assenza di attrito di strisciamento. Infatti, condizioni iniziali arbitrariamente piccole, ma non nulle, portano il sistema a divergere (in particolare, una velocità iniziale non nulla genera un moto uniforme e quindi la divergenza della posizione). Analiticamente, il sistema è lineare e può essere considerato esso stesso instabile: ha infatti un autovalore in zero con molteplicità algebrica pari a due e geometrica pari a uno.

L'equilibrio del sistema 2) è marginalmente stabile. Infatti, stabiliti limiti arbitrari agli stati (posizioni e velocità), è sempre possibile trovare condizioni iniziali non nulle ma sufficientemente piccole, tali che i limiti non siano mai superati nella evoluzione libera del sistema. In termini analitici, il sistema lineare 2) ha un autovalore in zero e un autovalore reale negativo.

L'equilibrio del sistema 3) è anch'esso marginalmente stabile: se inizializzato in uno stato non di equilibrio, ha un moto oscillatorio non smorzato, che è può essere limitato a regioni arbitrariamente piccole dello spazio di stato scegliendo condizioni iniziali sufficientemente prossime all'equilibrio. Il sistema ha due autovalori immaginari puri.

Il punto di equilibrio del sistema 4) rappresentato in figura è asintoticamente stabile: l'effetto della molla è quello di fare oscillare il sistema attorno all'origine, mentre lo smorzatore causa la continua dissipazione di energia e la diminuzione della velocità, quindi attenua l'ampiezza delle oscillazioni. Lo stato del sistema tende quindi asintoticamente all'origine. Il sistema ha due autovalori a parte reale negativa.

In assenza di attrito di rotolamento, lo stato di equilibrio del sistema 5) rappresentato in figura è instabile. Infatti, anche in presenza di attrito di strisciamento tra le superfici in contatto, è sufficiente che all'istante iniziale la velocità di rotazione sia non nulla perché il sistema si allontani indefinitamente dallo stato di equilibrio con velocità costante. Nel caso invece in cui sia presente attrito di rotolamento l'equilibrio è marginalmente stabile: infatti l'attrito volvente introduce nel sistema una dissipazione di energia che fa diminuire la velocità, e quindi rende possibile limitare le traiettorie a regioni arbitrariamente piccole dello spazio di stato scegliendo opportune condizioni iniziali.

Nel caso del sistema 6), è necessario considerare moti perturbati che consistono di rotazioni attorno agli spigoli con transizioni modellabili come urti col piano. Se gli urti sono perfettamente elastici, l'equilibrio è marginalmente stabile, in quanto il corpo si manterrebbe indefinitamente in oscillazione (di ampiezza limitata e proporzionale alle condizioni iniziali). Se gli urti sono anelastici, l'equilibrio è asintoticamente stabile.

Lo stato di equilibrio del sistema 7) rappresentato in figura è instabile, poiché se lo stato iniziale non coincide esattamente con quello di equilibrio il sistema si allontana indefinitamente da quest'ultimo. \_\_\_\_\_  $\diamond$

## 2.3 Peculiarità dei Sistemi Nonlineari

Nei sistemi nonlineari i fenomeni sono più complessi che nei sistemi lineari:

- Non tutti gli equilibri hanno le stesse caratteristiche di stabilità per un sistema. Ad esempio, l'equilibrio inferiore di un pendolo è stabile, quello superiore è instabile. Per condizioni iniziali abbastanza prossime all'equilibrio inferiore, se vi è attrito, l'equilibrio inferiore è anche attrattivo, quindi asintoticamente stabile, ma non globalmente: esistono condizioni iniziali (quale appunto l'equilibrio superiore) a partire dalle quali le traiettorie non convergono.

- Non necessariamente gli equilibri attrattivi sono stabili. Un esempio di equilibrio attrattivo ma non stabile in TD è offerto dal sistema

$$x(t+1) = \begin{cases} 2x(t) & \text{se } \|x\| \leq 1 \\ 0 & \text{se } \|x\| > 1 \end{cases}$$

Un esempio analogo in TC è dato dal sistema (di Vinograd)  $\dot{x} = f(x)$ , con

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x_1^2(x_2-x_1)+x_2^5}{(x_1^2+x_2^2)[1+(x_1^2+x_2^2)^2]} \\ \frac{x_2^2(x_2-2x_1)}{(x_1^2+x_2^2)[1+(x_1^2+x_2^2)^2]} \end{cases}$$

per  $x \neq 0$ , e  $f(0) = 0$ , ha unico equilibrio nell'origine. I movimenti di questo sistema a partire da punti vicini all'origine sono descritti in fig. 2.4

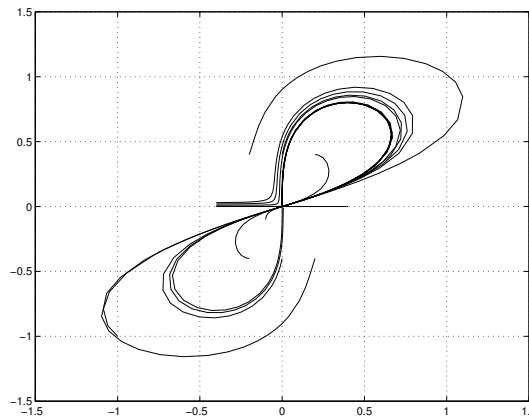


Figura 2.4: Traiettorie di un sistema di Vinograd, con equilibrio nell'origine instabile ma attrattivo.

- La convergenza ad un equilibrio asintoticamente stabile può essere meno che esponenziale, ovvero più lenta di quella di qualsiasi sistema lineare. Ad esempio, il sistema  $\dot{x} = -x^3$ , con  $x(0) = x_0$ , ha soluzione  $x(t) = \frac{x_0}{\sqrt{1+2x_0^2 t}}$ . Converge quindi all'equilibrio per  $t \rightarrow \infty$ , come  $t^{-1/2}$ , cioè molto lentamente, e più lentamente di qualsiasi sistema lineare convergente. Infatti, la convergenza di qualsiasi sistema lineare asintoticamente stabile  $\dot{\xi} = -a\xi$  ( $a > 0$ ) è un esponenziale  $\xi(t) = \xi_0 e^{-at}$ , ma per qualsiasi  $a > 0$  e qualsiasi condizione iniziale  $\xi_0 > 0$ , esiste un  $\bar{t}$  tale



per cui,  $\forall t > \bar{t}$ , si ha

$$x_0 \frac{1}{\sqrt{1 + 2x_0^2 t}} > \xi_0 e^{-at}, \text{ ovvero } t > c + \frac{1}{2} \log(1 + 2x_0^2 t),$$

con  $c = \frac{1}{a}(\log \xi_0 - \log x_0)$ .

- Possono esistere moti che divergono da un equilibrio instabile senza allontanarsene indefinitamente, ma rimanendo a distanza limitata. Ad esempio, il sistema detto “oscillatore di Van der Pol”, descritto dall’equazione differenziale  $\ddot{x} = -(x^2 - 1)\dot{x} - x$ , ovvero, in forma di stato, da

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + (1 - x_1^2)x_2 \end{aligned} \quad (2.2)$$

ha un equilibrio nell’origine. Ogni traiettoria che inizia fuori dall’origine però converge asintoticamente ad una orbita chiusa che costituisce un *ciclo limite* dell’oscillatore (fig. 2.5).

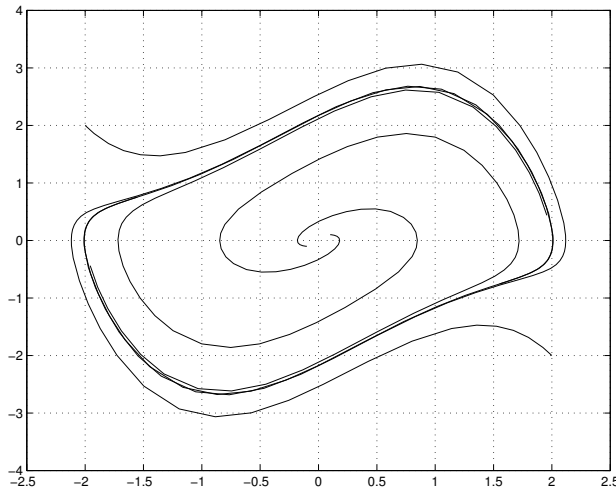


Figura 2.5: Traiettorie di un oscillatore di Van der Pol che divergono dall’origine e vengono attratte da un ciclo limite.

È quindi necessario, per studiare sistemi nonlineari, disporre di definizioni più articolate di stabilità:

- Il sottoinsieme dello spazio di stato formato dalle condizioni iniziali le cui corrispondenti traiettorie convergono ad un dato equilibrio, è detto

*bacino di attrazione.* Se l'equilibrio è asintoticamente stabile, si dice anche *regione di asintotica stabilità* (RAS);

- Un equilibrio si dice *globalmente asintoticamente stabile* (GAS) se la sua RAS coincide con tutto lo spazio di stato;
- L'origine si dice *esponenzialmente stabile* per un sistema se, per  $\delta$  sufficientemente piccoli, esistono due reali positivi  $\alpha, \lambda$  tali per cui  $\forall x(0) : \|x(0)\| < \delta, \|x(x(0), t)\| \leq \alpha e^{-\lambda t}, \forall t > 0$ . Il numero  $\lambda$  si dice velocità di convergenza esponenziale.<sup>2</sup>

## 2.4 Teoremi di Lyapunov

I più importanti strumenti di cui disponiamo per lo studio della stabilità dei sistemi nonlineari sono i teoremi di Lyapunov:

### 2.4.1 Metodo indiretto di Lyapunov

Si consideri la approssimazione lineare  $\mathbb{D}x = Ax$  del sistema nonlineare stazionario  $\mathbb{D}x = f(x)$  con equilibrio nell'origine. Valgono le seguenti affermazioni:

1. Se  $\mathbb{D}x = Ax$  è asintoticamente stabile, l'origine è (localmente) asintoticamente stabile anche per il sistema originale  $\mathbb{D}x = f(x)$ ;
2. Se  $\mathbb{D}x = Ax$  ha almeno un modo esponenzialmente divergente, l'origine è instabile anche per  $\mathbb{D}x = f(x)$ ;

Si osservi che, sulla base di queste due proposizioni, nulla si può dire sulla stabilità della origine per  $\mathbb{D}x = f(x)$  se  $\mathbb{D}x = Ax$  non ha modi esponenzialmente divergenti, ma ne possiede almeno uno non convergente.

Si osservi che il caso 2) occorre per sistemi TC se  $A$  ha almeno un autovalore a parte reale strettamente positiva, e per sistemi TD se  $A$  ha almeno un autovalore con modulo strettamente maggiore di uno.

La inconcludenza del teorema si verifica nei sistemi TC se il linearizzato ha tutti autovalori a parte reale non positiva e almeno un autovalore a parte reale nulla; per sistemi TD se il linearizzato ha tutti autovalori a modulo non maggiore di uno, con almeno un autovalore a modulo unitario.

---

<sup>2</sup>La norma usata è tipicamente la norma Euclidea, o norma 2 ( $\|x\|_2 = \sqrt{x^T x}$ ). Peraltro, poichè per qualsiasi norma  $\|\cdot\|_i$  e  $\|\cdot\|_j$ , si può dimostrare che esistono  $\alpha_1 > 0$  e  $\alpha_2 > 0$  tali che  $\alpha_1 \|x\|_i \leq \|x\|_j \leq \alpha_2 \|x\|_i$ , la velocità di convergenza  $\lambda$  è la stessa qualsiasi norma si consideri.

Il metodo indiretto, il cui contenuto è abbastanza intuitivo, necessita per la dimostrazione del successivo teorema. È stato presentato prima in quanto metodo di rapida applicazione, anche se di minor potenza, del successivo.

### 2.4.2 Metodo diretto di Lyapunov

Il metodo diretto di Lyapunov può essere visto come una importante generalizzazione dei criteri di stabilità per sistemi meccanici basati sullo studio della energia del sistema. Qualitativamente, una funzione di energia generalizzata è una funzione scalare dello stato, che è sempre positiva eccetto che nella configurazione di quiete (equilibrio) del sistema, dove ha un minimo. È opportuno introdurre alcune definizioni. Una funzione  $V(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  si dice

- positiva definita (p.d., ovvero  $V(x) \succ 0$ ) se  $V(0) = 0$  e se esiste un intorno  $B_r$  dell'origine per cui vale  $\forall x \in B_r \setminus 0, V(x) > 0$ ;
- positiva semi-definita (p.s.d.,  $V(x) \succeq 0$ ) se  $\exists B_r$  tale che  $V(x) \geq 0, \forall x \in B_r$ ;
- negativa definita ( $V(x) \prec 0$ ) o semi-definita ( $V(x) \preceq 0$ ) rispettivamente se  $-V(x)$  è p.d. o p.s.d.;
- *globalmente* positiva definita se  $V(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus 0$ , positiva semi-definita se  $V(x) \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus 0$ ; etc..

È spesso utile considerare le *superfici di livello* di queste funzioni, ovvero gli insiemi  $\bar{\Omega}_\ell = \{x \in \mathbb{R}^n | V(x) = \ell\}$ . È possibile dimostrare che, se  $V(x)$  è p.d., allora, almeno per valori sufficientemente piccoli del livello  $\ell$ , le superfici di livello sono chiuse e limitate.

**Esempio:** Per  $x \in \mathbb{R}^2$ ,  $V = x_1^2 + x_2^2$  è globalmente p.d.;  $V = x_1^2 + x_2^2 - x_1^3$  è localmente p.d.;  $V = x_1^2 + \sin^2(x_2)$  è p.d. localmente, p.s.d. globalmente;  $V = x_1^2 + \sin^2(x_1)$  è globalmente p.s.d.;  $V(x) = x_1^2 - x_2^2$  si dice non-definita.  
◇

Tipiche funzioni che verranno spesso usate nel metodo di Lyapunov sono le forme quadratiche  $V = x^T P x$ , con  $P$  matrice  $n \times n$ .

Nella forma quadratica  $V = x^T P x$ , la parte antisimmetrica di  $P$  è irrilevante:  $V = x^T P x = x^T \left( \frac{(P+P^T)}{2} + \frac{(P-P^T)}{2} \right) x = x^T \left( \frac{(P+P^T)}{2} \right) x$ . Possiamo quindi assumere che  $P$  sia simmetrica.

Ricordiamo che  $V$  è p.d. (p.s.d.), cioè  $x^T P x > 0, \forall x \neq 0$  ( $x^T P x \geq 0$ ) se la matrice  $P$  è p.d. (rispettivamente p.s.d.).

Ricordiamo due criteri per stabilire se una matrice è p.d. (p.s.d.):

- gli autovalori di  $P$  sono tutti positivi (non negativi);
- $\det(P(1 : i, 1 : i)) > 0, i = 1, \dots, n$  ( $\det(P_i) \geq 0, P_i$  sottomatrici principali);

Se  $P$  è p.d. (p.s.d), allora

- l'angolo formato tra  $x$  e  $Px$  è strettamente minore di  $\pi/2, \forall x$  (minore o uguale se p.s.d.);
- $\exists R, \det(R) \neq 0 : P = R^T R$  ( $\exists R : P = R^T R, \det(R) = 0$ ).

L'ultima condizione ci dice che una forma quadratica può essere vista come il quadrato di una norma euclidea di un vettore in opportune coordinate:  $x^T P x = x^T R^T R x = y^T y = \|y\|^2, y = R x$ . La scelta di  $R$  non è unica; una particolare determinazione è  $R = \sqrt{P} = \sqrt{Q \Lambda Q^{-1}} = Q \sqrt{\Lambda} Q^T$ , che è simmetrica e p.d. (p.s.d., risp.).

### 2.4.3 Teoremi del Metodo Diretto di Lyapunov

**Sistemi a tempo continuo.** Sia  $x = 0$  un punto di equilibrio per il sistema tempo-invariante  $\dot{x} = f(x)$ . Si consideri una funzione  $V(x) \in C^1$  positiva definita, e si consideri la sua derivata direzionale lungo il campo  $f(x)$ , cioè  $L_f V(x) = \frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x)$ . Se  $L_f V(x)$  è negativa semi-definita, l'origine è stabile; se è negativa definita, l'origine è asintoticamente stabile; se è positiva definita, l'origine è instabile.

**Sistemi a tempo discreto.** Sia  $x = 0$  un punto di equilibrio per il sistema tempo invariante  $x(t+1) = f(x(t))$ . Si consideri una funzione  $V(x) \in C$  positiva definita, e si consideri la sua differenza direzionale lungo il campo  $f(x)$ , cioè  $\Delta_f V(x) = V(f(x)) - V(x)$ . Se  $\Delta_f V(x)$  è negativa semi-definita, l'origine è stabile; se è negativa definita, l'origine è asintoticamente stabile; se è positiva definita, l'origine è instabile.

#### Dimostrazione del metodo diretto di Lyapunov T.C.:

**Stabilità:** Si consideri un intorno sferico  $B_\epsilon$  dell'origine, tutto contenuto in una regione  $S$  in cui  $L_f V \leq 0$ : poiché  $V$  è continua e p.d., esiste  $M = \min_{x \in \partial(B_\epsilon)} V(x)$ , ed esisterà un  $B_\delta : V(x) < M, \forall x \in B_\delta$ . Supponiamo per assurdo che una traiettoria del sistema  $x(x_0, t)$

che parta da  $x_0 \in B_\delta$  al tempo 0, esca da  $B_\epsilon$  per  $\bar{t} > 0$ : sarebbe  $V(x(x_0, \bar{t})) > M > V(x_0)$ . D'altronde, se si considera la funzione  $V(x(t, x_0))$  come funzione del tempo, si ha che la sua derivata totale vale  $\dot{V} = \frac{d}{dt}V = \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial x(x_0, t)}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial x} f(x) = L_f V$ , quindi dalla ipotesi che  $L_f V(x)$  sia negativa semi-definita discende che  $V$  è monotona non crescente nel tempo, il che dimostra l'assurdo.

**Asintotica stabilità:** si consideri ancora un intorno  $B_\delta$  che garantisce che la traiettoria non esca mai da  $B_\epsilon$ . Poichè  $V$  è limitata inferiormente e strettamente decrescente nel tempo ( $\dot{V} = L_f V$  n.d.), essa deve tendere ad un limite  $\lim_{t \rightarrow \infty} V(x(t)) = W \geq 0$ . Dobbiamo escludere il caso  $W > 0$ : se così fosse, infatti, le traiettorie iniziate in  $B_\delta$  al tempo 0 non potrebbero mai entrare in un intorno  $B_W : \max_{x \in B_W} V(x) < W$ . Ma, poichè anche  $\dot{V}$  è continua e n.d., deve avere un massimo (negativo)  $-w < 0$  sull'insieme  $B_\epsilon \setminus B_W$ , quindi  $V$  decresce almeno con velocità  $|w|$ . Una traiettoria del sistema, in  $x_0 \in B_\delta$  al tempo 0, dopo al più un tempo  $t = (V(x_0) - W)/w$ , porterebbe a  $V(t > \Delta t) < W$ , che dimostra l'assurdo.

**Instabilità:** Dato  $\epsilon > 0$ , si supponga per assurdo che esista un  $\delta$  quale richiesto nella definizione di stabilità. Sia  $V_\epsilon = \min_{x \in \partial B_\epsilon} V(x)$ . Si consideri inoltre  $0 < \epsilon' < \delta$  e gli intorni sferici  $B_\epsilon$  e  $B_{\epsilon'}$ . Sia  $\min_{x \in B_\epsilon \setminus B_{\epsilon'}} L_f V(x) = m > 0$ . Una evoluzione dello stato che inizi in  $B_\epsilon \setminus B_{\epsilon'}$  uscirà certamente da  $B_\epsilon$  in un tempo non superiore a  $t = V_\epsilon/m$ , dimostrando l'assurdo.

Una funzione  $V(x)$  p.d. tale che  $L_f V(x)$  ovvero  $\Delta_f V(x)$  è n.s.d. (compreso il caso n.d.), si dice una *funzione di Lyapunov* per il sistema  $\dot{x} = f(x)$  nell'equilibrio considerato.

**Esempio:** Per il sistema monodimensionale  $\dot{x} = -x^3$ , l'origine è unico equilibrio. Il metodo approssimato non fornisce indicazioni in questo caso: infatti, l'unico autovalore del linearizzato è zero. Si consideri una candidata di Lyapunov  $V(x) = x^2$ . Si ha  $L_f V(x) = 2x(-x^3) = -x^4$ , che è n.d.. La funzione  $V(x)$  è quindi una funzione di Lyapunov, e si può concludere per la stabilità asintotica dell'equilibrio.

Più in generale, per sistemi del primo ordine  $\dot{x} = -c(x)$ , con  $c(x)$  una qualsiasi funzione con grafico strettamente nel primo e terzo quadrante ( $xc(x) > 0, \forall x \neq 0$ ), una candidata  $V(x) = x^2$  mostra la asintotica stabilità dell'origine.

Si consideri adesso  $\dot{x} = x^3$ . Si osservi che il linearizzato coincide con quello del sistema precedente. Si consideri la stessa candidata  $V(x) = x^2$ . Si ha  $L_f V(x) = 2x(-x^3) = -2x^4$ , che è p.d.. Si può quindi concludere per la instabilità dell'equilibrio. \_\_\_\_\_  $\diamond$

**Esempio:** Sia dato il sistema lineare t.d.  $x(t+1) = ax(t)$ , e studiamolo con il metodo diretto mediante la candidata  $V(x) = x^2$ . Si ha  $\Delta V = a^2 x^2 - x^2 = x^2(a^2 - 1)$ . Si ottiene quindi che per  $|a| = 1$  l'equilibrio nell'origine è stabile, per  $|a| < 1$  è asintoticamente stabile, per  $|a| > 1$  è instabile. \_\_\_\_\_  $\diamond$

**Esempio:** Sia dato il sistema t.d.  $x(t+1) = ax^3(t)$ , e la candidata  $V(x) = x^2$ . Si ha  $\Delta V = a^2 x^6 - x^2 = x^2(a^2 x^4 - 1)$ . Si ottiene quindi che, per  $x$  sufficientemente piccoli ( $x^2 < 1/|a|$ ),  $\Delta V < 0$ , quindi  $\Delta V$  è n.d. ed il sistema è asintoticamente stabile, qualsiasi sia  $a$ . \_\_\_\_\_  $\diamond$

#### 2.4.4 Estensione al caso di Globale Asintotica Stabilità

Se le ipotesi del metodo diretto di Lyapunov nel caso di asintotica stabilità di un equilibrio valgono su tutto lo spazio di stato, ovvero se esiste una funzione  $V(x)$  globalmente positiva definita la cui derivata  $\dot{V} = L_f V(x)$  è globalmente negativa definita, si può essere indotti a pensare che l'equilibrio sia globalmente attrattivo oltre che asintoticamente stabile.

In effetti per poter giungere a questa conclusione è necessario aggiungere una ipotesi che garantisca che le superfici di livello di  $V(x)$  siano chiuse per qualsiasi valore del livello. In effetti, se questa ipotesi non è verificata, la GAS non è assicurata, come mostrato in questo esempio.

**Esempio:** Il sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 2x_2 - 6\frac{x_1}{(1+x_1^2)^2} \\ \dot{x}_2 &= -2\frac{x_1+x_2}{(1+x_1^2)^2}, \end{aligned} \tag{2.3}$$

ha una funzione di Lyapunov  $V(x) = \frac{x_1^2}{1+x_1^2} + x_2^2$  (fig. 2.6) con  $V(x) \succ 0$  e  $L_f V(x) \prec 0$  ovunque, ma non converge da tutte le condizioni iniziali. Le curve di livello di  $V(x)$  non sono infatti chiuse. \_\_\_\_\_  $\diamond$

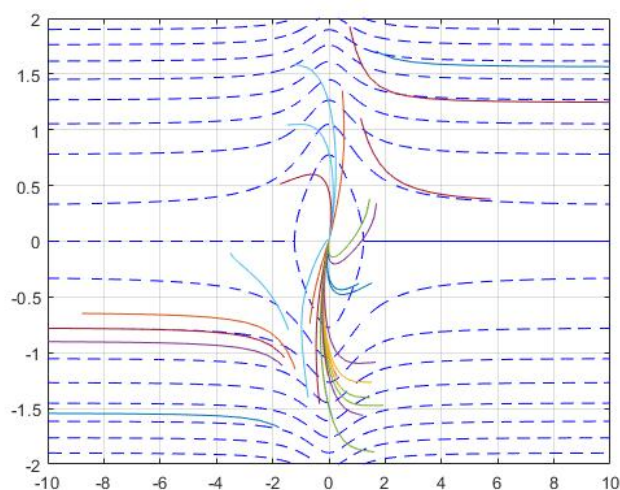


Figura 2.6: Andamento delle traiettorie perturbate nell'origine per il sistema (2.3), asintoticamente stabile non globalmente. Le curve di livello di  $V(x) \succ 0$ , non radialmente illimitata, non sono chiuse.

Per garantire che tutte le superfici di livello di  $V(x)$  siano chiuse, è sufficiente dimostrare che  $V(x)$  è radialmente illimitata, ovvero che

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} V(x) = \infty.$$

La dimostrazione della G.A.S. nelle ipotesi dette è una diretta riapplicazione del metodo diretto; la condizione di chiusura delle superfici di livello è necessaria per evitare che traiettorie con  $V$  strettamente decrescente possano divergere.

**Esercizio:** Si dimostri che l'origine è equilibrio G.A.S per il sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{aligned}$$

## 2.5 Teorema dell'Insieme Invariante Massimo

Il metodo diretto di Lyapunov non permette di concludere sulla attrattività dell'equilibrio nel caso  $L_f V$  sia solo semidefinita negativa. Inoltre, non

permette di studiare il comportamento dei sistemi attorno alle loro orbite, poiché questo non è sempre riconducibile allo studio nell'origine. In questi casi è assai utile il teorema dell'*insieme invariante massimo*.

Un insieme  $M$  è positivamente invariante per un sistema dinamico se tutte le traiettorie del sistema che intersecano  $M$  ad un tempo  $T$  sono interamente contenute in  $M$  per ogni  $t \geq T$ . Ad esempio, gli equilibri sono insiemi invarianti, così come ogni orbita del sistema è (per definizione) un insieme invariante. I cicli limite, ovvero le orbite chiuse isolate di un sistema, sono anch'essi insiemi invarianti di particolare interesse. Ogni unione di insiemi invarianti è un insieme invariante. Ogni insieme invariante è una unione di orbite. Anche una regione contenuta all'interno di una superficie di livello chiusa di una funzione di Lyapunov per un sistema dato, dove valga  $\dot{V} \leq 0$ , è un insieme invariante (come consegue direttamente dalla dimostrazione del teorema di Lyapunov).

**Teorema dell'Insieme Invariante Massimo.**

Sia  $V(x)$  una funzione limitata inferiormente. Sia  $S$  un sottoinsieme dello spazio di stato contenente l'origine nel quale vale  $L_f V(x) \leq 0, \forall x \in S$ . Si supponga che, per qualche  $l$ , le superfici di livello  $V(x) = l$  siano chiuse e delimitino l'insieme  $\Omega_l = \{x | V(x) < l\}$ , e sia  $\Omega_l \subseteq S$ .

Sia  $R = \{x \in \Omega_l | L_f V(x) = 0\}$  e  $M$  il massimo (nel senso insiemistico) insieme invariante contenuto in  $R$ . Allora, ogni traiettoria  $x(x_0, t)$  con  $x_0 \in \Omega_l$  converge all'insieme  $M$  (cioè,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \inf_{m(t) \in M} \|x(x_0, t) - m\| = 0$ ).

**Dimostrazione (cenno).**  $V(x(t))$  è non crescente, limitata inferiormente: quindi possiede un limite per  $t \rightarrow \infty$ . Inoltre  $L_f V(x(t))$  è uniformemente continua rispetto a  $t$  e di conseguenza (per il lemma di Barbalat)  $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{V}(x(t)) = 0$ . Poiché  $\Omega_l$  è limitato, la traiettoria non può che tendere a  $M$ .

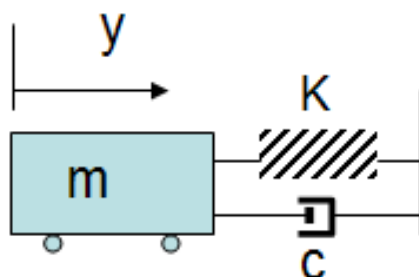
**Corollario:** se per una funzione di Lyapunov  $V(x)$  p.d. con  $L_f V(x)$  n.s.d. l'unica orbita del sistema contenuta in  $R$  è un equilibrio, allora questo è stabile asintoticamente.

Il teorema dell'Insieme Invariante Massimo è noto anche come teorema di **LaSalle**, che lo ha formulato in questa forma; oppure come teorema di **Barbashin-Krasovskii**, che ne avevano dimostrato in precedenza il corollario.

La caratterizzazione degli insiemi invarianti per un sistema è in generale difficile. Spesso però la restrizione allo studio degli insiemi invarianti contenuti in  $R$  permette una facile e completa analisi: basta infatti utilizzare le relazioni che definiscono  $R$  stessa (cioè  $L_f V(x) \equiv 0, \forall x \in R$ ) e applicarle alla dinamica del sistema  $\dot{x} = f(x)$ .



**Esempio:** Si consideri il sistema di figura, in cui lo smorzatore e la molla siano elementi nonlineari, rispettivamente con caratteristica  $f_s = cy^3$  e  $f_m = ky^3$ . Si studi la stabilità del sistema al variare dei parametri  $c \geq 0$  e  $k \geq 0$ .



Scelto come vettore di stato  $x = (y, \dot{y}) = (x_1, x_2)$ , si ottiene la dinamica:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{k}{m}x_1^3 - \frac{c}{m}x_2^3 \end{cases}$$

Per  $k \neq 0$ ,  $c \neq 0$ , l'unico punto di equilibrio risulta l'origine  $\bar{x} = (0, 0)$ . Il linearizzato del sistema è il seguente:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{3k}{m}x_1^2 & -\frac{3c}{m}x_2^2 \end{pmatrix}$$

che, calcolato nell'origine, vale

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Avendo il linearizzato autovalori nulli, non ci permette di dedurre alcunché riguardo alla stabilità del sistema. Introduciamo allora una candidata di Lyapunov definita come l'energia meccanica del sistema, che è data dalla somma della energia cinetica  $T = \frac{1}{2}m\dot{y}^2$  e della energia potenziale elastica  $U = \int_0^y kw^3 dw = \frac{k}{4}y^4$ . Posto  $V = U + T = \frac{k}{4}x_1^4 + \frac{1}{2}mx_2^2$ , si ottiene

$$\dot{V} = -cx_2^4,$$

quindi il sistema, per  $k > 0$  e  $c > 0$ , è stabile. Per concludere sulla asintotica stabilità è necessario studiare ulteriormente il sistema col criterio dell'I.I.M.: le traiettorie che rimangono nel luogo in cui si verifica  $\dot{V} \equiv 0$  hanno  $x_2 \equiv 0$ , quindi anche  $\dot{x}_2 = 0$ , e ciò, per la seconda equazione dinamica del sistema, è possibile solo dove  $x_1 = 0$ . Quindi, essendo il massimo insieme invariante

interno al luogo in cui  $\dot{V} = 0$  costituito dalla sola origine, l'equilibrio nell'origine è asintoticamente stabile. Essendo poi  $V(x)$  illimitata radialmente, possiamo concludere anche sulla globale asintotica stabilità.

Nel caso  $k \neq 0$ ,  $c = 0$ , la  $\dot{V}$  è identicamente nulla al variare di  $x_1$  e  $x_2$ , quindi non si può concludere per la asintotica stabilità. In effetti in tal caso il sistema è marginalmente stabile, essendo le traiettorie confinate a curve di livello della  $V$ : se il sistema è inizializzato in una condizione tale da avere  $V(x(0)) = V_0$ , essendo  $\dot{V} \equiv 0$  sarà  $V(x(t)) \equiv V_0$ .

Nel caso  $k = 0$ ,  $c \neq 0$ , la funzione  $V$  sopra considerata non è positiva definita, né ha curve di livello chiuse, quindi non è a rigore una candidata di Lyapunov. Si può però osservare in questo caso che il sistema è di fatto disaccoppiato, essendo la dinamica di  $x_2$  indipendente da  $x_1$ :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{c}{m}x_2^3 \end{cases}$$

Per il sistema  $\dot{x}_2 = -\frac{c}{m}x_2^3$ , la candidata  $V = \frac{m}{2}x_2^2$  è p.d., e  $\dot{V} = -cx_2^4$  è n.d., quindi  $x_2$  converge globalmente asintoticamente a zero. Naturalmente, altrettanto non si può dire per  $x_1$ , del quale sappiamo solo che tenderà ad un valore costante tanto più piccolo quanto minori sono le condizioni iniziali in  $x_1$  e  $x_2$ . Tutti gli stati con  $x_2 = 0$ ,  $\forall x_1$  sono dunque tutti equilibri marginalmente stabili.

Infine, nel caso  $k = 0$ ,  $c = 0$ , il sistema è lineare, ed è instabile avendo due autovalori nulli con molteplicità geometrica uno (il sistema è ridotto ad una massa libera di muoversi sulla retta, per la quale una condizione iniziale arbitrariamente piccola sulla velocità  $\dot{y} = x_2$  porta a divergenza della posizione  $y = x_1$ ). Vale la pena osservare che, se il teorema di Lyapunov venisse applicato scorrettamente in questo caso ( $k = c = 0$ ), cioè trascurando la necessaria ipotesi che  $V$  sia definita positiva, si potrebbe giungere (essendo  $\dot{V} = 0$ ) a concludere falsamente per la stabilità del sistema. \_\_\_\_\_  $\diamond$

### 2.5.1 Insieme Invariante Massimo e Regione di Asintotica Stabilità

Supponiamo che  $V(x)$  sia una funzione di Lyapunov per il sistema  $\dot{x} = f(x)$  con origine asintoticamente stabile. Dato uno stato iniziale  $\bar{x}$ , come possiamo sapere se la traiettoria a partire da  $\bar{x}$  convergerà all'origine?

Ovviamente, la condizione  $L_f V(\bar{x}) < 0$  non è sufficiente: la traiettoria  $x(\bar{x}, t)$  è infatti costretta a portarsi verso livelli inferiori di  $V$  sino a che rimane in  $S$ , ma potrebbe poi uscirne e quindi allontanarsi (vedi fig. 2.7). Una

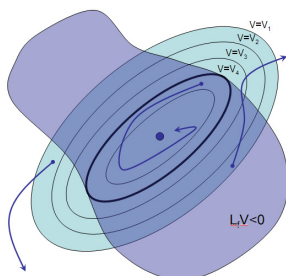


Figura 2.7: Applicazione del Teorema dell'Insieme Invariante Massimo alla determinazione di un sottoinsieme della RAS

condizione sufficiente è la seguente:

**Teorema** Sia l'origine un punto di equilibrio A.S. per il sistema  $\dot{x} = f(x)$ , e sia  $V(x)$  una funzione di Lyapunov. Se nella regione limitata  $\Omega_\ell$  delimitata da una curva di livello  $V(x) = \ell$  vale  $L_f V(x) < 0$  ovunque eccetto nell'origine, allora  $\Omega_\ell$  è compresa nella R.A.S. dell'origine.

È quindi possibile ottenere un sottoinsieme della RAS di un equilibrio cercando la più ampia curva  $V(x) = \ell > 0$  contenuta nella regione  $S$  in cui  $L_f V(x) < 0$ .

Lo stesso risultato si estende facilmente anche per equilibri la cui asintotica stabilità sia dimostrata con il corollario di Krasovskii (cioè con  $L_f V(x)$  n.s.d.), e in generale per insiemi invarianti dimostrati attrattivi dal teorema di Lassalle.

Il metodo può essere usato più volte con diverse funzioni  $V(x)$ , per raffinare successivamente le stime: l'unione di insiemi contenuti nella RAS è infatti ovviamente ancora contenuta nella RAS.

**Esempio:**

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1(x_1^2 + x_2^2 - 1) - x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 + x_2(x_1^2 + x_2^2 - 1)\end{aligned}$$

Il metodo indiretto indica già la asintotica stabilità dell'origine. Il metodo diretto, con la funzione di Lyapunov  $V(x) = x^T x$ , offre lo stesso risultato. Il teorema dell'I.I.M. con la stessa candidata permette di affermare che la regione  $x_1^2 + x_2^2 < 1$  è compresa nella R.A.S. Infatti  $L_f V(x) \leq 0$  in  $\Omega_l$  per  $l = 1$ , e  $R = \{0\}$ . L'origine è un equilibrio, e quindi l'I.I.M. in  $R$  è l'origine stessa. Tutte le traiettorie che partono da dentro il cerchio unitario convergono all'origine, quindi il cerchio unitario aperto è contenuto nella R.A.S.. In effetti, è facile vedere che la R.A.S. coincide proprio col cerchio unitario aperto. La circonferenza unitaria infatti è un ciclo limite per questo sistema.

Questo si può vedere facilmente: detto  $C(x) = x_1^2 + x_2^2 - 1$ , si osserva che  $\dot{C} = 2(x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2)C(x)$ , quindi se le condizioni iniziali soddisfano  $C(x) = 0$ , tutta l'evoluzione continuerà a soddisfare la stessa equazione. Questo ciclo limite è instabile: una pur piccola perturbazione delle condizioni iniziali dal ciclo limite porta la traiettoria a convergere all'origine (se la condizioni iniziale è interna al cerchio) o a divergere (se esterna). \_\_\_\_\_  $\diamond$

**Esempio:** Si consideri l'equazione di un pendolo

$$mR^2\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + mgR \sin \theta = 0,$$

ovvero, in forma di stato,

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{b}{mR^2}x_2 - \frac{g}{R} \sin x_1. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Gli equilibri sono in  $x_2 = 0$ ,  $\sin(x_1) = 0$ .

Il metodo di linearizzazione porta immediatamente a concludere che l'equilibrio in  $(0, 0)$  è A.S. se  $b > 0$ , instabile se  $b < 0$ , mentre non si può concludere nulla nel caso  $b = 0$ . L'equilibrio in  $(\pi, 0)$  è invece sempre instabile.

Per applicare il metodo diretto, si consideri come candidata di Lyapunov la somma della energia potenziale e della energia cinetica del pendolo,

$$V(x) = mgR(1 - \cos x_1) + mR^2 \frac{x_2^2}{2}.$$

Si ha

$$L_f V(x) = mgRx_2 \sin x_1 + mR^2 x_2 \left( -\frac{b}{mR^2} x_2 - \frac{g}{R} \sin x_1 \right) = -bx_2^2$$

Per  $b \geq 0$  si ha  $L_f V(x)$  n.s.d., quindi in base al metodo diretto si può concludere per la stabilità (ma non per la convergenza).

Possiamo però adesso applicare il teorema di Krasovskii con la stessa candidata. Si osservi infatti che le curve di livello definite da  $V(x) = \ell$  sono chiuse quando  $\ell \leq 2mgR$  (si trovino le intercette della curva di livello con l'asse  $x_1$ ). Fissato  $\ell$ , per  $b > 0$  si ha poi

$$L_f V \equiv 0 \Rightarrow x_2 \equiv 0 \Rightarrow \dot{x}_2 \equiv 0$$

Avendo così caratterizzato l'insieme  $R$ , dobbiamo trovare quale sia l'insieme invariante massimo al suo interno. Questo significa imporre l'appartenenza a

$R$  delle soluzioni della dinamica (2.4). Sostituendo quindi in (2.4) le relazioni  $x_2 = 0$ ,  $\dot{x}_2 = 0$ , si ottiene facilmente la ulteriore relazione

$$\sin(x_1) \equiv 0$$

che deve essere soddisfatta da ogni punto di un insieme invariante in  $R$ . Si ha quindi  $M = \{x | x_2 = 0, x_1 = k\pi, k \in \mathbb{N}\} \cap \Omega_\ell$ . Per  $\ell = 2mgR$ ,  $M$  comprende la sola origine (infatti i punti di equilibrio in  $x_1 = \pm\pi$  sono sul bordo di  $\Omega_\ell$ , e non vi appartengono). La origine è quindi equilibrio asintoticamente stabile per  $b > 0$ , con bacino di attrazione l'intera regione  $\Omega_\ell$ . Ovviamente, per  $b = 0$  si ha solo stabilità, in quanto in questo caso si ha  $R = \Omega_\ell$ , ed  $M$  è formato da tutte le traiettorie periodiche contenute in  $R$  del sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{g}{R} \sin x_1 \end{aligned}$$

---

◇

Il teorema dell'I.I.M. può essere usato per determinare anche la attrattività dei cicli limite. Nella formulazione del teorema dell'insieme invariante, l'ipotesi che  $V(x)$  sia p.d. è sostituita dalla sola richiesta che  $\Omega_l$  sia limitato. Si possono quindi usare anche  $V(x)$  non p.d., ad esempio per la stabilità dei cicli limite.

### Esempio: Ciclo limite attrattivo

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 - x_1(x_1^4 + 2x_2^2 - 10) \\ \dot{x}_2 &= -x_1^3 - 3x_2^5(x_1^4 + 2x_2^2 - 10) \end{aligned}$$

L'insieme descritto da  $C(x) = x_1^4 + 2x_2^2 - 10 = 0$  è invariante per questo sistema: infatti

$$L_f C(x) = -(4x_1^4 + 12x_2^6)(x_1^4 + 2x_2^2 - 10)$$

si annulla sull'insieme. Il sistema, inizializzato su  $C(x) = 0$ , vi rimane, muovendosi in senso orario ( $\dot{x}_1 = x_2$ ,  $\dot{x}_2 = -x_1^3$ ). Si consideri  $V(x) = C^2(x)$  (che soddisfa le ipotesi dell'I.I.M. ma non è p.d. propriamente):  $L_f V = 2C(x)L_f C(x) \leq 0$ ,  $\forall x$ , e  $R$  è formato dal ciclo limite più l'origine, che sono entrambe insiemi invarianti. L'origine è però instabile: ogni traiettoria che inizi nell'insieme  $V(x) < 100$  (che contiene ogni punto interno al ciclo limite, ma esclude l'origine, ed è limitato) converge al ciclo limite. \_\_\_\_\_ ◇

## 2.6 Teoremi inversi e di instabilità

Il criterio diretto di Lyapunov è solo sufficiente: se non conosco una funzione di Lyapunov, non posso concludere nulla. Esiste peraltro una serie di teoremi inversi, di importanza soprattutto teorica, tra i quali i seguenti

- Se l'origine è un equilibrio stabile per il sistema  $\dot{x} = f(x)$ , allora esiste una funzione di Lyapunov  $V(x)$ ;
- Se l'origine è un equilibrio asintoticamente stabile per il sistema  $\dot{x} = f(x)$ , allora esiste una funzione di Lyapunov  $V(x)$  con  $L_f V(x)$  (o  $\Delta V(x)$  in T.D.) negativa definita;
- Se l'origine è un equilibrio esponenzialmente stabile per il sistema  $\dot{x} = f(x)$ , allora esiste una funzione di Lyapunov quadratica  $V(x) = x^T P x$ ;
- (corollario del precedente) l'origine è un equilibrio esponenzialmente stabile per il sistema  $\dot{x} = f(x)$  se e solo se il sistema linearizzato approssimato in quel punto è asintoticamente stabile.

**Esempio:** La stabilità asintotica di un pendolo con smorzamento è stata dimostrata in precedenza con una funzione di Lyapunov con derivata solo negativa semi-definita, usando il teorema di Lasalle. Dal secondo dei teoremi inversi, sappiamo che deve esistere una funzione di Lyapunov con derivata negativa definita. Infatti, per un pendolo con costanti  $\frac{g}{R} = \frac{b}{mR^2} = 1$ , la  $V(x) = \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{1}{2}(x_1 + x_2)^2 + 2(1 - \cos x_1)$  ha  $L_f V(x)$  negativa definita.  $\diamond$

In taluni casi si può dover dimostrare la instabilità di un sistema. Abbastanza ovviamente, se si dispone di una  $V$  p.d. e si verifica  $L_f V$  (o  $\Delta V(x)$  in T.D.) anch'essa p.d., si avrà instabilità. Ma vi sono risultati più precisi. Il primo teorema rinuncia alla definitezza di  $V(x)$ :

**Teorema di instabilità di Lyapunov.** Sia  $V(x) \in C^1$ ,  $V(0) = 0$ , e  $L_f V(x)$  (o  $\Delta V(x)$  in T.D.) p.d.. Se  $V(x)$  può assumere valori positivi arbitrariamente vicino all'origine, l'equilibrio nell'origine è instabile.

**Esempio:** L'origine è un equilibrio instabile per il sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2^3 \\ \dot{x}_2 &= x_1^3 \end{aligned}$$

Infatti, posto  $V = x_1 x_2$ , con  $V > 0$  nel primo quadrante, si ha  $\dot{V} = x_1^4 + x_2^4$  p.d.  $\diamond$

**Esempio:** L'origine è instabile per il sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_2^3.\end{aligned}$$

Infatti, usando  $V = x_1^3 x_2$ , si ha  $\dot{V} = x_1^2 x_2^2 (3 - x_1 x_2)$ , che è positiva per tutti i punti di un cerchio di raggio  $R < \sqrt{3}$ . ◇

Nel secondo teorema, si rinuncia anche alla definitezza di  $L_f V(x)$  (o  $\Delta V(x)$ ):

**Teorema di instabilità di Cetaev.** Sia  $V(x) \in C^1$ . Se, dato un intorno del punto di equilibrio nell'origine  $W$ , esiste un insieme aperto  $U$  tale che

- $0 \in U \cup \partial(U)$ ;
- $\forall x \in U \cap W, V(x \neq 0) > 0$  e  $L_f V(x \neq 0) > 0$  (ovvero  $\Delta V(x \neq 0) > 0$ );
- Per  $x = 0$  e  $\forall x \in \partial(U) \cap W, V(x) = 0$

allora l'equilibrio è instabile per il sistema  $\dot{x} = f(x)$ .

**Esempio:** Per il sistema  $\dot{x} = x^3$ , l'instabilità della origine può essere evidenziata anche con il teorema di Cetaev: scegliendo  $V = x$ , per la quale si ha  $\dot{V} = x^3$ , le ipotesi di Cetaev sono verificate nella regione  $U = \{x > 0\}$ . ◇

**Esempio:** Per il sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1 x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 x_2\end{aligned}$$

l'origine è instabile: infatti, scelta  $V = x_1 x_2$  le ipotesi di Cetaev sono verificate in  $U = \{x_1 > 0, x_2 > 0\}$ . ◇

## 2.7 Stabilità dei Sistemi Lineari Stazionari con Lyapunov

### 2.7.1 Sistemi Lineari Tempo-Continui

Per il sistema  $\dot{x} = Ax$ , si consideri la funzione quadratica candidata di Lyapunov  $V = x^T P x$ , e

$$\dot{V} = 2x^T P \dot{x} = 2x^T P A x = x^T (P A + A^T P) x \stackrel{def}{=} -x^T Q x.$$

dove definiamo  $-Q$  la parte simmetrica di  $2PA$ .

Il sistema sarà stabile se, per  $P$  p.d., anche  $Q$  risulterà p.s.d., e asintoticamente stabile se  $Q$  è p.d. In generale, preso  $P$  arbitrariamente,  $Q$  non risulterà definita.

Convieni procedere in questo caso in senso inverso: fissiamo  $Q$  p.d., e cerchiamo  $P$  risolvendo l'equazione

$$PA + A^T P = -Q.$$

Questa equazione matriciale, detta *equazione di Lyapunov*, è equivalente ad un sistema di  $n(n+1)/2$  equazioni lineari in  $n(n+1)/2$  incognite. Questo sistema può essere riscritto come  $Mp = q$ , dove  $p$  e  $q$  sono vettori a  $n(n+1)/2$  componenti formati ad es. giustapponendo le colonne di  $P$  e  $Q$ . Si dimostrerà che l'equazione di Lyapunov con  $Q$  p.d. ha un'unica soluzione  $P$  p.d. se e solo se tutti gli autovalori di  $A$  sono a parte reale strettamente negativa ( $s(A) \subset \text{OLHP}$ ).

In queste ipotesi la soluzione esiste: infatti se  $A$  è asintoticamente stabile, posso porre

$$P = \int_0^\infty e^{A^T t} Q e^{At} dt$$

e quindi verificare che

$$\begin{aligned} A^T P + P A &= \int_0^\infty \left( A^T e^{A^T t} Q e^{At} + e^{A^T t} Q e^{At} A \right) dt \\ &= \int_0^\infty d \left( e^{A^T t} Q e^{At} \right) = \\ &= \left[ e^{A^T t} Q e^{At} \right]_0^\infty = 0 - Q, \end{aligned}$$

dove si è usato il fatto che  $e^{A0} = I$  e che, se tutti gli autovalori di  $A$  sono a parte reale negativa,  $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{At} = 0$ .

Poichè la soluzione del problema  $Mp = q$  esiste per qualsiasi  $q$ , lo spazio nullo di  $M$  è vuoto, quindi la soluzione è unica<sup>3</sup>.

**Si noti che** se  $\dot{x} = Ax$  è marginalmente stabile, l'equazione di Lyapunov  $A^T P + P A = -Q$  non può avere soluzioni  $P$  p.d. per  $Q$  p.d.. Sappiamo comunque dal teorema inverso di Lyapunov che una funzione di Lyapunov esiste

<sup>3</sup>L'equazione di Lyapunov può essere risolta con l'aiuto del comando Matlab `P=lyap(M,Q)`. Si faccia però attenzione che questo comando risolve l'equazione  $MP + PM^T = -Q$ , quindi deve essere invocato utilizzando al posto di  $M$  la trasposta di  $A$ , ovvero `P=lyap(A',Q)`.



## 2.7. STABILITÀ DEI SISTEMI LINEARI STAZIONARI CON LYAPUNOV 41

per il sistema: si tratta quindi di cercare una soluzione con  $Q$  semidefinita positiva.

Questa soluzione non esisterà sempre, ma solo per opportune  $Q$ . Quando la soluzione  $P$  esiste, non sarà di conseguenza unica.

**Esempio:** Un esempio semplicissimo è il sistema  $\dot{x} = 0$ , ovvero  $A = 0$ . L'equazione di Lyapunov  $0P + P0 = -Q$  è risolubile solo per  $Q = 0$  (che è p.s.d). In questo caso, qualsiasi  $P$  è soluzione.

Nel caso in cui  $\dot{x} = Ax$  sia marginalmente stabile con  $m$  autovalori nell'origine, possiamo assumere senza perdere di generalità di esserci messi nelle coordinate della forma di Jordan, per cui

$$A = \left[ \begin{array}{c|c} J_0 & 0 \\ \hline 0 & J_n \end{array} \right]$$

dove  $J_n \in \mathbb{R}^{(n-m) \times (n-m)}$  è asintoticamente stabile, e  $J_0 \in \mathbb{R}^{m \times m} = 0$  (essendo  $A$  per ipotesi marginalmente stabile, l'autovalore in zero è associato a  $m$  minimiblocchi indipendenti). L'equazione di Lyapunov è quindi in questo caso

$$\left[ \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & J_n \end{array} \right]^T \left[ \begin{array}{c|c} P_0 & P_d \\ \hline P_d & P_n \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{c|c} P_0 & P_d \\ \hline P_d & P_n \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & J_n \end{array} \right] = - \left[ \begin{array}{c|c} Q_0 & Q_d \\ \hline Q_d & Q_n \end{array} \right]$$

Assumendo  $Q$  diagonale ( $Q_d = 0$ ), la soluzione è possibile solo se  $Q_0 = 0$ . In questo caso le soluzioni hanno  $P_d = 0$ ,  $P_n$  soluzione di  $J_n^T P_n + P_n^T J_n = -Q_n$ , e qualsiasi  $P_0$  p.d..

Il caso di matrice  $A$  con autovalori immaginari puri è lasciato per esercizio. ◇

### 2.7.2 Sistemi Lineari Tempo-Discreti

Per il sistema  $x(t+1) = Ax(t)$ , si consideri  $V = x^T P x$ , e

$$\begin{aligned} L_f V &= x^T(t+1) P x(t+1) - x^T(t) P x(t) \\ &= x(t)^T (A^T P A - P) x(t) \\ &\stackrel{def}{=} -x^T Q x \end{aligned}$$

L'equazione  $-Q = A^T P A - P$  è detta equaz. di Lyapunov t.d.: si procede anche in questo caso alla soluzione per  $P$  dato  $Q$ , soluzione che esiste ed è

unica se e solo se  $s(A) \subset \text{OUC}$ . La soluzione è

$$P = \sum_{k=0}^{\infty} (A^T)^k Q A^k$$

serie che esiste se i modi di  $A$  convergono, e che è p.d. perchè composta dalla somma di un primo termine ( $Q$ ) p.d., con l'altri tutti p.s.d.

infatti

$$\begin{aligned} A^T P A - P &= A^T \left( \sum_{k=0}^{\infty} (A^T)^k Q A^k \right) A - \left( \sum_{k=0}^{\infty} (A^T)^k Q A^k \right) \\ &= A^T (Q + A^T Q A + \dots) A - (Q + A^T Q A + \dots) \\ &= -Q \end{aligned}$$

L'unicità discende ancora dalla linearità dell'equazione negli elementi di  $P$ .

### 2.7.3 Dimostrazione del metodo di linearizzazione

Per il sistema  $\dot{x} = f(x) = Ax + \tilde{f}(x)$ , con  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\|\tilde{f}(x)\|}{\|x\|} = 0$ , si consideri la funzione candidata di Lyapunov  $V = x^T P x$ , con  $P$  p.d. soluzione di  $A^T P + P A = -I$ . Si ha  $L_f V = x^T P f(x) + f^T(x) P x = x^T (P(Ax + \tilde{f}(x)) + (Ax + \tilde{f}(x))^T P) x = -x^T I x + 2x^T P \tilde{f}(x)$ . Per  $\|x\|$  sufficientemente piccoli,  $\|\tilde{f}(x)\| < \frac{\|x\|}{2\|P\|}$ , quindi  $L_f V$  n.d.

Supponiamo invece che  $A$  abbia  $n_1$  autovalori a parte reale positiva, e  $n_2 = n - n_1$  a parte reale negativa (non zero per il momento). Scegliendo opportunamente la base della rappresentazione di stato, si avrà

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} x$$

dove  $s(-A_1) \subset \text{OLHP}$  e  $s(A_2) \subset \text{OLHP}$ . Consideriamo l'equazione

$$\begin{bmatrix} A_1^T & 0 \\ 0 & A_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & -P_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & -P_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

cioè

$$\begin{aligned} (-A_1^T) P_1 + P_1 (-A_1) &= -I \\ A_2^T P_2 + P_2 A_2 &= -I \end{aligned}$$

che ammettono una unica soluzione, d.p.. Se considero una funzione  $V(x) = x^T P x$ , con  $P = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & -P_2 \end{bmatrix}$ , essa ha dunque  $L_f V = x^T x + 2x^T P \tilde{f}(x)$  p.d., ma  $V(x)$  assume valori positivi arbitrariamente vicino all'origine, quindi, per il criterio di Lyapunov, l'equilibrio è instabile.

Nel caso che  $A$  abbia anche qualche autovalore sull'asse immaginario, basterà considerare una diversa scrittura del sistema,  $\dot{x} = f(x) = Ax + \tilde{f}(x) = (\bar{A} + \epsilon I)x + \tilde{f}(x)$ , così che nessun autovalore di  $\bar{A} = A - \epsilon I$  (pari a quelli di  $A$  meno  $\epsilon$ ) sia sull'asse immaginario ma quelli a parte reale positiva rimangano tali. Ragionando come sopra su  $\bar{A}$ , si trova  $L_f V = x^T x + 2x^T P \tilde{f}(x) + 2\epsilon V(x)$ . Nella regione dell'intorno dell'origine contenuta nel cono in cui  $V(x) > 0$  è anche  $L_f V > 0$ , quindi (ora per Cetaev) si ha instabilità.

L'interesse della applicazione del metodo diretto di Lyapunov ai sistemi lineari risiede nel fatto che esso non richiede il calcolo esplicito degli autovalori di  $A$  (che per sistemi di grandi dimensioni è problema difficile). D'altronde, le indicazioni date sono minori, e riguardano solo le proprietà qualitative delle soluzioni. Il risultato è quindi analogo all'utilizzo del criterio di Routh (e la sua controparte TD Jury) per determinare il segno della parte reale delle radici di un polinomio, che, se applicato al polinomio caratteristico di  $A$ , ci dà indicazioni sulla stabilità di  $\dot{x} = Ax$ .

Un'altra applicazione comune della equazione di Lyapunov riguarda sistemi nonlineari, per i quali la  $V(x) = x^T P x$  con  $P$  calcolata in base al linearizzato, ma applicata al vero sistema, può dire qualcosa di più sulla R.A.S. di quanto non dica il metodo indiretto da solo.

## 2.8 Stima numerica della RAS

Si consideri un sistema nonlineare

$$\dot{x} = f(x), \quad (2.5)$$

con equilibrio nell'origine ( $f(0) = 0$ ) e si consideri il suo modello linearizzato  $\dot{x} = Ax$ , ottenuto sviluppando nell'origine  $f(x) = f(0) + Ax + \tilde{f}(x)$  e trascurando il termine  $\tilde{f}(x)$  infinitesimo di ordine superiore al primo.

Si supponga che il sistema linearizzato sia asintoticamente stabile. In questa ipotesi, si possono agevolmente trovare un numero infinito di funzioni di Lyapunov del tipo  $V = x^T P x$ , con  $P$  soluzione della equazione di Lyapunov  $PA + A^T P = -Q$  per qualsiasi  $Q$  simmetrica positiva definita<sup>4</sup>.

<sup>4</sup>Si può ad esempio usare il comando Matlab `Pq=lyap(Af',Q)`. Si faccia attenzione alla sintassi del comando, che usa la trasposta della matrice  $A$ .

Per avere una stima (per difetto) della regione di asintotica stabilità del sistema, si deve quindi valutare la regione in cui vale la disequazione  $L_f V = -2x^T P f(x) = -x^T Q x + 2x^T P \tilde{f}(x) < 0$ , e trovare la più grande curva di livello di  $V$  interamente contenuta in quella regione. Che questa regione non sia vuota è garantito dal fatto che  $x^T P \tilde{f}(x)$  è infinitesimo di almeno terzo ordine rispetto a  $\|x\|$ , mentre  $-x^T P x$  è di secondo ordine.

Solo in casi rari la disequazione può essere studiata analiticamente. È però possibile verificarla numericamente per giungere ad una conclusione non perfettamente rigorosa, ma comunque abbastanza affidabile.

### Stima della RAS per campionamento

Questo può essere fatto ad esempio generando un gran numero di campioni casualmente distribuiti sulla superficie  $V(x) = R$  e guardando al segno di  $L_f V(x)$  in quei punti, al variare di  $R$ . Se tutti i campioni  $x$  verificano  $L_f V(x) = -2x^T P f(x) < 0$ , si può ragionevolmente ritenere che tutti i punti della superficie lo facciano, e che quindi la regione interna alla curva di livello  $V = R$  appartenga alla RAS. Si può quindi cercare iterativamente il massimo  $R$  per cui tutti i campioni presi verificano la disequazione.

Ovviamente, il metodo basato sul calcolo esplicito della  $\dot{V}$  su un numero finito di punti delle curve di livello non garantisce formalmente che la disequazione  $\dot{V} < 0$  sia verificata ovunque. Per sistemi con numero di dimensioni elevato, il numero di campioni da testare per avere una ragionevole affidabilità della risposta diviene presto molto alto.

La procedura può essere ripetuta per altre  $Q$ , ottenendo per ciascuna una nuova  $P$  e una nuova stima della RAS data dall'insieme  $x^T P x < R$ . L'unione di questi insiemi è ovviamente ancora contenuto nella RAS. I risultati di questo procedimento sono illustrati in fig. 2.8.

### Stima della RAS con tecniche SOS

Una possibile alternativa a questo metodo numerico diretto può essere trovata nell'utilizzo della teoria dei polinomi "somme di quadrati" (Sum Of Squares). Una polinomio nella variabile  $x \in \mathbb{R}^n$  è SOS se può essere scritto come somma di quadrati di polinomi in  $x$ , ed è ovviamente semi-definito positivo.

Più precisamente, un polinomio  $\Xi(x)$  di grado  $2N$  è un polinomio SOS se può essere scritto nella forma

$$\Xi(x) = m'(x) P m(x), \quad (2.6)$$

con  $P$  matrice semidefinita positiva e  $m(x) \in \mathbb{R}^{N+1}$  vettore che contiene tutti i monomi di ordine  $0, 1, \dots, N$ . Esistono metodi numerici abbastanza efficienti che permettono di verificare se un dato polinomio è SOS.

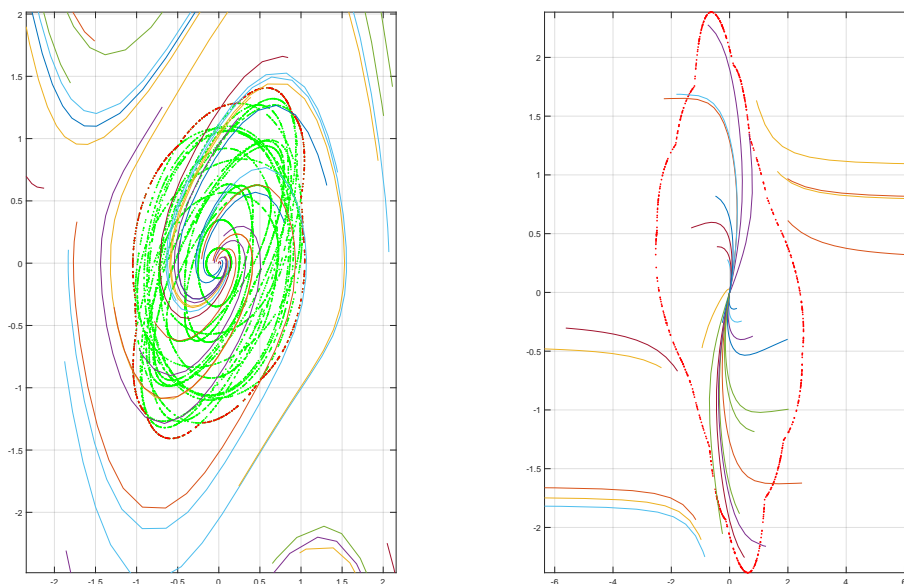


Figura 2.8: A sinistra, stima della RAS per il sistema “reverse Vanderpol”, ottenuto da (2.2) cambiando il segno della  $f(x)$  e rendendo così stabile l’origine e instabile il ciclo limite. Sono visibili in verde le curve di massimo livello ottenute per diverse scelte di  $Q$  per le quali  $L_f V < 0$ , e in rosso il loro inviluppo. A destra, stima della RAS dell’origine per il sistema (2.3). In entrambe le immagini sono anche riportate alcune traiettorie generate da diverse condizioni iniziali.

La verifica che ovunque all’interno di una curva di livello  $V(x) = R$  si abbia  $\dot{V} < -\epsilon$  (con  $\epsilon$  un margine di sicurezza piccolo a piacere) può essere tradotta (con quella che viene detta “S-procedure”) nella verifica che valga la disequazione

$$\Xi(x) \stackrel{def}{=} -\dot{V}(x) - \epsilon + \sigma(x)(V(x) - R) \geq 0, \quad (2.7)$$

per una qualche funzione  $\sigma(x)$  positiva semidefinita, ovvero SOS. Questo infatti garantisce che per ogni  $x$  per cui vale  $V(x) - R \leq 0$ , si ha anche  $\dot{V}(x) \leq -\epsilon$ . Questa verifica si fa tipicamente scegliendo un valore fisso di  $\epsilon$ , e cercando il massimo valore di  $R$  per il quale si riesce a trovare  $\sigma$  che soddisfa la disequazione.

Nel caso in cui  $V(x)$  e  $\dot{V}(x)$  siano polinomiali<sup>5</sup>, anche  $\Xi(x)$  è polinomiale, e la disequazione (2.7) può essere studiata usando le tecniche SOS. Queste permettono di trovare, se esiste, un polinomio  $\sigma(x)$  (esso stesso SOS) tale che l'intero termine a sinistra della disequazione sia SOS, e quindi non negativo.

Un poco più nel dettaglio, posto  $\sigma(x) = m(x)'s$ , si trova una soluzione particolare  $P_0(s)$  simmetrica e tale che  $\Xi(x) = m(x)^T P_0(s) m(x)$ , non necessariamente p.d. Si itera poi, per un dato  $R$ , modificando  $P$  e cercando di renderla p.d. mentre rispetta la simmetria e la definizione (2.7).

Se si riesce a risolvere per  $s$  col dato  $R$ , si può aumentare  $R$  per avere una stima più della RAS, o altrimenti diminuirlo se si fallisce.

Matlab fornisce gli strumenti per impostare e risolvere questo problema nel pacchetto "SOSTools".

### 2.8.1 Tolleranza alle perturbazioni iniziali

Nel caso in cui le perturbazioni iniziali possibili per un sistema di cui verificare la tollerabilità siano date come intervalli sui valori delle variabili di stato ( $\bar{x}_j \leq x_j(0) \leq \underline{x}_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ ), o più generalmente con disequazioni lineari sugli stati iniziali  $A_B x \leq b_B$  che definiscono una regione convessa attorno all'origine, la verifica si potrà fare se si trova una superficie di livello  $x^T P x = R$  tutta contenuta in  $S$  che a sua volta contiene tutti i vertici della "scatola" di tolleranza  $n$ -dimensionale.

Se non si trova nessuna stima convessa della RAS che contiene tutti i vertici della "scatola", si dovrà ampliare la sua stima unendo più sottoinsiemi corrispondenti a più funzioni di Lyapunov. In questo caso, non essendo l'unione di insiemi convessi convessa, non sarà sufficiente verificare che i soli vertici della scatola siano inclusi. Si potrà in questo caso verificare anche che tutti i punti sulla frontiera dell'unione delle stime ottenute rimangano esterni alla scatola (ovvero nessun punto sulla frontiera soddisfi le tolleranze). Questo si può verificare ancora numericamente su un numero sufficientemente alto di punti sulla frontiera dell'unione delle stime.

#### **Esempio: Stima della appartenenza di una regione alla RAS**

Si consideri ancora il sistema (2.3), e una regione dello spazio di stato descritta da  $B = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x_1| \leq 1, |x_2| \leq 0.9\}$ . Si consideri una serie di funzioni di Lyapunov  $V_i(x)$  le cui massime curve di livello con  $L_f V_i(x) < 0$  sono unite e inviluppate dai punti in rosso in fig. 2.9. Poichè nessuno dei punti di

<sup>5</sup>Questa ipotesi è verificabile in teoria per dinamiche con  $f(x)$  polinomiale, ma anche in pratica per approssimazione polinomiale di dinamiche che non lo sono esattamente.

questa frontiera appartiene a  $B$ , si può stimare numericamente che qualsiasi perturbazione iniziale in  $B$  è ricondotta all'origine.

In modo analogo, si può verificare numericamente che il cubo di lato 0.2 è contenuto nella RAS per il sistema tri-dimensionale

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 + x_2^2 + x_3^2 \\ \dot{x}_2 &= x_1^2 - x_2 + x_3^2 \\ \dot{x}_3 &= x_1^2 + x_2^2 - x_3 \end{aligned} \quad (2.8)$$

---

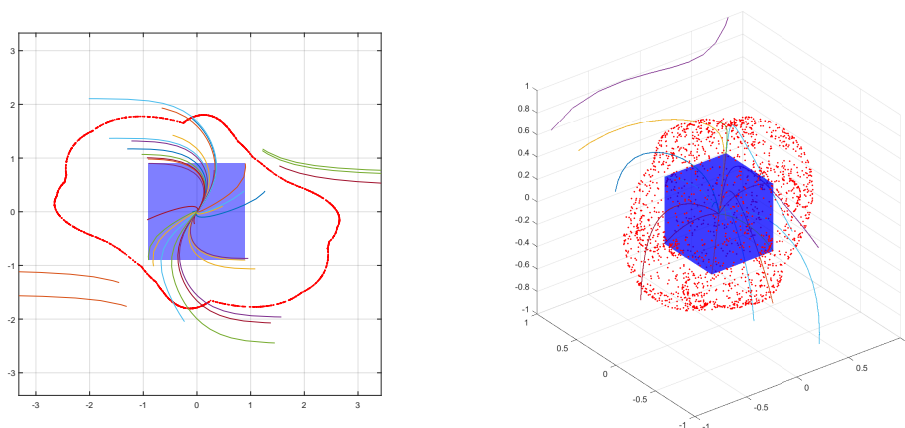
◇


Figura 2.9: Certificazione numerica della convergenza all'origine di perturbazioni iniziali in un insieme di tolleranza (in blu) per i sistemi (2.3) e (2.8). Sono anche riportati alcuni esempi di traiettorie convergenti e divergenti.

Una ulteriore utile applicazione di queste tecniche si trova nel caso in cui si voglia certificare il funzionamento di un sistema all'interno di limiti operativi prefissati. Se questi limiti operativi sono dati nella forma  $A_C x \leq b_C$ , si tratta di caratterizzare le perturbazioni iniziali accettabili affinché tutta l'evoluzione futura del sistema rispetti quei vincoli. L'insieme di partenza "sicuro" può

essere stimato dalla unione degli insiemi contenuti in superfici di livello che verificano  $\dot{V} \leq 0$  e sono tutte incluse nella regione vincolata. Due esempi di queste stime sono riportati in fig. 2.10.

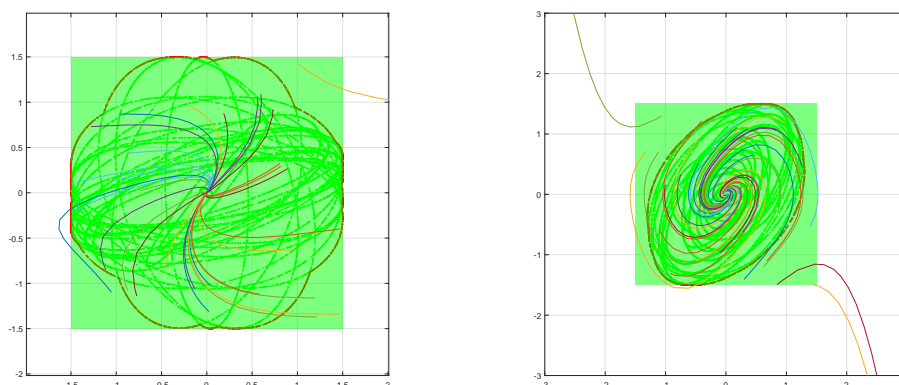


Figura 2.10: Verifica numerica della soddisfazione di vincoli sulla evoluzione dello stato entro limiti fissati (regione verde) per condizioni iniziali interne ad una regione finita (contorno rosso) per i sistemi (2.3) e Vanderpol inverso.

Infine, combinando i risultati precedenti, si può verificare numericamente se, per qualsiasi perturbazione iniziale in una assegnata regione di tolleranza, la traiettoria generata non solo converge all'equilibrio, ma anche rimane interna nella propria evoluzione ad una regione ammissibile (vedi fig. 2.11).

### 2.8.2 Stima della RAS per sistemi controllati

Consideriamo adesso il caso in cui il sistema originale (2.5) sia inserito in un anello di controllo, assieme ad un controllore progettato in modo da stabilizzare asintoticamente il sistema in anello chiuso. Ovviamente la stabilità è garantita globalmente per il sistema linearizzato approssimato su cui il progetto del controllore è basato. Sappiamo quindi, dal teorema di Lyapunov



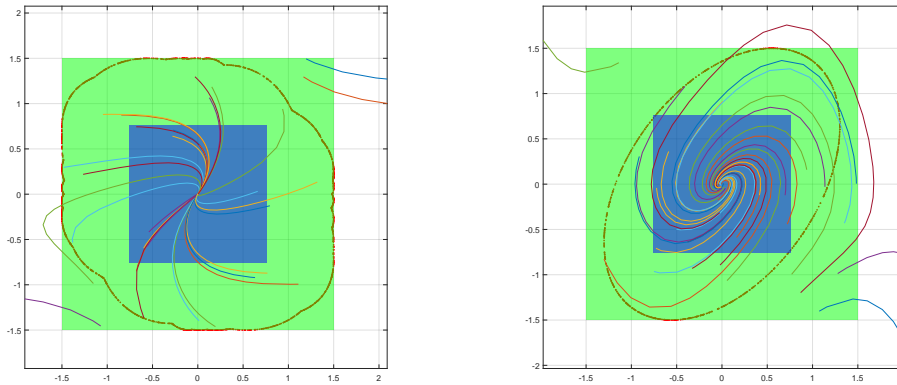


Figura 2.11: Combinando i risultati precedenti, si può verificare numericamente la proprietà della regione in blu di generare traiettorie convergenti che nella loro evoluzione restano interni alla regione verde per i sistemi (2.3) e Vanderpol inverso.

indiretto, che anche per il sistema nonlineare l'origine è resa asintoticamente stabile dallo stesso controllore lineare. Vogliamo adesso studiare la tolleranza del sistema nonlineare controllato a perturbazioni delle condizioni iniziali, stimandone la RAS.

Si consideri quindi nuovamente il sistema nonlineare con  $n$  stati, adesso con ingressi e uscite. Assumendo che questo sia strettamente proprio<sup>6</sup>, poniamo

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, u) \\ y &= h(x).\end{aligned}$$

Si supponga che per il modello linearizzato  $\dot{x} = Ax + Bu$ ,  $y = Cx$  con funzione di trasferimento  $G(s)$  sia stato progettato un controllore stabilizzante  $C_r(s)$  di ordine  $n_r$ , e si consideri una realizzazione del controllore nello spazio di

<sup>6</sup>Se non lo fosse, basterà supporre che lo sia il controllore  $C_r(s)$

stato  $x_r \in \mathbb{R}^{n_r}$  data da

$$\begin{aligned}\dot{x}_r &= A_r x_r + B_r u_c \\ y_c &= C_r x_r + D_r u_c.\end{aligned}$$

Mettendo i due sistemi in retroazione negativa, ovvero ponendo  $u_c = -y$  e  $u = y_c$ , si può scrivere il sistema complessivo nella forma

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, y_c) \\ \dot{x}_r &= A_r x_r - B_r y.\end{aligned}$$

Se si definiscono come  $\tilde{f}(x, u) = f(x, u) - Ax - Bu$  e  $\tilde{h}(x) = h(x) - Cx$  i residui della linearizzazione del sistema originale, possiamo anche riscrivere

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (A - BD_r C)x + BC_r x_r + \tilde{g}(x, x_r) \\ \dot{x}_r &= A_r x_r - B_r y = A_r x_r - B_r Cx - B_r \tilde{h}(x),\end{aligned}$$

dove  $\tilde{g}(x, x_r) = \tilde{f}(x, u(x, x_r)) - BD_r \tilde{h}(x)$ . Indicando con  $z = [z_1^T, z^T]^T = [x^T, x_r^T]^T \in \mathbb{R}^{n+n_r}$  lo stato complessivo, si può quindi riscrivere

$$\dot{z} = F(z) = A_f z + \tilde{F}(z)$$

con

$$A_f = \begin{bmatrix} A - BD_r C & BC_r \\ -B_r C & A_r \end{bmatrix}; \quad \tilde{F}(z) = \begin{bmatrix} -BD_r \tilde{h}(x) + \tilde{f}(x, u(x, x_r)) \\ -B_r \tilde{h}(x) \end{bmatrix}.$$

Si noti che, quando il termine di errore  $\tilde{F}(\cdot)$  fosse nullo, il sistema nonlineare complessivo coinciderebbe con quello linearizzato che abbiamo supposto sia stato stabilizzato asintoticamente. Per tale sistema linearizzato e controllato di dimensione  $n + n_r$  si può quindi trovare, per ogni scelta di una matrice  $Q$  simmetrica positiva definita, una funzione di Lyapunov  $V_Q = z^T P_Q z$ , con  $P_Q$  soluzione della equazione di Lyapunov  $P_Q A_f + A_f^T P_Q = -Q$ .

La stima della regione di asintotica stabilità dell'origine per il sistema nonlineare stabilizzato può quindi proseguire in questo spazio di stato allargato con i metodi sopra visti, ovvero valutando la regione in cui vale la disequazione  $\dot{V}_Q = 2z^T P_Q F(z) < 0$ , e trovare la più grande curva di livello di  $V_Q$  interamente contenuta in quella regione.

Si osservi esplicitamente che lo stato  $z$  comprende adesso anche quello del controllore, le cui condizioni iniziali entrano nella valutazione della RAS, ma in genere possono essere assegnate esattamente e arbitrariamente (tipicamente le si pongono in zero).

**Esempio: Stabilizzazione di un pendolo inverso**

Si consideri nuovamente l'esempio riportato nella sezione 1.2 di un pendolo inverso su carrello, per il quale l'equilibrio superiore è stato reso stabile mediante un controllore lineare  $R(s)$ . Sia ad esempio

$$R(s) = \frac{-21.89s^2 - 40.96s - 4.118}{s^3 + 8.179s^2 + 28.82s - 3.41}$$

che è realizzato in forma di stato dalle matrici

$$\begin{aligned} A_r &= \begin{bmatrix} -8.2 & -7.2 & 0.8 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; & B_r &= \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \\ C_r &= \begin{bmatrix} -2.7 & -1.3 & -0.1 \end{bmatrix} & D_r &= 0; \end{aligned}$$

Come accennato in precedenza, questo controllore non è in grado di stabilizzare la posizione del carrello. Trascureremo quindi in quello che segue questa variabile, che non appare nella dinamica delle altre, semplicemente eliminandola in (1.2) e riducendo lo stato  $\xi$  a dimensione tre ( $\xi_1 = \theta$ ,  $\xi_2 = \dot{y}$  e  $\xi_3 = \dot{\theta}$ ):

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \dot{\xi}_2 \\ \dot{\xi}_3 \end{bmatrix} = \dot{\xi} = f(\xi, u) = \begin{bmatrix} \dot{\xi}_4 \\ \frac{1}{\Delta(\xi)} W(\xi) v(\xi, u) \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

con lo stesso significato di  $\Delta$  e  $W$ .

Ci poniamo ad esempio il problema di garantire che tutte le possibili condizioni iniziali che soddisfano i limiti fisici

$$\begin{cases} |\dot{y}(0)| \leq 0.1 \text{m/s}; \\ |\theta(0)| \leq 0.07 \text{rad}; \\ |\dot{\theta}(0)| \leq 0.1 \text{rad/s} \end{cases} \quad (2.10)$$

appartengano alla regione di asintotica stabilità dell'equilibrio superiore. Per fare questa verifica, è sufficiente considerare il sistema controllato complessivo, il cui stato  $z = [\xi, x_r] \in \mathbb{R}^6$  si ottiene giustapponendo gli stati fisici a quelli del controllore, e procedere come visto in precedenza. Si noti che lo stato iniziale del controllore è scelto da noi direttamente, e posto tipicamente a zero. I limiti sugli stati iniziali del controllore possono essere quindi anche molto stretti. In questo esempio, scegliamo

$$|x_{r,i}(0)| \leq 10^{-2}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.11)$$

Il risultato della applicazione delle tecniche di stima numerica della RAS visti in precedenza dicono che questa "scatola" di condizioni iniziali è tutta inclusa nella RAS con il controllore scelto (vedi fig. 2.12).

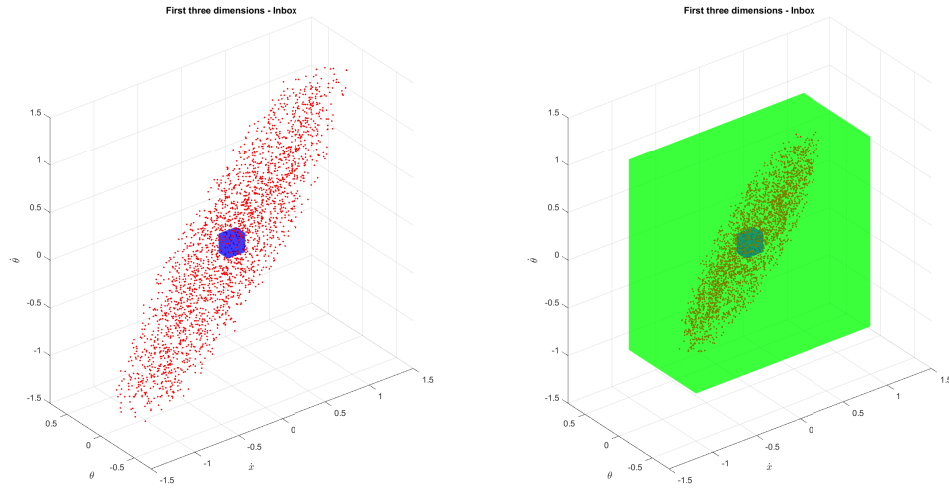


Figura 2.12: Verifica numerica di appartenenza della regione di tolleranza sulla condizioni iniziali (poliedro in blu) alla regione di asintotica stabilità stimata (a sinistra) e al sottoinsieme della RAS che garantisce di non superare i limiti funzionali sulla evoluzione transitoria dello stato (poliedro in verde). Le rappresentazioni grafiche sono limitate ai primi tre stati.

Un aspetto forse ancor più interessante riguarda la determinazione di una sottoregione della RAS per la quale sia garantito che tutte le evoluzioni del sistema che partono dal suo interno verifichino dati limiti di massima escursione. Poniamo ad esempio dei limiti fisici nella forma

$$\begin{cases} |\dot{y}(t)| \leq 1\text{m/s}; \\ |\theta(t)| \leq 0.2(\text{rad}); \\ |\dot{\theta}(t)| \leq 1(\text{rad})/\text{s} \end{cases}, \quad \forall t \geq 0. \quad (2.12)$$

Per quanto riguarda i limiti sugli stati del controllore, possiamo chiedere che questi non diventino mai troppo grandi, per limitare la escursione numerica dei risultati, ad esempio imponendo che

$$|\dot{x}_{r,i}(t)| \leq 10, \quad \forall t \geq 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.13)$$

Possiamo anche imporre che la massima forza richiesta dal controllore per

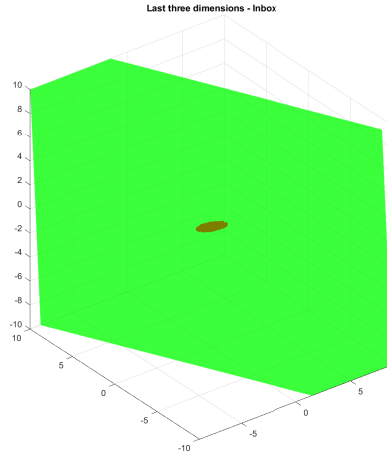


Figura 2.13: Verifica numerica di appartenenza della regione di tolleranza sulle perturbazioni iniziali (in blu) rispetto alla stabilizzazione all'origine con limiti sulla massima escursione delle variabili di stato e della forza di attuazione (regione in verde), limitatamente alle tre variabili di stato corrispondenti al controllore. Si noti che il vincolo sulla forza di attuazione genera una scatola non allineata con gli assi principali.

stabilizzare le condizioni iniziali date sia limitata ad un valore dato, ad esempio per la saturazione dell'attuatore corrispondente alla forza  $F \leq F_{max}$ . Questo limite si traduce in disequazioni sullo stato del controllore, essendo

$$\|u_c\| = \|F\| = \|C_r x_r\| \leq F_{max}, \forall t \geq 0 \quad (2.14)$$

Eseguendo il test numerico, si osserva che tutte le condizioni iniziali che rispettano le (2.10) e (2.11) appartengono anche alla sottoregione della RAS certificata per il non superamento dei limiti (2.12), (2.13) e (2.14), quando  $F_{max} = 10N$  (vedi fig. 2.13). Invece, se si avesse un limite della forza di attuazione pari a  $F_{max} = 8N$ , questa garanzia non potrebbe essere data.

◇

## 2.9 Velocità di Convergenza

Nelle applicazioni, è importante determinare se la convergenza all'equilibrio è più o meno veloce: se è esponenziale innanzitutto, e con quale esponente nel caso che lo sia.

Vale qui la pena ricordare che, tra i teoremi di esistenza, abbiamo incontrato un risultato che esclude la possibilità di convergenza esponenziale verso un equilibrio per un sistema nonlineare il cui linearizzato non fosse asintoticamente stabile.

Ricordiamo che in generale si dice velocità di convergenza di un sistema verso un equilibrio esponenzialmente stabile il più grande scalare  $\beta > 0$  tale che, per condizioni iniziali  $\xi_0$  sufficientemente vicine all'equilibrio, una norma dello stato decresca come  $\|\xi(\xi_0, t)\| \leq \alpha e^{-\beta t}$  per qualche  $\alpha > 0$ .

Se si riesce a determinare una relazione tra una funzione di Lyapunov e la sua derivata direzionale del tipo

$$\dot{V} = L_f V(x) \leq -\lambda V(x), \quad \lambda > 0$$

si ha che lungo le traiettorie  $\dot{V}(t) + \lambda V(t) = Z(t) \leq 0$ , quindi

$$V(t) \leq e^{-\lambda t} V(0).$$

Infatti la soluzione di  $\dot{V} = -\lambda V + Z(t)$  è  $V(t) = e^{-\lambda t} V(0) + \int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)} Z(\tau) d\tau$ , e l'integrale è non positivo.

Ad esempio, per una funzione di Lyapunov  $V(x) = x^T x = \|x\|^2$ , si avrebbe  $\|x(t)\|^2 \leq e^{-\lambda t} \|x(0)\|^2$  ovvero  $\|x(t)\| \leq e^{-\frac{\lambda t}{2}} \|x(0)\|$ , quindi convergenza esponenziale con velocità (almeno)  $\lambda/2$ .

Nel caso TD si ha analogamente che  $V(x(t+1)) < \lambda V(x(t))$  con  $\lambda < 1$  implica  $V(t) \leq \lambda^t V(0)$ .

Analogamente a quanto visto per la stabilità, ci possiamo chiedere fino a che punto una specifica di progetto del controllore per il sistema linearizzato quale il tempo di assestamento si conservi quando il controllore è applicato al sistema effettivo nonlineare.

Per ricollegare il concetto di polo dominante, tipico della analisi in frequenza, con il concetto di velocità di convergenza introdotto nello studio della stabilità, si consideri quanto segue.

Si osservi preliminarmente che, detti  $\lambda_{max}(R)$ ,  $\lambda_{min}(R)$  il massimo e minimo autovalore di una matrice  $R$  simmetrica e definita positiva, valgono le

seguenti relazioni

$$\begin{aligned}\xi^T R \xi &\geq \lambda_{\min}(R) \|\xi\|^2; \\ \xi^T R \xi &\leq \lambda_{\max}(R) \|\xi\|^2; \\ R &\leq \lambda_{\max}(R) I; \\ R &\geq \lambda_{\min}(R) I,\end{aligned}$$

dove con la disequazione matriciale  $R_1 \geq R_2$  si intende che la matrice  $R_1 - R_2$  è semi-definita positiva (ovvero definita positiva se vale  $>$  strettamente). Applicando queste relazioni alle matrici  $P$  e  $Q$  della equazione di Lyapunov relativa al sistema linearizzato controllato la cui matrice dinamica è  $A_f$ , ovvero  $PA_f + A_f^T P = -Q$ , e ricordando che queste determinano una funzione di Lyapunov per il sistema  $V = \xi^T P \xi$ , si può scrivere

$$\dot{V} = -\xi^T Q \xi \leq -\lambda_{\min}(Q) \|\xi\|^2 = -\lambda_{\min}(Q) \frac{\xi^T (\lambda_{\max}(P) I) \xi}{\lambda_{\max}(P)} \leq -\gamma V,$$

dove  $\gamma = \frac{\lambda_{\min}(Q)}{\lambda_{\max}(P)}$ .

Dalla relazione  $\dot{V}(t) \leq -\gamma V(t)$  si ha immediatamente che  $V(t) \leq V(0)e^{-\gamma t}$ , quindi  $\|\xi\|^2 \leq \frac{1}{\lambda_{\min}(P)} V(t) \leq \frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)} \|\xi_0\|^2 e^{-\gamma t}$  da cui infine  $\|\xi\| \leq \alpha e^{-\frac{\gamma}{2}t}$ . In conclusione, la velocità di convergenza di un sistema lineare è non inferiore a  $\gamma/2 = \frac{1}{2} \frac{\lambda_{\min}(Q)}{\lambda_{\max}(P)}$ .

Questa stima dipende ovviamente dalla scelta di  $Q$ . Si può dimostrare che la migliore stima della velocità di convergenza si ottiene nel caso in cui si scelga  $Q = I$ . In questo caso, supponendo per semplicità che la matrice dinamica abbia tutti autovalori reali e distinti, possiamo porre il sistema nelle coordinate in cui la matrice dinamica  $\hat{A}_f$  è diagonale. La soluzione della equazione di Lyapunov  $P\hat{A}_f + \hat{A}_f^T P = -I$  è in questo caso  $P = -1/2\hat{A}_f^{-1}$ , da cui si ha che  $\gamma = -2\lambda_{\max}(A_f)$ : quindi, l'autovalore più lento (dominante) del sistema rappresenta proprio la velocità di convergenza.

Dato un sistema nonlineare il cui linearizzato approssimato ha velocità di convergenza esponenziale  $\gamma/2$ , si può dimostrare che il sistema nonlineare ha la stessa velocità di convergenza verso l'equilibrio. Infatti, la definizione di velocità di convergenza è locale, cioè per condizioni iniziali  $\xi_0$  sufficientemente piccole. Usando la stessa funzione di Lyapunov  $\xi^T P \xi$  per il sistema nonlineare, si ha  $\dot{V} = -\xi^T Q \xi + 2\xi^T P \tilde{f}(\xi)$ , con  $\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\|\tilde{f}(\xi)\|}{\|\xi\|} = 0$ . Fissato  $\beta > 0$ , con  $\gamma > \beta$ , si può scegliere quindi  $\xi_0$  tale per cui  $\frac{\|\tilde{f}(\xi)\|}{\|\xi\|} < \beta \frac{\lambda_{\min}(P)}{\lambda_{\max}(P)}$ , quindi  $\dot{V} \leq -(\gamma - \beta)V$ , dove  $\beta$  può essere fissato arbitrariamente piccolo.

## 2.10 Costruzione di Krasovskii

Quando il linearizzato di un sistema non è asintoticamente stabile, non abbiamo alcun metodo generale per costruire funzioni di Lyapunov per il sistema. Una tecnica talvolta utile è la costruzione di Krasovskii. Per il sistema  $\dot{x} = f(x)$ , con  $x = 0$  punto di equilibrio, si consideri la candidata  $V(x) = f(x)^T f(x)$ . Detto  $A(x) = \frac{\partial f}{\partial x}$  il jacobiano di  $f(x)$  e  $F(x) = A(x) + A^T(x)$  la sua parte simmetrica, se  $F(x)$  è negativa definita (localmente o globalmente), allora si ha asintotica stabilità (locale o globale) dell'equilibrio <sup>7</sup>.

Si ha infatti

$$L_f V(x) = f^T(x)A(x)f(x) + f^T(x)A^T(x)f(x) = f(x)^T F(x)f(x).$$

che è definita negativa. Infatti,  $F(x)$  è negativa definita per ipotesi: per dimostrare che  $L_f V(x) = 0$  solo in  $x = 0$  (almeno localmente), dobbiamo ancora escludere il caso che  $f(x)$  possa annullarsi in punti  $x \neq 0$ . Ma se  $F(x)$  è n.d., allora  $A(x)$  è nonsingolare localmente per ogni  $x \neq 0$ : se così non fosse, e fosse per assurdo  $A(x)v = 0$ , sarebbe anche  $v^T F(x)v = 2v^T A(x)v = 0$ , contraddizione. Quindi, per il teorema del Dini,  $f(x)$  è invertibile univocamente laddove  $F(x)$  è definita negativa, cioè l'equilibrio nell'origine è isolato.

Si noti che questa tecnica può essere utile per casi in cui il metodo indiretto non dà risultati perchè  $A(0)$  ha autovalori a parte reale nulla. In questi casi non è possibile costruire una  $V(x)$  quadratica col metodo della equazione di Lyapunov, e quindi non si potrà mai avere esponenziale stabilità.

**Esempio:** Per il sistema  $\dot{x} = -x^3$ , si ha  $A(x) = -3x^2$  e  $F(x) = -6x^2$  n.d.. L'origine è stabile asintoticamente, anche se la velocità di convergenza sarà meno che esponenziale. \_\_\_\_\_  $\diamond$

## 2.11 Sistemi non stazionari

Nel caso di un sistema non stazionario, ovvero con dipendenza esplicita dal tempo del tipo  $\mathbb{D}x = f(x, t)$ , i metodi di studio della stabilità devono essere posti con maggiore cautela.

Questo è già evidente dallo studio dei sistemi lineari tempo varianti, nei quali già si osservano importanti differenze col caso tempo invariante.

---

<sup>7</sup>Si osservi esplicitamente che  $A(0) = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x=0}$  è la matrice dinamica del linearizzato, che ovviamente non si richiede qui essere definita negativa.



Per un sistema lineare tempo variante

$$\dot{x} = A(t)x$$

la condizione che la parte reale degli autovalori di  $A(t)$  sia negativa per ogni  $t$  non è sufficiente per affermare la stabilità.

Si consideri infatti ad esempio il sistema LTCTV

$$\dot{x} = Ax = \begin{bmatrix} -1 & a(t) \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x \quad (2.15)$$

che ha spettro  $\rho(A(t)) = \{-1, -1\}$  per ogni  $t$ . Questo non è sufficiente a garantire la sua stabilità: basta considerare ad esempio il caso  $a(t) = e^{2t}$ , le cui soluzioni chiaramente divergono.

Non è sufficiente neppure aggiungere un'ipotesi di limitatezza delle funzioni che formano  $A(t)$ , ad esempio imponendo che una norma di  $A(t)$  sia limitata (cioè che  $\exists M : \|A(t)\| \leq M, \forall t \geq 0$ ): un controesempio in tal senso è fornito da

$$A(t) = R^T(t) \begin{bmatrix} -1 & -5 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} R(t), \text{ con } R(t) = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

il cui spettro è  $\rho(A(t)) = \{-1\}$ , ma è comunque instabile.

In effetti, la condizione di negatività della parte reale degli autovalori di  $A(t)$  non è neppure necessaria, come mostrato da questo sistema

$$A(t) = \begin{bmatrix} \frac{15 \sin 12t - 11}{2} & \frac{15 \cos 12t}{2} \\ \frac{15 \cos 12t}{2} & -\frac{15 \sin 12t + 11}{2} \end{bmatrix}$$

per il quale  $\rho(A(t)) = \{2, -13\}$ , ma che è esponenzialmente stabile.

In effetti, ci si può attendere che quando il sistema fosse tempo variante in modo sufficientemente lento, le proprietà di stabilità possano essere derivate da quelle del corrispondente modello "a tempo congelato". Una condizione di questo tipo è espressa da un teorema di H. H. Rosenbrock per sistemi lineari tempo varianti  $\dot{x} = A(t)x$ .

**Teorema** Sia  $A(t) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$  differenziabile, uniformemente limitata (cioè  $\exists M > 0$  tale che  $\|A(t)\| \leq M, \forall t$ ), con autovalori a parte reale uniformemente negativa nel tempo (cioè  $\exists \alpha > 0$  tale che  $Re(\lambda(A(t))) \leq -\alpha, \forall \lambda \in \rho(A(t))$ ). L'equilibrio nell'origine è esponenzialmente stabile se vale una delle condizioni:

i)  $\alpha > 4M$ ;

ii)  $\|\dot{A}(t)\| \leq \delta, \forall t$  con  $\delta > 0$  sufficientemente piccolo

Una determinazione quantitativa esplicita (ma solo sufficiente) del bound del teorema di Rosenbrock è disponibile nella forma  $\delta < \frac{2}{2n-1} \frac{\alpha^{4n-2}}{2M^{4n-4}}$ . Le dimostrazioni di questi ultimi risultati si appoggiano sull'uso di funzioni di Lyapunov tempo varianti, oggetto del prossimo paragrafo.

### 2.11.1 Studio di sistemi non stazionari con il metodo di Lyapunov

Per studiare i sistemi non stazionari, anche quando lineari, può dunque essere necessario usare tecniche alla Lyapunov, anche se queste richiedono particolare attenzione.

Nel caso di sistemi tempo-varianti, è innanzitutto utile precisare le nozioni di stabilità e convergenza, introducendo il concetto di *uniformità* nel tempo. Considerando il sistema non-stazionario

$$\mathbb{D}x = f(x, t), \quad x(t_0) = x_0 \quad (2.16)$$

il suo movimento generico  $\bar{x}(t) = x(x_0, t_0, t - t_0)$  dipende in generale oltre che da  $x_0$  anche dal tempo  $t_0$  in cui questa condizione è verificata. Diremo che il movimento è *uniformemente stabile* per il sistema (2.1) se tutti i movimenti che originano in qualsiasi tempo  $t'$  da condizioni iniziali sufficientemente vicine a  $x_0$  rimangono arbitrariamente vicine a  $x(x_0, t_0, t - t_0)$  stesso; ovvero, se  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$  indipendente da  $t_0$  tale che se  $\|x' - x_0\| < \delta$ , allora  $\|x(x', t', t - t') - x(x_0, t_0, t - t_0)\| < \epsilon, \forall t, t_0, t'$ . Estensioni analoghe definiscono la uniforme convergenza, la uniforme asintotica stabilità etc.

#### Candidate stazionarie

Per studiare la stabilità di un equilibrio, consideriamo innanzitutto il caso in cui si usi una candidata di Lyapunov stazionaria  $V(x)$ . La funzione  $\dot{V} = L_f V(x, t)$  è in generale non stazionaria: una condizione sufficiente per l'asintotica stabilità dell'equilibrio è che  $L_f V(x, t)$  sia *uniformemente* negativa definita, cioè che  $\exists m > 0 : L_f V(x, t) < -m\|x\|, \forall x \in B_r(0), \forall t$ .

La necessità della condizione di uniforme n.d. è illustrata da questo esempio: sia  $\dot{x} = a(t)x$ , con  $a(t) < 0, \forall t$ , e sia  $V(x) = x^2$ . Pur avendosi  $L_f V(x) = 2a(t)x^2 < 0$  in ogni istante, la uniformità nel tempo di questa proprietà non è garantita per qualsiasi  $a(t)$ . In effetti, se si pone ad esempio  $a(t) = -e^{-2t}$ , il sistema non converge all'equilibrio nell'origine.

Dal precedente risultato si deriva immediatamente che una condizione sufficiente per la stabilità di un sistema LTCTV è che gli autovalori della sua parte simmetrica abbiano parte reale uniformemente negativa. Dato infatti  $\dot{x} = A(t)x$ , si consideri la candidata tempo invariante  $V(x) = \frac{1}{2}x^T x$ , per la quale si ha  $\dot{V} = x^T \left( \frac{A(t)+A^T(t)}{2} \right) x$ .

Nell'esempio (2.15), il polinomio caratteristico della parte simmetrica di  $A(t)$  vale  $\pi(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 1 - a^2/4$ , quindi  $L_f V(x, t)$  è uniformemente n.d. se  $\exists M$  tale che,  $\forall t$ , valga  $|a(t)| \leq M < 2$ . Questa condizione è ovviamente molto cautelativa: basta pensare che nel caso di  $a$  costante, il sistema è stabile per qualsiasi valore di  $a$ .

### Candidate non stazionarie

Per studiare la stabilità di sistemi non stazionari è spesso utile, e talvolta necessario, usare candidate di Lyapunov esse stesse non stazionarie, cioè del tipo  $V(x, t)$ .

La possibilità che la  $V(x, t)$ , e quindi le sue curve di livello, cambino nel tempo introduce però la necessità di riformulare il concetto di “positiva definitezza”. Per evidenziare il possibile assurdo in cui si potrebbe incorrere altrimenti, è sufficiente considerare il sistema a una dimensione  $\dot{x} = \lambda x$  e la candidata  $V(x, t) = x^2 e^{-\alpha t}$ , che soddisfa la condizione  $V(x, t) > 0 \forall x \neq 0$ , e per la quale si avrebbe  $\dot{V} = (2\lambda - \alpha)x^2 e^{-\alpha t}$ . Per  $\alpha > 2\lambda$ ,  $\dot{V}(x, t) < 0 \forall x \neq 0$ , che indicherebbe asintotica stabilità anche per  $\lambda$  positivi, il che è chiaramente assurdo. La ragione di questo fenomeno è che le curve di livello della  $V$  si allargano ad una velocità maggiore di quella con cui le traiettorie del sistema divergono.

Il teorema diretto di Lyapunov deve essere opportunamente riformulato in questo caso, mediante le seguenti definizioni:

Una funzione scalare  $\alpha : [0, a) \rightarrow [0, \infty)$  si dice “di classe  $\mathcal{K}$ ” se  $\alpha(0) = 0$  ed è strettamente crescente (quindi in particolare  $\alpha(x) > 0, \forall x > 0$ ). Si dice “di classe  $\mathcal{K}_\infty$ ” se è di classe  $\mathcal{K}$ , è definita sulla semiretta positiva ( $a = \infty$ ) e  $\lim_{r \rightarrow \infty} \alpha(r) = \infty$ .

I teoremi del metodo diretto di Lyapunov possono essere formulati per un sistema  $\dot{x} = f(x, t)$ , con equilibrio nell'origine (cioè con  $f(0, t) = 0 \forall t \geq 0$ ) e con  $f(x, t)$  sufficientemente regolare (cioè Lipschitz rispetto a  $x$  e continua a tratti rispetto a  $t$ ), come segue:

**Teorema.** Si consideri un intorno  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  dell'origine. Se esiste una funzione differenziabile  $V(x, t)$  tale che,  $\forall t \geq 0$  e  $\forall x \in \Omega$ , vale

$$\alpha_1(\|x\|) \leq V(x, t) \leq \alpha_2(\|x\|)$$

e

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(x, t) \leq -\alpha_3(\|x\|)$$

allora si ha che l'equilibrio è:

1. uniformemente stabile se  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  sono funzioni di classe  $\mathcal{K}$  e  $\alpha_3(x) \geq 0$ ,  $\forall x \in \Omega$ ;
2. uniformemente asintoticamente stabile se tutte le  $\alpha_i$  sono funzioni di classe  $\mathcal{K}$  in  $\Omega$ ,  $i = 1, 2, 3$ ;
3. globalmente uniformemente asintoticamente stabile se  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  sono funzioni di classe  $\mathcal{K}_\infty$  e  $\alpha_3(x)$  è di classe  $\mathcal{K}$  su  $\Omega = \mathbb{R}^n$ ;
4. esponenzialmente stabile se tutte le  $\alpha_i$  sono funzioni esponenziali del tipo  $\alpha_i(x) = k_i x^\gamma$  su  $\Omega$ , con  $k_i > 0$  e  $\gamma > 0$ ,  $i = 1, 2, 3$  (globalmente esponenzialmente stabile se  $\Omega = \mathbb{R}^n$ ).

Consideriamo infine la generalizzazione del principio di invarianza di LaSalle al caso di sistemi  $\dot{x} = f(x, t)$  e/o di funzioni  $V(x, t)$  non stazionari. Questa è non banale: infatti, l'insieme  $R = \{x | \dot{V}(x, t) = 0\}$  può essere esso stesso tempo-variante. Se però per una opportuna funzione  $W(x) \geq 0$  vale  $\dot{V}(x, t) \leq -W(x) \leq 0$ , allora si può affermare che il sistema convergerà, a partire da condizioni iniziali contenute in opportune regioni, all'insieme in cui si annulla  $W(x)$ . Il teorema si enuncia più precisamente così:

**Teorema** (LaSalle-Yoshizawa). Dato il sistema  $\dot{x} = f(x, t)$  si consideri una funzione  $V(x, t)$  con

$$\alpha_1(\|x\|) \leq V(x, t) \leq \alpha_2(\|x\|)$$

dove  $\alpha_1, \alpha_2$  sono funzioni di classe  $\mathcal{K}$  in  $\Omega$ , e valga

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(x, t) \leq -W(x) \leq 0$$

per una funzione  $W(\cdot) \geq 0$ . Allora, tutte le traiettorie che partono da  $\Omega$  sono limitate, e  $\lim_{t \rightarrow \infty} W(x(t)) = 0$ , quindi  $x(t) \rightarrow S = \{x | W(x) = 0\}$ .

Un risultato simile al precedente teorema, che chiede solo che  $V(x)$  sia semi definita positiva, è spesso usato nelle dimostrazioni relative al controllo adattivo:

**Lemma di Barbalat applicato alla stabilità** Dato il sistema  $\dot{x} = f(x, t)$ , si consideri una funzione  $V(x, t) \geq 0$ , sia  $\dot{V}(x, t) = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(x, t)$  uniformemente continua, e valga  $\dot{V}(x, t) \leq 0$ . Allora vale  $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{V}(x(t)) = 0$ , quindi  $x(t) \rightarrow \{x | \dot{V}(x) = 0\}$ .

La condizione di uniforme continuità di  $\dot{V}(x, t)$  in  $t$  è richiesta dal lemma di Barbalat: infatti, esistono funzioni che, pur convergendo ad un valore costante, hanno derivata che non si annulla (ad esempio  $f(t) = \sin(t^2)/t$ ,  $t > 1$ ).

Si ricorda che una condizione sufficiente per la uniforme continuità di  $\dot{V}(x, t)$  è che  $\ddot{V}(x, t)$  sia limitata, cosa questa spesso più facile da dimostrare.



## Capitolo 3

# Raggiungibilità e Controllabilità

Un problema di rilievo nella teoria dei sistemi che coinvolge gli stati e gli ingressi è quello del raggiungimento di un desiderato stato finale a partire da un dato stato iniziale, mediante applicazione di un opportuna azione di controllo.

Questo problema ha applicazioni dirette nel senso della pianificazione delle azioni di controllo da esercitare su un sistema in “anello aperto”, cioè basandosi esclusivamente sulla conoscenza a priori del modello del sistema e del suo stato iniziale.

Inoltre, esso ha importantissime conseguenze sulle proprietà ottenibili dal sistema in “anello chiuso”, cioè quando nella scelta del controllo si utilizzino anche misure effettuate sullo stato o sulle uscite.

Nei problemi di pianificazione, ci troveremo spesso di fronte a problemi che possono essere ricondotti a sistemi di equazioni in più incognite, per i quali si pongono i problemi di esistenza delle soluzioni (problema di raggiungibilità) e di non-unicità, e quindi di scelta, tra le soluzioni (problema di controllo ottimo).

Consideriamo un sistema tempo invariante in forma di stato

$$\mathbb{D}x(t) = f(x(t), u(t)),$$

con  $x \in \mathbb{R}^n$ , e  $u(\cdot) \in U$ , dove  $U$  è lo spazio di funzioni o successioni in cui è possibile scegliere i controlli. Sia al solito  $x(x_0, u(\cdot), t)$  il valore della soluzione corrispondente a  $x(0) = x_0$  e controllo  $u(\tau)$ ,  $\tau \in [0, t]$ , al tempo  $t$ .

$U$  può ad esempio rappresentare un insieme di controlli ad ampiezza limitata ( $U = \{u \mid \|u(\cdot)\|_\infty \leq 1\}$ ), o a quadrato sommabile limitato ( $U = \{u \mid \|u(\cdot)\|_2 \leq 1\}$ ); la classe più generale usualmente considerata è quella dei

controlli quasi-continui (con un numero finito di discontinuità su qualsiasi intervallo finito).

Si definisce insieme dei punti *raggiungibili* al tempo  $t$  da  $x_0$  l'insieme  $\{\bar{x} \in \mathbb{R}^n | \exists \bar{u} \in U : x(x_0, \bar{u}, t) = \bar{x}\}$ .

## 3.1 Insieme di raggiungibilità

### 3.1.1 Sistemi LTITC

Consideriamo l'insieme di raggiungibilità per il sistema

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(0) = x_0 \quad (3.1)$$

nell'ipotesi che tutte le componenti dell'ingresso  $u(t)$  siano funzioni analitiche in  $[0, t]$ , cioè funzioni lisce (differenziabili con continuità infinite volte) e sviluppabili in serie di potenze. Usando per semplicità  $f_t$  per indicare la funzione  $f(t)$  valutata in  $t$  (quindi ad esempio  $u_0$  indica  $u(0)$ ), si ha

$$u_t = \sum_{k=0}^{\infty} u_0^{(k)} \frac{t^k}{k!}$$

dove con  $u_t^{(0)}$  si intende la funzione non derivata.

In queste ipotesi, anche la soluzione della equazione differenziale (3.1) è sviluppabile in serie di potenze:

$$x(x_0, u, t) = \sum_{k=0}^{\infty} x_0^{(k)} \frac{t^k}{k!}$$

Differenziando (3.1) si ottengono le espressioni delle derivate che appaiono nella serie:

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= Ax + Bu \\ x^{(2)} &= A^2x + ABu + Bu^{(1)} \\ x^{(3)} &= A^3x + A^2Bu + ABu^{(1)} + Bu^{(2)} \\ \vdots &= \vdots \\ x^{(k)} &= A^kx + \sum_{i=1}^k A^{k-i} Bu^{(i-1)} \end{aligned}$$

da cui, valutando in  $t = 0$  e sostituendo, si ha

$$x(x_0, u, t) = \sum_{k=0}^{\infty} A^k \frac{t^k}{k!} x_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^k A^{k-i} B u_0^{(i-1)} \frac{t^k}{k!}.$$



La prima sommatoria a sinistra vale  $e^{At}x(0)$  e rappresenta l'evoluzione libera del sistema. Scrivendo i primi termini dello sviluppo esplicito della seconda sommatoria,

$$Bu_0t + ABu_0\frac{t^2}{2} + Bu_0^{(1)}\frac{t^2}{2} + A^2Bu_0\frac{t^3}{3!} + ABu_0^{(1)}\frac{t^3}{3!} + Bu_0^{(2)}\frac{t^3}{3!} + \dots$$

si osserva che le somme possono essere riorganizzate in un prodotto matriciale scrivendo

$$x(x_0, u, t) = e^{At}x_0 + [B|AB|A^2B|\dots|A^{r-1}B|\dots] \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} u_0^{(k)} \frac{t^{k+1}}{(k+1)!} \\ \sum_{k=0}^{\infty} u_0^{(k)} \frac{t^{k+2}}{(k+2)!} \\ \sum_{k=0}^{\infty} u_0^{(k)} \frac{t^{k+3}}{(k+3)!} \\ \vdots \\ \sum_{k=0}^{\infty} u_0^{(k)} \frac{t^{k+r}}{(k+r)!} \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Si osservi a questo punto che le serie che appaiono nel vettore di infinite componenti a destra convergono agli integrali indefiniti successivi degli ingressi  $u_t$ . Infatti, poichè si è ipotizzato  $u_t$  liscia, quindi senza impulsi nell'origine, si ha

$$\begin{aligned} u_t^{(-1)} &\stackrel{def}{=} \int_0^t u(t_1) dt_1 = u_0^{(-1)} + u_0^0 t + u_0^{(1)} \frac{t^2}{2} + \dots = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} u_0^{(k)} \frac{t^{k+1}}{(k+1)!} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_t^{(-2)} &\stackrel{def}{=} \int_0^t \int_0^{t_1} u(t_2) dt_2 dt_1 = u_0^{(-2)} + u_0^{(-1)} t + u_0^0 \frac{t^2}{2} + \dots = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} u_0^{(k)} \frac{t^{k+2}}{(k+2)!} \end{aligned}$$

e in generale

$$u_t^{(-r)} = \overbrace{\int_0^t \int \dots \int}^{r \text{ volte}} u(\cdot) = \sum_{k=0}^{\infty} u_0^{(k)} \frac{t^{k+r}}{(k+r)!}$$

Si può dunque riscrivere

$$x(x_0, u, t) = e^{At}x_0 + [B|AB|A^2B|\dots|A^{r-1}B|\dots] \begin{bmatrix} u_t^{(-1)} \\ u_t^{(-2)} \\ u_t^{(-3)} \\ \vdots \\ u_t^{(-r)} \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Essendo le funzioni di ingresso lisce ma peraltro non vincolate in alcun modo, esse possono assumere valori arbitrari nell'intervallo  $[0, t]$ . Pertanto, anche i loro integrali valutati al tempo  $t$  possono assumere valori arbitrari.

Consideriamo innanzitutto l'insieme degli stati raggiungibili al tempo  $t$  a partire dall'origine  $x(0) = 0$ . Tenendo conto del teorema di Cayley-Hamilton, esso risulta in effetti indipendente da  $t$  e vale

$$\mathcal{R} = \text{Im}(R) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Im}([B \mid AB \mid \cdots \mid A^{n-1}B])$$

L'insieme raggiungibile dall'origine al tempo  $t$  è dunque raggiungibile in effetti in tempo arbitrario, lo stesso stato essendo raggiunto in tempo più breve a costo di un più energico controllo. Questo insieme è poi un sottospazio vettoriale, detto *sottospazio di raggiungibilità* del sistema. La matrice  $R$  viene detta *matrice di raggiungibilità del sistema*.

L'insieme degli stati raggiungibili a partire dallo stato generico  $x(0) = x_0$  al tempo  $t$  è pertanto dato da

$$\mathcal{R}_t(x_0) = \{x = e^{At}x_0 + r, \forall r \in \mathcal{R}\}$$

ed è quindi un iperpiano, parallelo al sottospazio di raggiungibilità, passante per  $e^{At}x_0$ . Al variare di  $t$ , l'insieme raggiungibile descrive una famiglia di iperpiani paralleli, la cui unione costituisce l'insieme degli stati raggiungibili.

Si noti che l'insieme dei punti raggiungibili è l'intero spazio di stato nel caso in cui  $\dim(\mathcal{R}) = \text{rank}(R) = n$ ; tutti gli stati sono in effetti raggiungibili in tempo arbitrariamente piccolo. In questo caso, il sistema stesso si dice *completamente raggiungibile*.

### 3.1.2 Sistemi LTITD

Consideriamo l'insieme di raggiungibilità per il sistema

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0 \quad (3.2)$$

La soluzione della equazione alle differenze (3.2) (che indicheremo con  $x(x_0, u, t)$ ) è data da

$$x(x_0, u, t) = A^t x_0 + \sum_{k=0}^{t-1} A^{t-k-1} B u(k)$$

che si può riscrivere nella forma

$$x(x_0, u, t) = A^t x_0 + [B \mid AB \mid A^2 B \mid \cdots \mid A^{t-1} B] \begin{bmatrix} u(t-1) \\ u(t-2) \\ u(t-3) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix}$$

Consideriamo innanzitutto l'insieme degli stati raggiungibili in  $t$  passi a partire dall'origine  $x(0) = 0$ :

$$\mathcal{R}_t = \text{Im} (R_t) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Im} ([ B \mid AB \mid \cdots \mid A^{t-1}B ])$$

che, in modo del tutto analogo al caso TC, viene detto *sottospazio di raggiungibilità in  $t$  passi* del sistema, mentre la matrice  $R$  viene detta *matrice di raggiungibilità in  $t$  passi del sistema*.

È evidente che il sottospazio di raggiungibilità in  $t+1$  passi  $\mathcal{R}_{t+1}$  contiene  $\mathcal{R}_t$ , e che quindi la successione definita dalle dimensioni dei sottospazi di raggiungibilità al crescere del numero di passi è non decrescente; essa è peraltro superiormente limitata dalla dimensione dello spazio di stato  $n$ , per cui la successione si stabilizzerà in un valore finito. Per il teorema di Cayley–Hamilton, il sottospazio di raggiungibilità in un numero arbitrariamente grande di passi può essere calcolato arrestandosi all' $n$ -esimo passo,

$$\mathcal{R} = \text{Im} (R) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Im} ([ B \mid AB \mid \cdots \mid A^{n-1}B ]).$$

Questo viene detto *sottospazio di raggiungibilità del sistema*, mentre la matrice  $R$  viene detta *matrice di raggiungibilità del sistema*. Ogni stato raggiungibile a partire dall'origine in un numero qualsiasi di passi può essere anche raggiunto in non più di  $n$  passi.

L'insieme degli stati raggiungibili a partire dallo stato generico  $x(0) = x_0$  al tempo  $t$  è pertanto dato da

$$\mathcal{R}_t(x_0) = \{x = A^t x_0 + r, \forall r \in \mathcal{R}_t\}$$

ed è quindi ancora un iperpiano, parallelo al sottospazio di raggiungibilità, passante per  $A^t x_0$ .

L'insieme dei punti raggiungibili è l'intero spazio di stato nel caso in cui  $\dim(\mathcal{R}) = \text{rank}(R) = n$ . In tal caso, il sistema stesso si dice *completamente raggiungibile*.

### 3.1.3 Controllabilità all'origine

Un particolare interesse riveste talvolta il raggiungimento dell'origine dello spazio degli stati, che rappresenta spesso la condizione di riposo o di riferimento per il sistema. Si definisce per questo motivo un ulteriore insieme, l'insieme degli stati *controllabili a zero* al tempo  $t$  come

$$\mathcal{C}_t = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n \mid \exists u \in U : x(\bar{x}, u, t) = 0\}.$$

Esplicitando la definizione nel caso LTITD, si ha

$$0 = A^t \bar{x} + \sum_{k=0}^{t-1} A^{t-k-1} B u(k)$$

ovvero,  $\bar{x}$  è controllabile a zero se  $-A^t \bar{x}$  è raggiungibile dall'origine. Dato uno stato  $\bar{x}$  controllabile a zero in  $t$  passi, ogni stato  $\bar{x} + \tilde{x}$  con  $\tilde{x} \in \ker(A^t)$  lo è anch'esso. L'insieme controllabile a zero in  $t$  passi è dunque un sottospazio vettoriale, dato da

$$\mathcal{C}_t = \{x | x = \hat{x} + \tilde{x}, A^t \hat{x} \in \mathcal{R}_t, \tilde{x} \in \ker(A^t)\}$$

Se ogni stato è controllabile a zero in  $t$  passi, si dice che *il sistema è controllabile a zero in  $t$  passi*. Ciò significa che

$$\text{Im}(A^t) \subseteq \text{Im}(R_t)$$

Se esiste un tempo  $t$  per il quale questa relazione è soddisfatta, il sistema si dice controllabile. Dal teorema di Cayley–Hamilton segue che un sistema è controllabile se e solo se è controllabile in  $n$  passi, quindi se

$$\text{Im}(A^n) \subseteq \mathcal{R} = \text{Im}([B|AB|\dots|A^{n-1}B])$$

Naturalmente, la raggiungibilità implica la controllabilità, ma non viceversa. Ad esempio, un sistema con matrice  $A$  nulla è certamente controllabile, mentre non è raggiungibile a meno che vi siano almeno tanti ingressi quanti stati e  $\text{rank}(B) = n$ . Controllabilità e raggiungibilità nei sistemi LTITD sono sinonimi se  $A$  è nonsingolare.

Nei sistemi LTITC, l'insieme controllabile a zero in tempo  $t$  è definito in modo analogo come l'insieme degli stati che risolvono l'equazione

$$0 = e^{At} \bar{x} + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau$$

quindi, per quanto visto sopra, essendo sempre  $e^{At}$  invertibile  $\mathcal{C}_t = \mathcal{R}_t$ . Nei sistemi tempo–continui, i concetti di controllabilità e raggiungibilità di uno stato sono coincidenti.

### 3.1.4 Raggiungibilità di sistemi non LTI

L'analisi della raggiungibilità per sistemi tempo–varianti e nonlineari in generale è sostanzialmente più complessa che nei casi sinora visti. Daremo perciò

solo alcune indicazioni generali, lasciando lo studio dei casi più generali a corsi più avanzati.

Per un sistema *lineare tempo variante* TC, gli argomenti usati nella dimostrazione della raggiungibilità LTITC possono essere estesi: sviluppando la soluzione di

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad x(0) = x_0 \quad (3.3)$$

con ingresso  $u(t)$  analitico in  $[0, t]$ , si ha

$$x(x_0, u, t) = \sum_{k=0}^{\infty} x^{(k)}(0) \frac{t^k}{k!}$$

dove

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= Ax + Bu \\ x^{(2)} &= A^2x + ABu + B\dot{u} + \dot{A}x + \dot{B}u \\ x^{(3)} &= A^3x + A^2Bu + AB\dot{u} + B\ddot{u} + A\dot{A}x + \dot{A}Ax + \dot{A}Bu + A\dot{B}u + \dot{B}u + \ddot{A}x \\ \vdots &= \vdots \end{aligned}$$

Introducendo l'operatore  $\Delta \stackrel{def}{=} (A - \frac{d}{dt})$ , valutando le derivate in  $t = 0$ , sostituendo e raccogliendo opportunamente si ottiene, per  $x_0 = 0$

$$x(0, u, t) \in \text{Im} \left( [B|\Delta B|\Delta^2 B|\dots|\Delta^{r-1} B|\dots] \right)$$

In questo caso non è detto che si possa arrestare la costruzione della matrice all' $n$ -esimo blocco di colonne.

Per sistemi nonlineari la situazione è più complessa. Si può dimostrare che vale il seguente teorema:

**Teorema.** Se per il sistema  $\dot{x} = f(x, u)$  il sistema linearizzato approssimato attorno a  $\bar{x}, \bar{u}$  ( $f(\bar{x}, \bar{u}) = 0$ ),  $\dot{z} = Az + Bu$  è raggiungibile, allora l'insieme raggiungibile da  $\bar{x}$  contiene un intorno di  $\bar{x}$ .

Quindi, la raggiungibilità (globale) del linearizzato approssimato implica la raggiungibilità (locale) del sistema effettivo. Questa condizione è solo sufficiente: ad esempio, il sistema che rappresenta la cinematica di un veicolo su ruote che avanza con velocità lineare  $u_1 = v$  e angolare  $u_2 = w$ , data da

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \cos \theta \\ v \sin \theta \\ w \end{bmatrix}$$

ha un linearizzato (in un equilibrio qualsiasi) con  $A = 0$  e  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$ , quindi non è raggiungibile. Comunque, il vero sistema è certamente raggiungibile.

## 3.2 Cambiamenti di Coordinate

Le proprietà di raggiungibilità e controllabilità non sono alterate da cambiamenti di coordinate (si dicono per questo proprietà *strutturali*). Si consideri infatti il cambiamento di coordinate  $x = Tz$ , e il sistema  $\mathbb{D}z = T^{-1}ATz + T^{-1}Bu$ , per il quale si ha

$$\hat{R} = [T^{-1}B|T^{-1}ATT^{-1}B|\dots|T^{-1}A^{n-1}TT^{-1}B] = T^{-1}R$$

che ha lo stesso rango di  $R$ . Per la controllabilità, basta osservare che anche  $(T^{-1}AT)^t = T^{-1}A^tT$ , quindi entrambe i membri dell'equazione che definisce il sottospazio di controllabilità a zero sono premoltiplicati per  $T^{-1}$ .

Date due rappresentazioni in coordinate diverse dello stesso sistema raggiungibile, e note le matrici di raggiungibilità nei due casi, è possibile trovare la matrice che trasforma la prima nella seconda. Infatti avendosi  $\hat{R} = T^{-1}R$ , si ha  $\hat{R}\hat{R}^T = T^{-1}R\hat{R}^T$ , da cui (essendo  $\hat{R}$  a pieno rango righe)  $T = R\hat{R}^T (\hat{R}\hat{R}^T)^{-1}$ .

Nel caso SISO,  $R$  e  $\hat{R}$  sono quadrate e invertibili, per cui si ha semplicemente

$$T = R\hat{R}^{-1}$$

Si osservi che, per sistemi SISO, la matrice  $R$  è quadrata di dimensione  $n$ , quindi se la condizione di completa raggiungibilità per il sistema viene ottenuta,  $R$  è invertibile. Nei sistemi MIMO con  $m$  ingressi, invece,  $R \in \mathbb{R}^{n \times nm}$ . La condizione  $\text{rank}([B|AB|\dots|A^{p-1}B]) = n$  può ottenersi per qualche  $p < n$ : il minimo di tali  $p$  si dice indice di raggiungibilità del sistema MIMO (nel caso TD,  $p$  rappresenta il minimo numero di passi con i quali è possibile raggiungere un punto arbitrario). Perchè sia  $p < n$  è necessario e sufficiente che sia  $\text{rank}(B) \geq 2$ .

## 3.3 Scomposizione Standard dei Sistemi

### 3.3.1 Sottospazi invarianti

Un sottospazio vettoriale  $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n$  di dimensione  $n_v$  può essere descritto mediante una sua *matrice di base*  $V$ , cioè una matrice  $n \times n_v$  tale che,  $\forall x_v \in \mathcal{V}, \exists ! y : x_v = Vy$ , ovvero  $\mathcal{V} = \text{Im}(V)$  (notazione: anche  $\mathcal{V} = \mathcal{R}(V)$ ,  $\mathcal{V} = \text{span}(V)$ ).

Supponiamo che un vettore  $x_v \in \mathcal{V}$  sia descritto in certe coordinate correnti. Consideriamo un cambiamento di coordinate  $x = Tz$ , dove  $T = [V|V_c]$

è invertibile, e  $V_c$  rappresenta una matrice  $n \times (n - n_v)$  di colonne indipendenti tra loro e da quelle di  $V$  (cioè una *matrice di base complementare a  $V$  per  $\mathbb{R}^n$* ). Se le nuove coordinate di  $x_v$  sono  $z_v$ , cioè se  $x_v = Tz_v$ , allora le ultime  $n - n_v$  coordinate di  $z_v$  sono nulle.

Infatti, suddividendo a blocchi, si deve poter scrivere

$$\begin{aligned} x_v = Vy &= [ V \mid V_c ] \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = Vz_1 + V_c z_2 \\ \Rightarrow z_1 &= y, z_2 = 0_{n-n_v \times 1} \end{aligned}$$

Un sottospazio  $\mathcal{V}$  si dice invariante rispetto ad una matrice  $A$  se  $\forall x_v \in \mathcal{V}$ , anche  $Ax_v \in \mathcal{V}$ .

Ad esempio, lo spazio generato da un numero qualsiasi di autovettori associati allo stesso autovalore è uno sottospazio invariante; così anche per gli autospazi generalizzati incontrati nella forma di Jordan. L'intero spazio, così come lo spazio banale (comprendente solo l'origine) sono ovviamente spazi invarianti.

Nelle coordinate  $T$  sopra associate ad un sottospazio, se questo è  $A$ -invariante, la matrice  $A$  ha anch'essa struttura a blocchi, e poiché vale

$$\begin{aligned} T^{-1}Ax_v &= \begin{bmatrix} \star \\ 0 \end{bmatrix} = T^{-1}ATz_v = \hat{A}z_v \\ &= \left[ \begin{array}{c|c} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{12} \\ \hat{A}_{21} & \hat{A}_{22} \end{array} \right] \begin{bmatrix} \star \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(dove  $\star$  denota un vettore non nullo in generale la cui espressione qui non interessa), deve essere  $\hat{A}_{21} = 0$ , cioè

$$\hat{A} = \left[ \begin{array}{c|c} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{12} \\ 0 & \hat{A}_{22} \end{array} \right]$$

Questa proprietà delle coordinate adattate ad un sottospazio  $A$ -invariante sono molto utili a caratterizzare l'evoluzione di un sistema.

Se lo stato iniziale di un sistema LTI ( $A, B, C, D$ ) appartiene ad un sottospazio  $A$ -invariante, allora tutta la evoluzione libera appartiene allo stesso sottospazio. Infatti, sia  $e^{At}$  in TC, che  $A^t$  in TD, mantengono la struttura triangolare a blocchi della matrice  $A$  (supponendo di essersi già posti in coordinate adatte).

Date le condizioni iniziali  $x_0$ , il più piccolo sottospazio  $W$  che contiene tutta la evoluzione libera dello stato è dato da

$$W = \text{Im} [ x_0 \mid Ax_0 \mid \cdots \mid A^{n-1}x_0 ]$$

(sottospazio ciclico generato da  $x_0$ ).

Infatti, nel caso TC, si ha

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{At}x_0 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k x_0 \\ &= \left[ x_0 \mid Ax_0 \mid A^2x_0 \mid \cdots \right] \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ \frac{t^2}{2} \\ \vdots \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Per il teorema di Cayley–Hamilton, se  $\pi(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_0$  è il polinomio caratteristico di  $A$ , allora  $\pi(A) = 0$ , quindi  $A^k = -a_0 - \dots - a_{n-1}A^{n-1}$ ; cioè  $A^k$  (e tutte le successive potenze di  $A$ ) sono combinazioni lineari delle prime  $n-1$  potenze; e ciò vale anche a fortiori per  $A^k x_0$ , quindi la tesi.

Nel caso TD, la dimostrazione è del tutto simile, usando la formula della evoluzione libera relativa.

### 3.3.2 Forma Standard di Raggiungibilità

Il sottospazio di raggiungibilità, sia nel caso LTITC che LTITD, ha una importante caratterizzazione geometrica: esso è il più piccolo sottospazio  $A$ -invariante che contiene  $\text{Im}(B)$  (che si denota  $\langle A|B \rangle$ ).

È ovvio infatti che  $\text{Im}([B|AB|\dots|A^{n-1}B])$  contiene  $\text{Im}(B)$  e che è  $A$ -invariante. Inoltre, se  $\mathcal{S}$  contiene  $\text{Im}(B)$  ed è  $A$ -invariante, esso contiene anche  $\text{Im}(A^k B)$ ,  $\forall k$ , e quindi  $\mathcal{S} \supseteq \mathcal{R}$ .

Sia  $T_R \in \mathbb{R}^{n \times r}$  una matrice di base per il sottospazio di raggiungibilità  $\mathcal{R} = \text{Im}(R)$  del sistema LTI

$$\mathbb{D}x = Ax + Bu,$$

e  $T_{\bar{R}} \in \mathbb{R}^{n \times (n-r)}$  una matrice di base complementare. Nelle nuove coordinate descritte da

$$x = Tz \stackrel{\text{def}}{=} \left[ T_R \mid T_{\bar{R}} \right] \begin{bmatrix} z_R \\ z_{\bar{R}} \end{bmatrix}$$

il sistema diviene  $\mathbb{D}z = T^{-1}ATz + T^{-1}B$ , ovvero

$$\begin{bmatrix} \mathbb{D}z_R \\ \mathbb{D}z_{\bar{R}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_R & A_{R\bar{R}} \\ 0 & A_{\bar{R}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_R \\ z_{\bar{R}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_R \\ 0 \end{bmatrix} u$$

dove  $z_R \in \mathbb{R}^r$  e  $z_{\bar{R}} \in \mathbb{R}^{n-r}$ .



In queste coordinate, il sistema è dunque riscritto nella forma

$$\begin{aligned} \mathbb{D}z_R &= A_R z_R + A_{R\bar{R}} z_{\bar{R}} + B_R u \\ \mathbb{D}z_{\bar{R}} &= A_{\bar{R}} z_{\bar{R}} \end{aligned} \quad (3.4)$$

cioè effettivamente scomposto in due sottosistemi, dei quali il secondo, con stato  $z_{\bar{R}}$ , evolve autonomamente (secondo la  $z_{\bar{R}}(t) = e^{A_{\bar{R}}t} z_{\bar{R}}(0)$ , ovvero la  $z_{\bar{R}}(t) = A_{\bar{R}}^t z_{\bar{R}}(0)$ ), quindi non dipende dall'ingresso né direttamente, né indirettamente attraverso lo stato  $z_R$ . Il sottospazio di raggiungibilità del sottosistema  $z_{\bar{R}}$  è vuoto.

Per quanto riguarda il sottosistema con stato  $z_R$  e matrici  $(A_R, B_R)$ , esso è completamente raggiungibile: infatti, la matrice di raggiungibilità dell'intero sistema nelle nuove coordinate è

$$R' = \left[ \begin{array}{c|c|c|c} B_R & A_R B_R & \cdots & A_R^{n-1} B_R \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array} \right] = T^{-1} R$$

quindi, avendo  $R'$  rango  $r$  come  $R$ , le sue prime  $r$  righe, le sole non nulle, sono indipendenti. La presenza del termine incrociato  $A_{R\bar{R}}$  non influenza la raggiungibilità di un arbitrario stato  $z_{\bar{R}}(t)$  desiderato a partire da qualsiasi stato iniziale  $z_{\bar{R}}(0)$  del sottosistema (in tempo  $t$  arbitrario per sistemi TC, e almeno in  $t = r$  passi per sistemi TD), essendo questo sottosistema completamente controllabile.

La forma (3.4) viene detta *forma standard di raggiungibilità* del sistema. Il sottosistema  $(A_R, B_R)$  (o  $(A_R, B_R, C_R = CT_R, D)$  se si include l'equazione di uscita) è detto *sottosistema raggiungibile*; il sottosistema  $(A_{\bar{R}}, B_{\bar{R}}, C_{\bar{R}} = CT_{\bar{R}}, D)$  è detto *sottosistema non raggiungibile*.

La scelta delle matrici di base  $T_R$  e complementare  $T_{\bar{R}}$  è arbitraria: qualsiasi matrice  $T'_R = T_R Q_R$  e  $T'_{\bar{R}} = T_{\bar{R}} Q_{\bar{R}}$ , con  $Q_R \in \mathbb{R}^{r \times r}$  e  $Q_{\bar{R}} \in \mathbb{R}^{(n-r) \times (n-r)}$  invertibili, potrebbero essere usate per costruire la forma standard. Si avrebbe in tal caso  $T' = [T_R Q_R | T_{\bar{R}} Q_{\bar{R}}] = T \text{diag}(Q_R, Q_{\bar{R}})$  e la forma standard risultante

$$\left[ \begin{array}{c} \mathbb{D}w_R \\ \mathbb{D}w_{\bar{R}} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c} Q_R^{-1} A_R Q_R & Q_{\bar{R}}^{-1} A_{R\bar{R}} Q_{\bar{R}} \\ \hline 0 & Q_{\bar{R}}^{-1} A_{\bar{R}} Q_{\bar{R}} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} w_R \\ w_{\bar{R}} \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{c} B_R Q_R \\ 0 \end{array} \right] u$$

che evidentemente ha blocchi diagonali diversi ma simili (algebricamente equivalenti) a quelli ottenuti in altra base. Gli autovalori di  $A_R$  e quelli di  $A_{\bar{R}}$  sono quindi invarianti in numero e in posizione con i cambiamenti di coordinate, e sono quindi proprietà strutturali del sistema. I primi vengono detti *autovalori interni al sottospazio di raggiungibilità*, i secondi *esterni*.

La funzione di trasferimento di un sistema non dipende dalla sua parte non raggiungibile. Infatti,

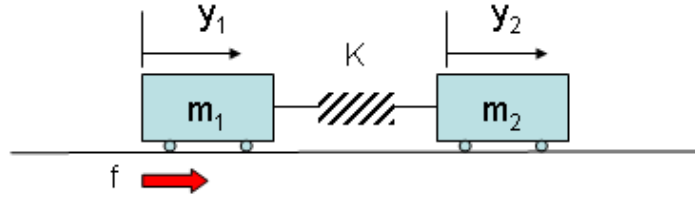
$$\begin{aligned}
 G(s) &= C(sI - A)^{-1}B + D = \\
 &= [C_R \mid C_{\bar{R}}] \left[ \begin{array}{c|c} sI_r - A_R & -A_{R\bar{R}} \\ \hline 0 & sI_{n-r} - A_{\bar{R}} \end{array} \right]^{-1} \begin{bmatrix} B_R \\ 0 \end{bmatrix} + D = \\
 &= [C_R \mid C_{\bar{R}}] \left[ \begin{array}{c|c} (sI_r - A_R)^{-1} & M \\ \hline 0 & (sI_{n-r} - A_{\bar{R}})^{-1} \end{array} \right] \begin{bmatrix} B_R \\ 0 \end{bmatrix} + D = \\
 &= C_R(sI_r - A_R)^{-1}B_R + D
 \end{aligned}$$

(dove  $M$  indica una matrice il cui calcolo esplicito è superfluo).

Il fatto che la f.d.t di un sistema non dipenda dal sottosistema non raggiungibile, e che quindi il sottosistema non raggiungibile non influenzi il rapporto ingresso-uscita, ha importanti implicazioni. In particolare, tra i poli della  $G(s)$  non appariranno gli autovalori di  $A_{\bar{R}}$ : ciò significa che questi ultimi vengono sistematicamente cancellati da zeri coincidenti nella espressione

$$G(s) = \frac{C \operatorname{adj}(sI - A) B}{\det(sI - A)} + D$$

**Esempio:** Consideriamo l'elementare sistema di due masse collegate elasticamente rappresentato in figura.



Indicando con  $y_1$  e  $y_2$  le posizioni delle due masse  $m_1$  e  $m_2$ , e con  $k$  la costante elastica della molla, le equazioni del moto del sistema sono

$$\begin{aligned}
 m_1 \ddot{y}_1 + k(y_1 - y_2) &= f \\
 m_2 \ddot{y}_2 + k(y_2 - y_1) &= 0
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Ponendo  $x_1 = y_1$ ,  $x_2 = y_2$ ,  $x_3 = \dot{y}_1$  e  $x_4 = \dot{y}_2$ , si ha la forma di stato

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -k/m_1 & k/m_1 & 0 & 0 \\ k/m_2 & -k/m_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/m_1 \\ 0 \end{bmatrix} f,$$

Si trova immediatamente

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 1/m_1 & 0 & -k/m_1^2 \\ 0 & 0 & 0 & -k/(m_1 m_2) \\ 1/m_1 & 0 & -k/m_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & -k/(m_1 m_2) & 0 \end{bmatrix},$$

con

$$\det R = -\frac{k^2}{m_1^4 m_2^2}.$$

È dunque facile osservare che si ha completa raggiungibilità se  $k \neq 0$ . Quando invece fosse  $k = 0$ , il sottospazio raggiungibile consiste nelle sole posizioni e velocità della prima massa.

Studiamo adesso il problema usando le trasformate, quindi dal punto di vista ingresso-uscita. Consideriamo due possibili uscite come rispettivamente le posizioni della prima e della seconda massa:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x.$$

Nel caso in cui la misura disponibile sia la posizione  $y_1$  della massa  $m_1$ , la funzione di trasferimento che descrive il sistema è data da

$$Y_1(s) = \frac{m_2 s^2 + k}{s^2 [m_1 m_2 s^2 + (m_1 + m_2)k]} F(s).$$

Per  $k \neq 0$  la funzione di trasferimento non presenta cancellazioni polo - zero, quindi il sistema ha poli coincidenti con i quattro autovalori di  $A$ . Per  $k = 0$ , invece, si hanno due cancellazioni nella funzione di trasferimento, e si ottiene  $Y_1(s) = \frac{1}{m_1 s^2} F(s)$ , ovvero la relazione che esprime nel dominio delle frequenze la legge di moto della massa  $m_1$  soggetta alla sola forza  $f$ . Questa funzione di trasferimento è coprima (cioè non può essere ulteriormente semplificata), quindi il sottosistema raggiungibile ha dimensione due, ed è descritto dagli stati  $y_1$  e  $\dot{y}_1$  (o da loro combinazioni lineari). Gli stati  $y_2$  e  $\dot{y}_2$  sono invece parte del sistema non raggiungibile.

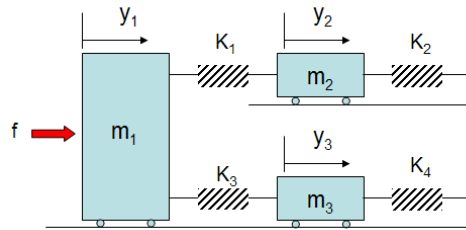
Si consideri ora il caso in cui l'uscita disponibile sia la posizione  $y_2$  della massa  $m_2$ ; la funzione di trasferimento che descrive il sistema è la seguente:

$$Y_2(s) = \frac{k}{s^2 [m_1 m_2 s^2 + (m_1 + m_2)k]} F(s)$$

Per  $k \neq 0$  la funzione di trasferimento non presenta cancellazioni, quindi il sistema è completamente raggiungibile (come già visto per altra via). Per

$k = 0$ , invece, la funzione di trasferimento è nulla. In questo caso osserviamo che, nonostante i due stati  $y_1$  e  $\dot{y}_1$  siano raggiungibili, essi non partecipano al rapporto ingresso uscita. Se ne deduce che la raggiungibilità di un sottosistema è condizione necessaria, ma non sufficiente, alla partecipazione al rapporto ingresso uscita. Questo aspetto richiede quindi un'ulteriore indagine.  $\diamond$

**Esempio:** Si consideri adesso il sistema vibrante in figura



Indicando con  $y_i$  le posizioni della massa  $m_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  le equazioni del moto del sistema sono le seguenti:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{y}_1 + k_1(y_1 - y_2) + k_3(y_1 - y_3) &= f \\ m_2 \ddot{y}_2 + k_1(y_2 - y_1) + k_2 y_2 &= 0 \\ m_3 \ddot{y}_3 + k_3(y_3 - y_1) + k_4 y_3 &= 0 \end{aligned}$$

Posto  $x = [y_1 \ y_2 \ y_3 \ \dot{y}_1 \ \dot{y}_2 \ \dot{y}_3]$ , nello spazio di stato si ha

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_1+k_3}{m_1} & \frac{k_1}{m_1} & \frac{k_3}{m_1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{k_1}{m_2} & -\frac{k_1+k_2}{m_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{k_3}{m_3} & 0 & -\frac{k_3+k_4}{m_3} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad B = \frac{1}{m_1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Considereremo come uscita la posizione della prima massa:

$$C = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0].$$

La matrice di raggiungibilità è quindi

$$R = \frac{1}{m_1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -\frac{k_1+k_3}{m_1} & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & \frac{k_1}{m_1} & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & \frac{k_3}{m_1} & 0 & c \\ 1 & 0 & -\frac{k_1+k_3}{m_1} & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & \frac{k_1}{m_2} & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & \frac{k_3}{m_3} & 0 & c & 0 \end{bmatrix}$$

dove si è posto

$$\begin{aligned} a &= \frac{(k_1+k_3)^2}{m_1^2} + \frac{k_1^2}{m_1 m_2} + \frac{k_3^2}{m_1 m_3}, \\ b &= -\frac{k_1}{m_2} \left( \frac{k_1+k_3}{m_1} + \frac{k_1+k_2}{m_2} \right), \\ c &= -\frac{k_3}{m_3} \left( \frac{k_1+k_3}{m_1} + \frac{k_3+k_4}{m_3} \right). \end{aligned}$$

Mediante scambio di righe o colonne (operazioni che non cambiano il rango di una matrice), si può riscrivere

$$R = \frac{1}{m_1} \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix},$$

dove

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{k_1+k_3}{m_1} & a \\ 0 & \frac{k_1}{m_2} & b \\ 0 & \frac{k_3}{m_3} & c \end{bmatrix}.$$

$R$  perde rango esattamente dove perde rango  $M$ , cioè quando

$$c \frac{k_1}{m_2} - b \frac{k_3}{m_3} = 0,$$

ovvero quando

$$\frac{k_1 k_3}{m_2 m_3} \left( \frac{k_1 + k_2}{m_2} - \frac{k_3 + k_4}{m_3} \right) = 0,$$

da cui

- se  $k_1 \neq 0$ ,  $k_3 \neq 0$ , e  $\frac{k_1+k_2}{m_2} \neq \frac{k_3+k_4}{m_3}$ , il sistema è completamente raggiungibile da  $f$ ;
- se  $k_1 = 0$  e  $k_3 \neq 0$ , oppure se  $k_1 \neq 0$  e  $k_3 = 0$ , il sottosistema non raggiungibile ha dimensione due;
- se  $k_1 \neq 0$ ,  $k_3 \neq 0$ , ma  $\frac{k_1+k_2}{m_2} = \frac{k_3+k_4}{m_3}$ , il sottosistema non raggiungibile ha ancora dimensione due.

---

◇

### 3.4 Lemma P.B.H.

La condizione di completa raggiungibilità è verificabile per ispezione diretta delle matrici del sistema in alcuni casi.

Se la matrice dinamica  $A$  di un sistema SISO è diagonale,  $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ , la matrice di raggiungibilità è

$$R = \begin{bmatrix} B_1 & \lambda_1 B_1 & \lambda_1^2 B_1 & \cdots & \lambda_1^{n-1} B_1 \\ B_2 & \lambda_2 B_2 & \lambda_2^2 B_2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} B_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ B_n & \lambda_n B_n & \lambda_n^2 B_n & \cdots & \lambda_n^{n-1} B_n \end{bmatrix}$$

Perchè questa sia di pieno rango, è necessario che tutte le componenti di  $B$  siano diverse da zero, e che tutti gli autovalori siano distinti (si avrebbero altrimenti righe nulle o righe proporzionali). Queste condizioni sono anche sufficienti: infatti si può riscrivere

$$R = \text{diag}(B_1, B_2, \dots, B_n) \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

ed il determinante della matrice a destra (che è una matrice di Vandermonde) non si annulla per  $\lambda_i$  distinti.

Nel caso più generale di sistema MIMO con forma di Jordan nota, la verifica di raggiungibilità può essere fatta ricorrendo al *Lemma P.B.H.* (Popov, Belevitch, Hautus):

**Teorema** Il sistema LTI con matrici  $(A, B)$  è raggiungibile se e solo se la matrice

$$P(\lambda) = [ \lambda I - A \mid B ] \quad (3.6)$$

ha rango pieno per ogni  $\lambda \in \mathbb{C}$ .

*Dimostrazione.* Basterà considerare  $\lambda = \lambda_i \in s(A)$ ,  $\forall i$ . Supponiamo che per qualche  $\lambda_i$ ,  $\text{rank}(P(\lambda_i)) < n$ : allora esisterà un vettore  $q \neq 0$  tale che  $q^T P(\lambda_i) = 0$ , ovvero tale che al contempo

$$q^T B = 0 \quad \text{e} \quad q^T A = \lambda_i q^T \quad (3.7)$$

Postmoltiplicando la seconda per  $B$ , si ha

$$q^T AB = \lambda_i q^T B = 0$$

e postmoltiplicando per  $AB$  si ha

$$q^T A^2 B = \lambda_i q^T AB = 0$$

Iterando questa procedura, si trova che

$$q^T [ B \mid AB \mid \cdots \mid A^{n-1} B ] = 0$$

per cui  $R$  non ha rango  $n$ , e il sistema non è raggiungibile.

Di converso, supponiamo che il sistema non sia raggiungibile; senza perdere in generalità possiamo assumere che  $A, B$  siano in forma standard di raggiungibilità, e dobbiamo far vedere che, se  $A_{\bar{R}}$  ha dimensione  $n - r > 0$ , allora esiste un  $\bar{q}$  che soddisfa (3.7).

Per questo  $\bar{q}$  sarà

$$\bar{q}^T B = \bar{q}^T \begin{bmatrix} B_R \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \bar{q}^T = [ 0 \mid \bar{q}_R^T ]$$

e inoltre basterà scegliere

$$\bar{q}_R^T A_{\bar{R}} = \lambda_i \bar{q}_R^T$$

Applichiamo il lemma PBH al caso di una coppia  $(A, B)$  con  $A$  in forma di Jordan, con  $p$  miniblocchi:

$$A = \left[ \begin{array}{cccc|c|cccc} \lambda_1 & 1 & \cdots & 0 & & & & & \\ 0 & \lambda_1 & \cdots & 0 & \cdots & & & & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_1 & & & & & \\ \hline & & & 0 & \ddots & & & & 0 \\ \hline & & & & & & \lambda_p & 1 & \cdots & 0 \\ & & & & & & 0 & \lambda_p & \cdots & 0 \\ & & & 0 & \cdots & & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ & & & & & & 0 & 0 & \cdots & \lambda_p \end{array} \right]; \quad B = \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{12} \\ \vdots \\ B_{1,m_1} \\ \hline \vdots \\ B_{p,1} \\ B_{p,2} \\ \vdots \\ B_{p,m_p} \end{bmatrix}$$

Risulta che, per essere raggiungibile, le ultime righe  $B_{i,m_i}$  per ogni miniblocco corrispondente ad autovalori coincidenti, devono essere linearmente indipendenti. Infatti la matrice  $\lambda_i I - A$  ha tante righe nulle quante sono i miniblocchi associati a  $\lambda_i$ , cioè la molteplicità geometrica  $\mu_i$  di  $\lambda_i$ , ed il rango di  $P(\lambda_i)$  non diminuisce se e solo se le corrispondenti righe estratte da  $B$  hanno rango  $\mu_i$ .

In particolare, per un sistema SISO, è necessario che la molteplicità geometrica di tutti gli autovalori sia pari a uno, e che  $B$  abbia almeno tanti elementi diversi da zero quanti gli autovalori distinti di  $A$

Se in un sistema SISO vi sono più catene di autovalori generalizzati corrispondenti ad uno stesso autovalore, solo i modi di (al più) la più lunga di queste catene potranno apparire nella risposta forzata del sistema. In altri termini, nella f.d.t. il polo corrispondente apparirà con molteplicità pari (al più) alla dimensione del miniblocco di ordine più elevato.

**Esempio:** Per il sistema

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix}^T; \quad D = 0$$

si ha

$$G(s) = \frac{C \begin{bmatrix} (\lambda+1)^2 & (\lambda+1) & 0 \\ 0 & (\lambda+1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda+1)^2 \end{bmatrix} B}{(\lambda+1)^3} = \frac{C_1 B_2 + (C_1 B_1 + C_2 B_2 + C_3 B_3)(\lambda+1)}{(\lambda+1)^2}$$

Un sistema con  $\mu_i$  miniblocchi associati ad un unico autovalore  $\lambda_i$  può essere raggiungibile solo se ha almeno  $\mu_i$  ingressi.

### 3.5 Forma canonica di controllo

Si consideri un sistema SISO con matrici  $(A_c, B_c)$  nella particolare forma

$$A_c = \left[ \begin{array}{c|cccc} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \hline -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{array} \right]; \quad B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

La forma di  $A_c$  si dice *compagna orizzontale inferiore*. Il polinomio caratteristico (o *compagno*)  $\pi_c(s)$  di una matrice  $A_c$  di dimensione  $n$  in questa forma, si può calcolare ricorsivamente sviluppando il determinante secondo



gli elementi della prima colonna:

$$\begin{aligned} \pi_c(s) = \det(sI - A_c) &= \det \left( \left[ \begin{array}{c|cccc} s & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \\ \hline a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & s + a_{n-1} \end{array} \right] \right) = \\ &= (-1)^{n-1} a_0 (-1)^{n-1} + s \det(sI - A_{c,n-1}) = \\ &= a_0 + s \det \left( \left[ \begin{array}{c|cccc} s & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \\ \hline a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & s + a_{n-1} \end{array} \right] \right) \end{aligned}$$

da cui

$$\pi_c(s) = a_0 + a_1 s + \cdots + a_{n-1} s^{n-1} + s^n.$$

I coefficienti dell'ultima riga della forma compagna orizzontale inferiore sono quindi i coefficienti del polinomio caratteristico della matrice stessa, ordinati secondo le potenze crescenti di  $s$  da sinistra a destra e cambiati di segno.

La matrice di raggiungibilità per il sistema  $(A_c, B_c)$  vale

$$R_c = \left[ \begin{array}{c|cc|c|c|c} 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \star \\ 0 & 0 & 1 & \star & \star \\ 0 & 1 & -a_{n-1} & \star & \star \\ 1 & -a_{n-1} & -a_{n-2} + a_{n-1}^2 & \star & \star \end{array} \right]$$

(dove  $\star$  indica elementi il cui calcolo esplicito è tralasciato), che è invertibile. Un sistema in questa forma è quindi sempre raggiungibile, a prescindere dai valori dei coefficienti del polinomio caratteristico.

Ricordiamo che il polinomio caratteristico di una matrice  $A$  non cambia per trasformazioni di similitudine  $T^{-1}AT$  (la similitudine non cambia infatti gli autovalori di una matrice, che sono le radici del polinomio caratteristico stesso). Infatti

$$\begin{aligned} \det(sI - T^{-1}AT) &= \det(sT^{-1}T - T^{-1}AT) = \det(T^{-1}) \det(sI - A) \det(T) \\ &= \det(T^{-1}) \det(T) \det(sI - A) = \det(sI - A) \end{aligned}$$

Dato quindi un qualsiasi altro sistema SISO  $(A, B)$  che abbia lo stesso polinomio caratteristico di  $A_c$  con matrice di raggiungibilità  $R$ , si ha:

- se  $(A, B)$  è algebricamente equivalente a  $(A_c, B_c)$  (ovvero  $A = TA_cT^{-1}$ ,  $B = TB_c$ ), allora è raggiungibile: infatti  $R = TR_c$  ha rango pieno;
- Se  $(A, B)$  è raggiungibile,  $R$  ha rango pieno, quindi esiste una  $T$  invertibile, data da  $T = RR_c^{-1}$ , che trasforma le coordinate in modo tale da avere  $T^{-1}AT = A_c$ ,  $T^{-1}B = B_c$ .

In altri termini, data una coppia  $(A, B)$ , si consideri l'insieme di tutte le coppie  $(Q^{-1}AQ, Q^{-1}B)$  al variare di  $Q$  matrice invertibile. Ognuna di queste coppie ha gli stessi autovalori e le stesse caratteristiche di raggiungibilità. Se  $(A, B)$  è completamente raggiungibile, allora esiste una unica  $Q$  tale che  $Q^{-1}AQ = A_c$  e  $Q^{-1}B = B_c$ , che rappresenta in modo canonico, cioè unico, tutto l'insieme di sistemi equivalenti.

La forma  $(A_c, B_c)$  in cui possono essere messi tutti e soli i sistemi completamente raggiungibili si chiama *canonica di controllo*.

La matrice  $R_c^{-1}$  ha una forma particolare (detta di Hankel) di facile memorizzazione (verificare per esercizio):

$$R_c^{-1} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_2 & a_3 & \cdots & 1 & 0 \\ a_3 & a_4 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sulla base di queste osservazioni, è facile portare un sistema LTI raggiungibile SISO  $(A, B, C, D)$  nella forma canonica di controllo. Si procede infatti come segue:

1. Si costruisce la matrice di raggiungibilità  $R$  e se ne verifica l'invertibilità;
2. Si calcola il polinomio caratteristico di  $A$ ,  $\det(sI - A) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0$ ;
3. Con i coefficienti del polinomio caratteristico si costruiscono le matrici  $A_c$  e  $R_c$ ;
4. Si calcola  $T = RR_c^{-1}$ ;
5. Si trova  $C_c = CT$ .

Si ricorda che la matrice  $D$  rimane invariata per cambiamento di variabili di stato.

Ricordiamo che, dato un sistema SISO in forma normale

$$\mathbb{D}^n y(t) = \sum_{i=0}^{n-1} -a_i \mathbb{D}^i y(t) + \sum_{i=0}^n b_i \mathbb{D}^i u(t)$$

ovvero in forma di f.d.t.

$$Y(s) = \frac{b_0 + b_1 s + \dots + b_n s^n}{a_0 + a_1 s + \dots + a_n s^n} U(s)$$

si può porlo in forma di stato direttamente ponendo

$$\mathbb{D}z = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_m & -a_{m+1} & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [b_0 - b_n a_0 \quad b_1 - b_n a_1 \quad b_2 - b_n a_2 \quad \dots \quad b_{n-1} - b_n a_{n-1}] x + [b_n] u$$

Dato un sistema LTI SISO in forma normale, è dunque sempre possibile scrivere un sistema in forma di stato con matrici  $(A, B, C, D)$  ad esso equivalente con  $(A, B)$  in forma canonica di controllo (quindi raggiungibile). “Equivalente” si intende nel senso che, dato un ingresso e delle condizioni iniziali per il primo, esistono degli stati iniziali tali per cui l’uscita del secondo sistema corrispondente allo stesso ingresso è la stessa.

**Esempio:** Data l’equazione  $\ddot{y} + y = 2u + \dot{u}$ , un sistema in forma di stato che la realizza (in forma canonica di controllo) è

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \\ C &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = 0. \end{aligned}$$

Lo stesso rapporto ingresso-uscita è realizzato anche ad esempio ponendo  $x_1 = y$ ,  $x_2 = \dot{y}$  e  $x_3 = y + \dot{y}$ , quindi dal sistema

$$\begin{aligned} A' &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B' = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \\ C' &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D' = 0 \end{aligned}$$

In questo secondo caso però la coppia  $(A', B')$  non è raggiungibile.



# Capitolo 4

## Pianificazione Ottima

Come già discusso nel capitolo precedente, qualora il problema di raggiungimento di uno stato  $x$  a partire da  $x_0$  abbia soluzione per un qualche  $t$ , esso può averne infinite. Si desidera in questo capitolo studiare tecniche per scegliere una tra queste possibili soluzioni. La scelta potrà essere fatta ad esempio seguendo un criterio di ottimalità - la massimizzazione di una prestazione, o la minimizzazione di un costo. Vedremo anche che talvolta la scelta dell'ingresso può essere soggetta a vincoli imposti sugli ingressi o sulla evoluzione degli stati del sistema, e accenneremo ai metodi per trattare questi problemi.

### 4.1 Minimizzazione del costo di controllo

Inizieremo dal caso in cui il problema sia quello di minimizzare un costo, rappresentato dalla norma del segnale di ingresso applicato, senza alcun altro vincolo che il raggiungimento del valore desiderato dello stato al tempo richiesto. In particolare, consideriamo come costo istantaneo il quadrato della norma dell'ingresso applicato ovvero, per controlli in TC applicati tra  $t = 0$  e  $t = T_f$ ,

$$\|u(\cdot)\|_{2_{[0, T_f]}}^2 = \int_0^{T_f} u^T(\tau) W_u u(\tau) d\tau$$

e in TD, per controlli applicati agli istanti  $t = kT_s$ , con  $k$  intero tra 0 e  $N$ ,

$$\|u(\cdot)\|_{2_{[0, N]}}^2 = \sum_{k=0}^N u^T(k) W_u u(k).$$

In queste espressioni, la matrice simmetrica e positiva definita  $W_u$  rappresenta un fattore di peso relativo tra i diversi ingressi di un sistema MIMO,

utile ad esempio per esprimere correttamente norme di ingressi MIMO i cui canali abbiano dimensioni fisiche diverse. In generale, possiamo pensare che le matrici di peso varino nel tempo (scrivendo quindi  $W_u(k)$  nelle espressioni precedenti), restando sempre comunque simmetriche e p.d..

#### 4.1.1 Sistemi LTITD

Per portare il sistema al tempo  $NT_s$  nello stato finale desiderato  $x_f$ , si deve risolvere l'equazione

$$x_f - A^N x_0 = R_N U_N \quad (4.1)$$

nel vettore incognito  $U_N = [u(N-1) \cdots u(0)]^T$ . Supponendo che una soluzione esista (cioè che  $(x_f - A^N x_0) \in \mathcal{R}_N$ ), si desidera trovare

$$\begin{aligned} \hat{U}_N &= \arg \min_{U_N} \|U_N\|_2 \\ \text{oggetto a} &\quad \bar{x} - A^N x_0 = R_N U_N, \end{aligned} \quad (4.2)$$

dove  $\|U_N\|_2$  indica una norma quadratica, eventualmente pesata, del vettore sequenza di ingressi  $U_N$ . Si tratta quindi di un problema di minimo con vincolo di uguaglianza, che è essere risolto con la tecnica dei moltiplicatori di Lagrange:

$$L(U_N, \lambda) = U_N^T W U_N + \lambda^T (\bar{x} - A^N x_0 - R_N U_N)$$

dove  $W = \text{diag} (W_u(N-1) \cdots W_u(0))$  è una matrice di pesi<sup>1</sup>.

Ponendo uguale a zero il differenziale di questa espressione rispetto alla incognita  $U_N$ ,

$$\frac{\partial L}{\partial U_N} = 2U_N^T W - \lambda^T R_N = 0$$

si ottiene

$$U_N = \frac{1}{2} W^{-1} R_N^T \lambda,$$

che sostituita nella soluzione al tempo  $NT_s$  dà

$$\bar{x} - A^N x_0 = \frac{1}{2} R_N W^{-1} R_N^T \lambda,$$

---

<sup>1</sup>Il ruolo dei pesi in  $W$  è di particolare importanza nel caso in cui vi siano multipli ingressi, in cui ciascuno può avere rilievo diverso nel costo totale. Si noti che nel caso MIMO il vettore della sequenza di ingressi  $U_N$  contiene sia i valori del primo ingresso che quelli del secondo etc., in un ordine da noi deciso ma rispettato dalla struttura data alla matrice  $R$

da cui è possibile (per l'ipotesi di esistenza di una soluzione) risolvere per  $\lambda$ . Se infatti  $R_N$  ha righe indipendenti, si può scrivere

$$\lambda = 2(R_N W^{-1} R_N^T)^{-1} (x_f - A^N x_0)$$

che sostituita nel controllo dà

$$\widehat{U}_N = W^{-1} R_N^T (R_N W^{-1} R_N^T)^{-1} (x_f - A^N x_0) = R_{N,W}^+ (x_f - A^N x_0). \quad (4.3)$$

La matrice  $R_{N,W}^+ = W^{-1} R_N^T (R_N W^{-1} R_N^T)^{-1}$  è la pseudoinversa pesata con  $W^{-1}$  di  $R_N$ <sup>2</sup>

Nel caso in cui  $R_N$  non abbia righe indipendenti, ma resti vero che una soluzione esiste per raggiungere lo stato richiesto, si dovrà utilizzare una formula più generale della pseudoinversa di matrice (vedi Appendice A).

### 4.1.2 Sistemi LTITC

Si desidera risolvere l'equazione

$$x_f - e^{AT_f} x_0 = \int_0^{T_f} e^{A(T_f-\tau)} B U_t(\tau) d\tau$$

nella funzione incognita  $U_t(\cdot)$  definita tra 0 e  $T_f$ . Supponendo che una soluzione esista (cioè che  $x_f - e^{AT_f} x_0 \in \mathcal{R}$ ), si desidera trovare

$$\begin{aligned} \widehat{U}_t &= \arg \min_{U_t} \|U_t\|_2 \\ \text{oggetto a} & \quad x_f - e^{AT_f} x_0 = \int_0^{T_f} e^{A(T_f-\tau)} B U_t(\tau) d\tau \end{aligned}$$

Si tratta quindi di un problema di minimo vincolato di un funzionale rispetto ad una variabile che è una funzione, cioè un problema di calcolo variazionale. Il vincolo può essere messo in conto ancora con la tecnica dei moltiplicatori di Lagrange:

$$\begin{aligned} L(U_t, \lambda) &= \int_0^{T_f} U_t^T(\tau) W_u U_t(\tau) d\tau + \\ & \quad + \lambda^T \left( x_f - e^{AT_f} x_0 - \int_0^{T_f} e^{A(T_f-\tau)} B U_t(\tau) d\tau \right) \\ &= \int_0^{T_f} F(U_t) d\tau + \lambda^T (x_f - e^{AT_f} x_0) \end{aligned}$$

dove  $F(U_t, \lambda) = U_t^T(\tau) W_u U_t(\tau) - \lambda^T e^{A(T_f-\tau)} B U_t(\tau)$ , con  $\lambda$  costante.

<sup>2</sup>Per definizione, la pseudoinversa di una matrice  $M$  di pieno rango righe vale  $M^+ = M^T (M M^T)^{-1}$ .

L'equazione di Eulero per la soluzione del problema variazionale è data da

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{U}_t} - \frac{\partial F}{\partial U_t} = 0$$

che in questo caso, essendo  $F(\cdot)$  indipendente dalle derivate di  $U_t$ , si semplifica in

$$\frac{\partial F}{\partial U_t} = 2U_t^T(\tau)W_u - \lambda^T e^{A(T_f-\tau)}B = 0.$$

Da questa si ottiene

$$U_t(\tau) = \frac{1}{2}W_u^{-1}B^T e^{A^T(T_f-\tau)}\lambda,$$

che sostituita nella soluzione al tempo  $t$  dà

$$x_f - e^{AT_f}x_0 = \frac{1}{2} \left( \int_0^{T_f} e^{A(T_f-\tau)}BW_u^{-1}B^T e^{A^T(T_f-\tau)}d\tau \right) \lambda \stackrel{def}{=} \frac{1}{2}\mathcal{G}_{T_f}\lambda$$

La matrice integrale che appare in questa equazione è detta *Gramiano di raggiungibilità* (al tempo  $t$ , con peso  $W_u$ ) per il sistema. Si può dimostrare che  $\text{rank } \mathcal{G}_{T_f} = \text{rank } R = \text{dim } \mathcal{R}$ ,  $\forall t$ . È quindi possibile (per l'ipotesi di esistenza di una soluzione) risolvere questa equazione per  $\lambda$ : se ad esempio  $\mathcal{G}_{T_f}$  ha rango pieno, cioè se il sistema è completamente raggiungibile, questa soluzione si può scrivere

$$\lambda = 2(\mathcal{G}_{T_f})^{-1}(x_f - e^{AT_f}x_0)$$

che sostituita nel controllo dà

$$\hat{U}_{T_f} = W_u^{-1}B^T e^{A^T(T_f-\tau)}(\mathcal{G}_t)^{-1}(x_f - e^{AT_f}x_0)$$

### 4.1.3 Sistemi LTITC: Campionamento e Approssimazione TD

Per quanto si siano descritti in precedenza gli strumenti teorici della pianificazione ottima in tempo continuo, nella pratica del calcolo la soluzione numerica si ottiene spesso mediante una discretizzazione dell'asse dei tempi. Questo comporta che la legge di controllo in grado di risolvere il problema di pianificazione venga pensata come una funzione anch'essa discretizzata, ad



esempio costante a tratti (a “scalinata”). Inoltre, il modello tempo continuo del sistema deve essere trasformato in un modello tempo discreto, che dovrà approssimare quanto meglio possibile il primo.

Sia  $T_s$  il periodo di discretizzazione considerato. La tecnica nota come “Eulero in avanti” corrisponde alla approssimazione

$$\dot{x} \approx \frac{x_{k+1} - x_k}{T_s},$$

dove  $x_k$  rappresenta lo stato del sistema tempo discreto al passo  $k$ . Sostituendo in (4.5) si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{x_{k+1} - x_k}{T_s} &= Ax_k + Bu_k \\ \implies x_{k+1} &= (T_s A + I) x_k + T_s B u_k \\ \implies x_{k+1} &= A_E x_k + B_E u_k, \end{aligned}$$

avendo definito le matrici del sistema discretizzato come

$$\begin{aligned} A_E &\triangleq T_s A + I \\ B_E &\triangleq T_s B. \end{aligned}$$

Come noto, il modello TD così ottenuto fornisce una buona approssimazione del sistema LTITC solo se  $T_s$  è molto piccolo rispetto alle costanti di tempo della dinamica considerata, il che implica la necessità di un elevato numero di periodi per coprire un intervallo temporale di pianificazione dato, e una pari dimensione del vettore dei valori degli ingressi da calcolare.

Per sistemi LTITC soggetti a ingressi costanti a tratti è possibile utilizzare un metodo di discretizzazione migliore, in grado di produrre valori esatti ad ogni multiplo del tempo di campionamento. Questo modello, detto modello discretizzato *Zero Order Hold* o ZOH, utilizza la formula di soluzione dei sistemi lineari,

$$x(t') = e^{A(t'-t_0)} x(t_0) + \int_{t_0}^{t'} e^{A(t'-t_0-\tau)} B u(\tau) d\tau$$

ponendo  $t_0 = kT_s$ ,  $t' = (k+1)T_s$ . Osservando che, essendo  $u = u(k)$  costante tra  $kT_s$  e  $(k+1)T_s$ , si ha

$$x((k+1)T_s) = e^{AT_s} x(kT_s) + \left( \int_0^{T_s} e^{A(T_s-\tau)} d\tau \right) B u(k)$$

si ottiene il sistema LTITD

$$x_{k+1} = A_Z x_k + B_Z u_k$$

con

$$A_Z = e^{AT_s},$$

e

$$B_Z = \int_0^{T_s} e^{A(T_s-\tau)} d\tau B,$$

per il quale vale l'esatta uguaglianza con il sistema originale tempo continuo agli istanti di campionamento, cioè  $x_Z(kT_s) = x(t = kT_s)$ .

Il calcolo delle matrici  $A_Z$  e  $B_Z$  è reso molto semplice dall'uguaglianza

$$\exp\left(\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix} T_s\right) = \begin{bmatrix} A_Z & B_Z \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad (4.4)$$

dove  $\exp(a) = e^a$ , e gli zeri nella matrice che appare nell'esponenziale sono di dimensioni opportune per rendere la matrice stessa quadrata. La formula è verificata applicando la definizione di esponenziale di matrice,

$$\exp\left(\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix} T_s\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^k \frac{T_s^k}{k!}$$

Osserviamo che, per  $k > 0$ ,

$$\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} A^k & A^{k-1}B \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

mentre per  $k = 0$  si ha la matrice identica. Si ha quindi

$$\exp\left(\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix} T_s\right) = \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} A^k \frac{T_s^k}{k!} & \sum_{k=1}^{\infty} A^{k-1} B \frac{T_s^k}{k!} \\ 0 & I \end{bmatrix}.$$

Vale ovviamente  $e^{AT_s} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k \frac{T_s^k}{k!}$  (per definizione dell'esponenziale di una matrice). Considerando poi la funzione

$$F(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)} d\tau,$$

ed il suo sviluppo di Taylor nell'origine

$$\begin{aligned} F(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} F^{(k)}(0) \frac{t^k}{k!} \\ &= F(0) + F'(0)t + F^{(2)}(0) \frac{t^2}{2!} + \dots \\ &= 0 + (A \int_0^t e^{A(t-\tau)} d\tau + I) \Big|_{t=0} t + (A^2 \int_0^t e^{A(t-\tau)} d\tau + A) \Big|_{t=0} \frac{t^2}{2!} + \dots \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} A^{k-1} \frac{t^k}{k!}, \end{aligned}$$

si ottiene il risultato anticipato.

Questo algoritmo si può applicare in Matlab usando il comando `expm` per l'esponenziale di matrici.

Si può anche direttamente trasformare un sistema LTITC `SysC` in un sistema LTITD `SysD`, campionato con periodo  $T_s$ , con il comando `SysD = c2d(SysC, Ts, Method)`, dove `Method` è una stringa che indica il metodo di discretizzazione utilizzato. Ad esempio, usando `'zoh'` come metodo, le matrici del sistema campionato con ZOH sono ottenute semplicemente con  $A_z = \text{SysD}.a$ ,  $B_z = \text{SysD}.b$ , etc.

## 4.2 Applicazioni ed Estensioni

La raggiungibilità di un sistema implica l'esistenza di una legge di controllo capace di portare il sistema da una condizione iniziale  $x_o$  ad una finale  $x_f$  in un numero di passi al più pari alla dimensione dello spazio di stato per sistemi tempo discreto. Non appena si considera un numero di passi superiore al minimo indispensabile, il numero di soluzioni, ovvero di sequenze di controlli  $u$  capaci di portare il sistema nello stato desiderato, diviene infinito. Si pone pertanto il problema della *Pianificazione Ottima*, ovvero della scelta tra tutti i possibili controlli, di quello capace di minimizzare un costo o massimizzare una prestazione rispettando anche vincoli dati.

Per semplicità, illustreremo queste tecniche con riferimento ad un semplicissimo sistema che prendiamo ad esempio.

**Esempio:** Il sistema meccanico riportato in figura 4.1 è costituito da un carrello di massa  $m$ , da uno smorzatore di costante  $c$  e da una molla di costante  $K$ .

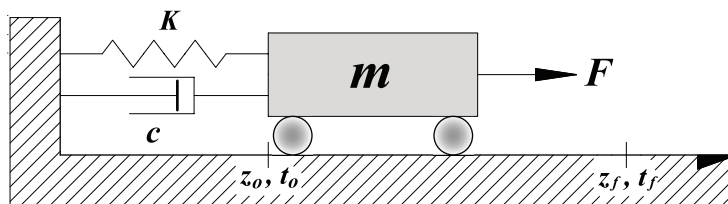


Figura 4.1: Schema meccanico di un sistema massa molla e smorzatore azionato mediante una forza esterna  $F$ .

Il carrello è libero di muoversi su un piano privo di attrito ed è soggetto ad una forza esterna (segnale di controllo)  $F$ . Il sistema è descritto dalla

equazione differenziale ordinaria del secondo ordine

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + Kz = F,$$

in cui  $z$  indica lo scostamento del carrello dalla sua posizione di riposo  $z_o$ . Supponendo per semplicità  $m$ ,  $c$  e  $K$  unitari in opportune unità di misura, e definendo come stato  $x = [z \ \dot{z}]^T$ , il sistema può essere scritto nella consueta forma di stato

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} F,$$

ovvero in notazione matriciale

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{4.5}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Per tale sistema meccanico consideriamo il problema di calcolare la legge di controllo  $u = F(t)$  in grado di portare il carrello da una condizione iniziale  $x_o$  ad una finale data  $x_f$ , ovvero da posizione e velocità date ad altri valori desiderati. 

---

  $\diamond$

### 4.2.1 Minima norma del controllo non vincolato

Problemi di pianificazione ottima a minima norma si presentano ad esempio quando nella scelta della legge di controllo debbano essere tenute presenti considerazioni di carattere energetico - come ad esempio nel caso di satelliti o veicoli autonomi in cui le risorse energetiche, ad esempio carburante o batterie, sono fortemente limitate.

Per sistemi TD, e per le approssimazioni TD di sistemi TC, possiamo agilmente risolvere non solo il problema di pianificazione a norma minima del controllo  $u$ , ma anche determinare quale sia il minimo tempo necessario per trovare una soluzione, applicando la formulazione vista nella sezione 4.1.1.

Considerando l'esempio del sistema carrello-molla-smorzatore, discretizziamolo utilizzando la tecnica "Eulero in avanti" con tempo di campionamento  $T = 0.05$  s, ottenendo

$$A_E = \begin{bmatrix} 1 & 0.05 \\ -0.05 & 0.95 \end{bmatrix}$$

$$B_E = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.05 \end{bmatrix}.$$

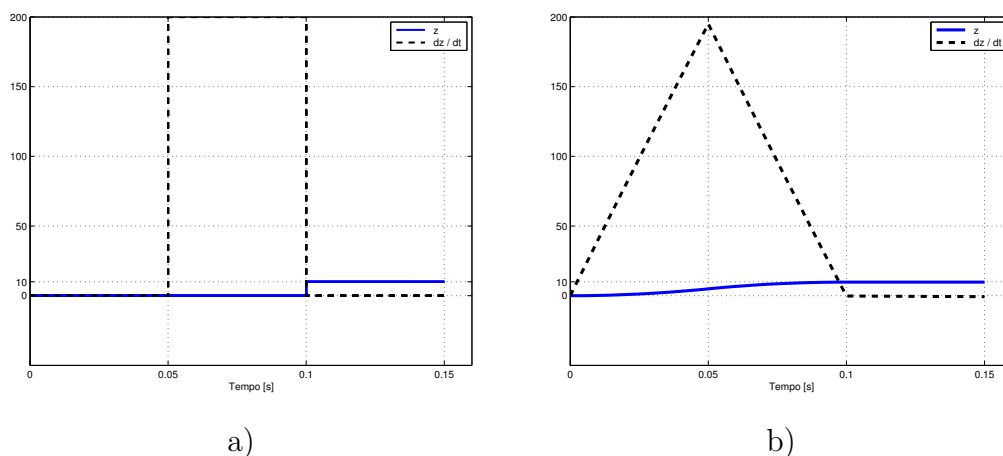


Figura 4.2: Stati del sistema controllato a partire da  $x_o = [0 \ 0]^T$  e con controllo  $U_2$ : a) sistema discreto con Eulero in avanti e  $T_s = 0.05$ ; b) sistema tempo continuo.

Supponiamo di avere come stato iniziale  $x_o = [0 \ 0]^T$ , cioè posizione e velocità nulle, e di voler raggiungere la posizione  $z = 10$  con velocità nulla, cioè  $x_f = [10 \ 0]^T$ . Verificato che la completa raggiungibilità del sistema è conservata attraverso la discretizzazione, lo stato  $x_f$  può essere raggiunto da  $x_o$  in due passi, ma non in uno. Quindi il tempo minimo con questa discretizzazione è  $2T_s = 0.1$  sec. Usando la (4.3) si ottiene:

$$U_2 = \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4000 \\ -3800 \end{bmatrix}.$$

Si fa notare che nella precedente relazione il vettore di controllo è ordinato per tempi crescenti, al contrario di come è fornito dalla (4.3), in modo da rispettare l'ordine temporale con cui i valori sono forniti al sistema. Di seguito si riportano i grafici degli stati per il sistema tempo discreto e per il tempo continuo (fig. 4.2-a,-b).

Come si nota i valori dei controlli sono piuttosto elevati. Questo dipende dal fatto che si è forzato il sistema a raggiungere lo stato finale nel minimo numero di passi possibile. Se si aumenta il numero di passi in cui si desidera raggiungere tale stato senza modificare il tempo di campionamento, si ottengono valori di controllo più bassi e andamenti degli stati più regolari. Queste considerazioni risultano evidenti già con una pianificazione ottima a 6 passi (fig. 4.3 e fig. 4.4-a,-b).

In fig. 4.5 è riportato anche l'andamento del controllo in  $N = 35$  passi, mentre in fig. 4.6-a,-b) i relativi andamenti dello stato dei sistemi tempo discreto e tempo continuo.

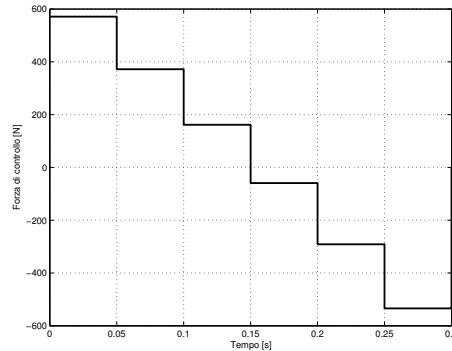


Figura 4.3: Controlli calcolati secondo la legge (4.3) con 6 passi (sistema discretizzato con Eulero in avanti  $T_s = 0.05$  s).

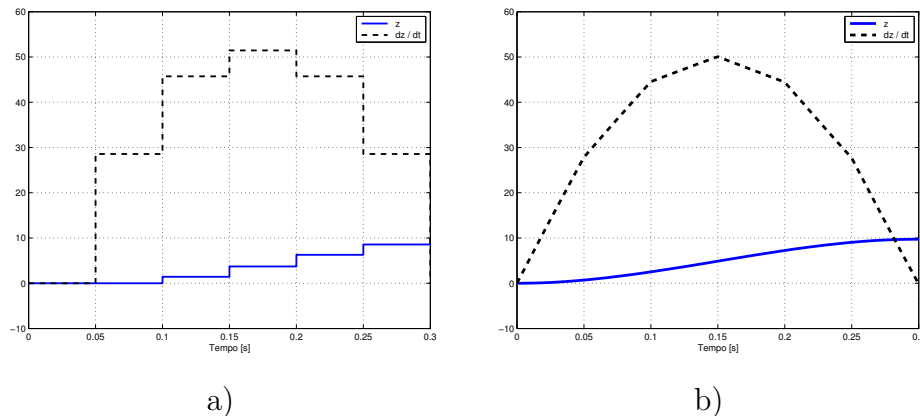


Figura 4.4: Stati del sistema controllato a partire da  $x_o = [0 \ 0]^T$  e con controllo  $U_6$ : a) sistema discretizzato con Eulero in avanti per  $T_s = 0.05$ s; b) sistema tempo continuo.

Come si può facilmente notare dalle figure che illustrano gli andamenti dello stato del sistema ottenuti applicando i tre controlli calcolati per differenti orizzonti temporali ( $N = 2$ ,  $N = 6$  e  $N = 35$  passi), mentre il sistema tempo discreto raggiunge lo stato finale desiderato  $x_f = [10 \ 0]^T$ , il vero sistema tempo continuo non raggiunge mai esattamente lo stato desiderato. L'errore commesso potrebbe essere ridotto diminuendo il tempo di campionamento. Questo porterebbe a un sistema tempo discreto che approssima meglio quello tempo continuo, e aumenterebbe di conseguenza la dimensione della incognita da ottimizzare  $U_N$ .

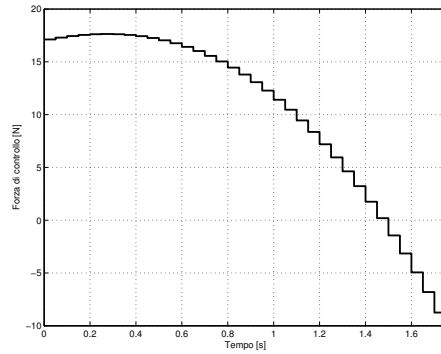
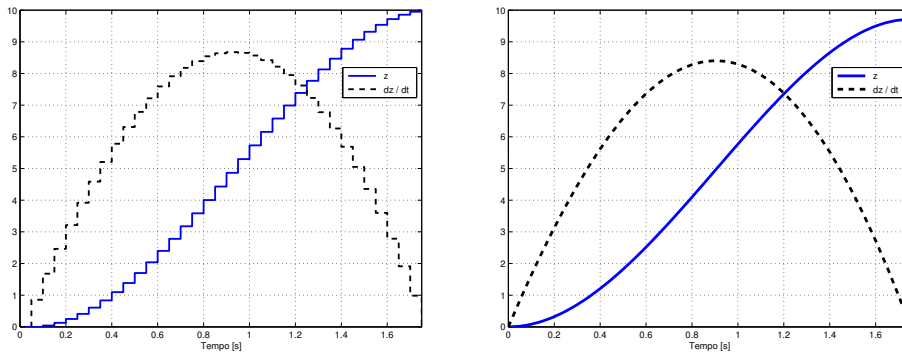


Figura 4.5: Controlli calcolati secondo la legge (4.3) in 35 passi (sistema discretizzato con Eulero in avanti  $T_s = 0.05$  s).



a)

b)

Figura 4.6: Stati del sistema controllato a partire da  $x_o = [0 \ 0]^T$  con controllo  $U_{35}$ : a) sistema discretizzato con Eulero in avanti per  $T_s = 0.05$  s; b) sistema tempo continuo.

Riconsideriamo il sistema massa-molla-smorzatore di fig. 4.1 e discretizziamolo utilizzando questa volta la tecnica Zero Order Hold (ZOH). Scegliendo lo stesso tempo di campionamento  $T_s = 0.05$  s, dalla ((4.4)) otteniamo

$$A_Z = \begin{bmatrix} 0.9988 & 0.0488 \\ -0.0488 & 0.95 \end{bmatrix}$$

$$B_Z = \begin{bmatrix} 0.0012 \\ 0.0488 \end{bmatrix}.$$

A partire dal sistema tempo discreto caratterizzato dalle matrici sopra riportate, usando la (4.3) con numero di passi  $N = 6$  e  $N = 35$ , si ottengono, per il sistema tempo continuo, i risultati riportati in fig. 4.7. Come si può osservare, questa volta il sistema tempo continuo raggiunge esattamente la posizione desiderata (si confronti, ad esempio, la fig. 4.7-b con la fig. 4.6-b). Questo naturalmente è valido per tutti gli istanti multipli del tempo di campionamento  $T_s$ , ma non negli intervalli di tempo tra un campione e l'altro. Il risultato inoltre si basa sull'ipotesi che il controllo  $u_k$  calcolato per l'istante  $t = kT_s$  è applicato costantemente per tutto il tempo fino all'istante di campionamento seguente  $(k + 1)T_s$ .

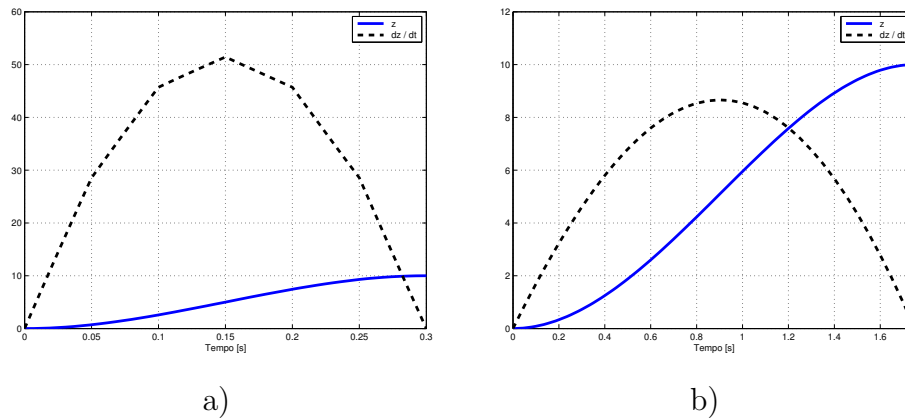


Figura 4.7: Stati del sistema tempo continuo controllato con la sequenza calcolata sulla base del modello tempo discreto ZOH, a partire da  $x_o = [0 \ 0]^T$ : a) controllo  $u_6$ ; b) controllo  $u_{35}$ .

### 4.2.2 Raggiungimento e Mantenimento

I controlli ottenuti fino ad ora risolvono il problema di pianificazione ottima (4.2), permettendo al sistema carrello-molla-smorzatore di raggiungere lo stato desiderato in un prefissato istante (ovvero, numero di passi). Il raggiungimento di un dato stato in generale non garantisce però che il sistema vi si mantenga negli istanti successivi.

Se si vuole che questo succeda, il punto finale  $x_f$  deve essere reso punto di equilibrio per il sistema attraverso il calcolo di un opportuno ingresso  $u_f$  tale che nel modello TC originale valga  $\dot{x} = Ax_f + Bu_f = 0$ , ovvero equivalentemente che, nel modello campionato TD, sia  $x_f = A_d x_f + B_d u_f$  (dove  $A_d$  e  $B_d$  sono il risultato di un metodo di campionamento).



Si noti che non tutti i punti  $x_f$  possono essere resi punti di equilibrio. Perché una coppia  $(x_f, u_f)$  sia di equilibrio, infatti, essa deve risolvere l'equazione precedente, che riscritta in forma matriciale ha la forma

$$\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_f \\ u_f \end{bmatrix} = 0.$$

La matrice  $[A \ B]$  ha  $n$  righe quanti sono gli stati, e  $n + m$  colonne dove  $m$  è il numero di ingressi. Le possibili coppie di equilibrio stanno pertanto nello spazio nullo (kernel) di quella matrice, che ha dimensione  $n_e$ , pari alla somma del numero di ingressi  $m$  e della dimensione dello spazio nullo di  $A$  (ovvero alla molteplicità geometrica degli autovalori nulli di  $A$ ).

Tutte le coppie di equilibrio del sistema possono essere descritte quindi calcolando la base del kernel  $K = \text{null}([A, B])$ , che avrà dimensione  $n_e$ ; partizionando poi la base in blocchi corrispondenti agli stati e agli ingressi di equilibrio, rispettivamente

$$\begin{aligned} Kx &= K(1 : \text{size}(A, 1), :) \\ Ku &= K(\text{size}(A, 1) + 1 : \text{size}(K, 1), :) \end{aligned}$$

e infine, per ogni valore di un parametro  $q \in \mathbb{R}_e^n$ , trovando  $x_f = Kx * q$  e  $u_f = Ku * q$ .

Per soddisfare questo requisito nel nostro esempio, si deve quindi calcolare preliminarmente il valore della forza  $\bar{F}$  di attuazione capace di mantenere il carrello in equilibrio in  $x_f$ , ovvero  $u_f = \bar{F} = Kx_f = 10$  N. Imponendo che lo stato raggiunga l'equilibrio al passo  $p$  (che dovrà essere sufficientemente alto), cioè che sia  $x(p) = x_f$  e  $u(p) = u_f$ , basterà calcolare un ingresso che porti il sistema in  $x_f$  al passo  $p$ , e in seguito applicare costantemente l'ingresso di equilibrio  $u_f$ .

In fig. 4.8 è rappresentato l'andamento dello stato per il sistema tempo continuo. In entrambi i casi, una volta raggiunto lo stato desiderato, viene mantenuto come controllo l'ultimo valore della sequenza. Se il sistema viene controllato con una sequenza di controllo calcolata con la (4.3), allora il sistema una volta raggiunto lo stato desiderato, tende poi ad allontanarsene (fig. 4.8-a). Se al controllo pianificato si aggiunge una sequenza di ingressi pari al valore di mantenimento, si ottiene l'andamento desiderato dello stato (fig. 4.8-b). Si noti che il valore del controllo può presentare forte discontinuità in questo caso (fig. 4.9).

### 4.2.3 Minima norma del controllo e controllo vincolato

Valori troppo elevati del segnale di controllo potrebbero danneggiare il sistema e gli attuatori, o semplicemente potrebbero non essere sviluppabili dagli

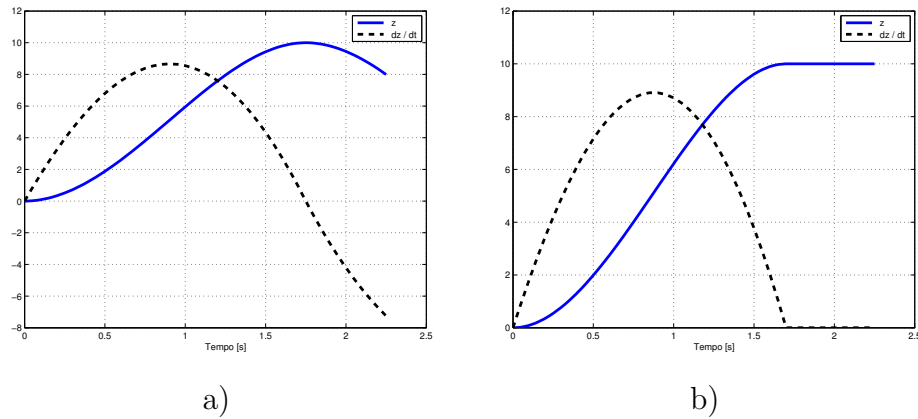


Figura 4.8: Stati del sistema tempo continuo controllato a partire da  $x_0 = [0 \ 0]^T$  ed entrambi con controllo calcolato in  $p = 35$  passi e con la tecnica di discretizzazione ZOH: a) il sistema raggiunge lo stato finale senza mantenerlo (controllo calcolato con la (4.3)); b) il sistema raggiunge lo stato finale e lo mantiene (controllo calcolato con la (??)).

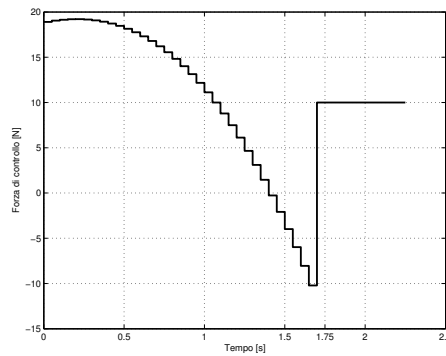


Figura 4.9: Controllo di raggiungimento e mantenimento in  $p = 35$  passi.

attuatori a disposizione. In tali situazioni è utile formulare un problema di ottimizzazione che prevede esplicitamente dei vincoli sul valore massimo dei segnali di controllo.

In presenza di vincoli di disuguaglianza, non possiamo più fare ricorso alla soluzione mediante moltiplicatori di Lagrange e alla pseudoinversa della matrice di raggiungibilità, ma dobbiamo risolvere direttamente il problema

di ottimizzazione vincolata:

$$\min_{U_N} \|U_N\|_2 \quad (4.6)$$

soggetto a:

$$\begin{aligned} \bar{x}_f - A_d^p \bar{x}_0 &= R_p U_N \\ l_b \leq U_N(k) &\leq u_b, \forall k. \end{aligned}$$

Questo problema appartiene alla classe dei problemi di minimi quadrati vincolati linearmente e non può essere così facilmente risolto come i precedenti, ma richiede strumenti di calcolo numerico più complessi. Si noti che l'esistenza stessa di una soluzione non è garantita a priori per nessun numero di passi, se vi sono vincoli sul massimo valore dei controlli applicabili.

`Matlab` mette a disposizione la funzione `lsqlin` per risolvere problemi ai minimi quadrati vincolati linearmente<sup>3</sup>. Se l'applicazione dell'algoritmo non trova soluzioni in un numero  $p$  di passi, si incrementa  $p$  e si prova ancora. In questo modo si può ottenere anche una soluzione del problema di trovare il numero di passi minimo con vincoli sul controllo.

Tornando all'esempio del carrello, imponiamo il vincolo  $-15 \leq u_k \leq 15$  sul controllo. Risolvendo il problema (4.6) per il sistema discretizzato con Eulero in avanti con la funzione `lsqlin` di `Matlab`, si ottengono i risultati riportati nelle fig. 4.10.

#### 4.2.4 Ottimizzazione con pesi e vincoli sugli stati

Nei problemi di pianificazioni finora considerati si sono considerati solamente indici e vincoli sugli ingressi. È peraltro utile talvolta includere nella formulazione del problema anche termini che dipendono dalla evoluzione dello stato - ad esempio per dare un peso allo scostamento da un andamento desiderato della prestazione, oppure per evitare che alcuni stati nella loro evoluzione raggiungano valori inaccettabili.

Sia  $y_q(k) = C_q x(k)$  la combinazione lineare degli stati (cioè l'uscita) che rappresenta la qualità della prestazione, e sia  $\hat{y}_q(k)$  un andamento di riferimento dal quale non si vuole che l'uscita si discosti troppo. Analogamente,

<sup>3</sup>L'algoritmo `lsqlin` risolve problemi ai minimi quadrati della forma

$$\begin{aligned} \min_x \|Cx - d\|_2^2 \quad \text{tale che:} \quad & A \cdot x \leq b \\ & A_{eq} \cdot x = b_{eq} \\ & l_b \leq x \leq u_b, \end{aligned}$$

dove  $C$ ,  $A$  e  $A_{eq}$  sono matrici mentre  $d$ ,  $b$ ,  $b_{eq}$ ,  $l_b$ ,  $u_b$  e  $x$  sono vettori di dimensioni opportune.

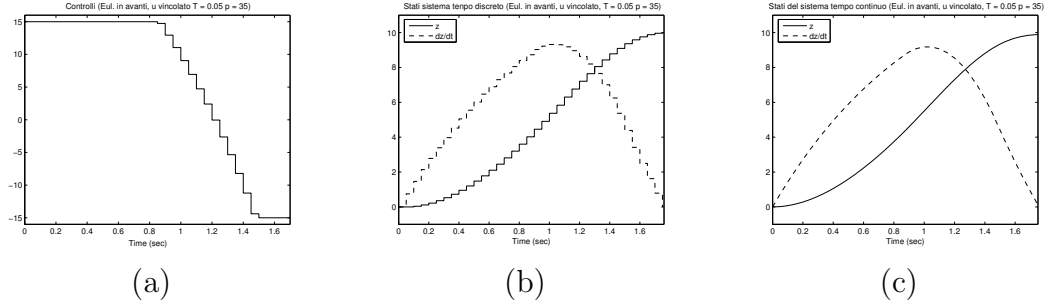


Figura 4.10: Soluzione del problema di minimi quadrati vincolati (4.6) con 35 passi e discretizzazione con Eulero in avanti per  $T = 0.05s$ : a) Controlli; b) Stati del sistema TD; c) Stati del sistema TC.

sia  $y_c(k) = C_c x(k)$  la combinazione degli stati che non si vuole superi dati valori accettabili (inferiori e superiori), ovvero  $\bar{y}_c(k) \leq y_c(k) \leq \overline{\bar{y}}_c(k)$ , per ogni  $k$ . Poniamo  $U = [u(p-1) \ \dots \ u(0)]^T$ , e analogamente facciamo per  $\bar{U}, \overline{\bar{U}}$ . Si ponga poi  $Y_q = [y_q(p) \ \dots \ y_q(1)]^T$ , e in modo analogo a quest'ultimo  $\hat{Y}_q, \bar{Y}_c, \overline{\bar{Y}}_c$ . Il problema di ottimo vincolato può quindi essere formulato come segue:

$$\min_U \quad \rho \|U\|_2^2 + (1 - \rho) \|Y_q - \hat{Y}_q\|_2^2$$

sogetto a:

$$\begin{aligned} \bar{x}_f - A_d^p \bar{x}_0 &= R_p U \\ \bar{U} &\leq U \leq \overline{\bar{U}} \\ \bar{Y}_c &\leq Y_c \leq \overline{\bar{Y}}_c \end{aligned}$$

Il fattore  $\rho$  bilancia il ruolo del controllo e dell'uscita nella formazione dell'indice: per  $\rho = 1$  l'indice coincide con quello del problema (4.6).

Anche il problema (4.2.4) può essere posto come un problema di minimi quadrati con vincoli lineari, e quindi risolto con `lsqlin` di `Matlab`. Per fare questo, l'indice e i vincoli devono essere esplicitati in termini delle variabili di ottimizzazione  $U$ , cosa che può essere fatta agevolmente scrivendo

$$Y_q = \bar{C}_q \begin{bmatrix} x(p) \\ x(p-1) \\ \vdots \\ x(1) \end{bmatrix} = \bar{C}_q A_p x_0 + \bar{C}_q R_p U,$$

dove

$$A_p = \begin{bmatrix} A^p \\ A^{p-1} \\ \vdots \\ A \end{bmatrix}, R_p = \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & \cdots & A^{p-1}B \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & B \end{bmatrix},$$

$\bar{C}_q = \text{diag}(C_q)$ , e analogamente per  $Y_c = \bar{C}_c A_p x_0 + \bar{C}_c R_p U$ .

Tornando all'esempio del carrello e prendendo come uscita di prestazione la velocità  $\dot{z}$ , cioè  $C_q = [0 \ 1]$ , e come valore del peso  $\rho = 0.01$  si ottiene una soluzione in 37 passi come illustrato nella fig. 4.11. Si vede che rispetto alla soluzione analoga in 35 passi trovata per il problema (4.6) la velocità subisce una forte limitazione nella zona centrale (si confronti con la fig. 4.10).

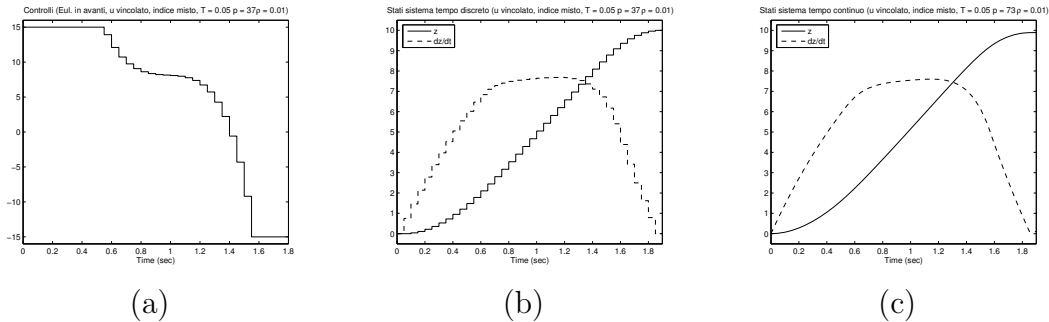


Figura 4.11: Soluzione del problema di ottimizzazione (4.2.4) con vincoli con 37 passi e discretizzazione con Eulero in avanti per  $T = 0.05$ s: a) Controlli; b) Stati del sistema TD; c) Stati del sistema TC.

Per casi ancora più generali, in cui si abbiano dinamiche e vincoli non lineari, o anche si voglia semplicemente minimizzare un indice non quadratico (come il massimo valore delle grandezze in gioco invece che la loro norma due), **Matlab** mette a disposizione una serie di funzioni nel cosiddetto “Optimization Toolbox” tra cui la funzione **fmincon**<sup>4</sup>

<sup>4</sup>L'algoritmo **fmincon** risolve problemi di ottimizzazione con vincoli del tipo

$$\begin{aligned} \min_u \quad & f(x) \\ \text{sogetto a:} \quad & c(x) \leq 0 \\ & c_{eq}(x) = 0 \\ & A \cdot x \leq b \\ & A_{eq} \cdot x = b_{eq} \\ & l_b \leq x \leq u_b, \end{aligned}$$

dove  $f(x)$  è l'indice di costo da minimizzare e può essere in generale rappresentato da una funzione anche non lineare che restituisce uno scalare,  $c$  and  $c_{eq}$  sono funzioni anche non

### 4.2.5 Pianificazione ricorsiva e Model Predictive Control

I metodi di pianificazione sinora visti sono pensati per fornire un andamento nominale degli ingressi da applicare in catena aperta, come una “azione in avanti” o *feedforward*. Naturalmente, la loro applicazione diretta in casi reali nei quali il modello non sia perfettamente noto e/o ci siano perturbazioni sugli stati darebbe luogo a errori nel raggiungimento dello scopo prefissato. A questo si potrà rimediare usando l’andamento dell’ingresso e il corrispondente andamento degli stati o uscite pianificati come riferimenti, rispetto ai quali applicare un controllo in retroazione (*feedback*) secondo quanto in parte visto nel corso e in parte da vedere.

Un modo alternativo di applicare la pianificazione ottima a sistemi reali perturbati è quello di valutare il controllo ottimo (con i vincoli dati) e applicarne solo i primi valori, per poi rivalutarne gli stati effettivamente raggiunti dopo questo primo breve intervallo come fossero le condizioni iniziali di un nuovo problema di ottimo. Ricalcolata in tempo reale la soluzione di questo nuovo problema, in cui il tempo iniziale è aumentato e conseguentemente ha un orizzonte temporale spostato in avanti, se ne applicano solo i primi valori, e così via. Questa tecnica viene detta controllo predittivo, o *model predictive control* (MPC).

Il controllo MPC richiede la capacità di risolvere problemi di ottimizzazione con vincoli in tempi rapidissimi, inferiori alle costanti di tempo dei sistemi controllati. D’altronde, la loro capacità di tenere conto di indici di prestazione complessi e soprattutto di vincoli sugli ingressi e sugli stati li rende utilissimi in molte applicazioni. La sempre maggior disponibilità di capacità di calcolo sta oggi rendendo la tecnica MPC applicabile anche a sistemi meccanici con dinamiche piuttosto veloci.

---

lineari che restituiscono vettori,  $C$ ,  $A$  e  $A_{eq}$  sono matrici mentre  $d$ ,  $b$ ,  $b_{eq}$ ,  $l_b$ ,  $u_b$  e  $x$  sono vettori.

# Capitolo 5

## Retroazione degli stati

Nella grande maggioranza delle applicazioni, il controllo basato esclusivamente sulla esatta conoscenza dello stato iniziale e del modello del sistema (come lo si è visto nel caso della pianificazione in anello aperto) non dà risultati soddisfacenti, in seguito alla presenza di disturbi (che possono alterare lo stato del sistema) e di errori di modello.

Lo strumento principale dell'ingegnere del controllo è la retroazione, cioè l'utilizzo di informazioni provenienti da opportuni sensori sullo stato attuale effettivo del sistema. Tipicamente, come già si è visto nell'introduzione, si dovrà pensare di avere a disposizione solo la conoscenza dei valori di un certo numero di *uscite misurabili*, cioè di note funzioni degli stati incogniti. Per il momento, comunque, supporremo di avere a disposizione la misura di tutti gli stati.

Il concetto di *retroazione degli stati sugli ingressi* per un sistema  $\mathbb{D}x = f(x, u)$  consiste nel realizzare ingressi calcolati istante per istante in funzione dello stato presente:  $u(t) = \alpha(x(t)) + \beta(x(t))v(t)$ . Come già accennato trattando della stabilità, la retroazione è spesso usata al fine di rendere stabile un sistema che originalmente non lo è, ovvero di migliorarne le caratteristiche di stabilità (ad esempio, migliorando la velocità di convergenza).

### 5.1 Retroazione lineare degli stati nei sistemi LTI

Nel caso di sistemi lineari tempo invarianti, se si desidera che il sistema mantenga le sue caratteristiche, anche la retroazione sarà di tipo lineare e tempo invariante, cioè si ha

$$u = Kx + Hv$$

con  $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$  e  $H \in \mathbb{R}^{m \times m}$ .

La matrice  $H$  si assume invertibile (nel caso opposto, alcuni ingressi o loro combinazioni sarebbero di fatto disconnesse dal sistema), e di conseguenza

$$\begin{aligned} \mathbb{D}x &= (A + BK)x + BHv \\ y &= (C + DK)x + DHv \end{aligned}$$

La retroazione cambia il sistema in modo assai importante, ad esempio alterando la posizione degli autovalori. Comunque, la raggiungibilità del sistema non è modificata. Infatti dopo la retroazione si ha

$$R_f = [ BH \mid (A + BK)BH \mid \cdots \mid (A + BK)^{n-1}BH ]$$

dalla quale si può osservare che

$$R_f = [ B \mid AB \mid A^2B \mid \cdots ] \begin{bmatrix} H & KBH & KABH + KBKBH & \cdots \\ 0 & H & KBH & \cdots \\ 0 & 0 & H & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

ed essendo  $H$  invertibile, si ha  $\text{Im}(R_f) = \text{Im}(R)$ .

Gli autovalori esterni al sottospazio di raggiungibilità non vengono alterati dalla retroazione. Infatti, ponendo il sistema in forma standard di raggiungibilità, si ha

$$\begin{aligned} A + BK &= \left[ \begin{array}{c|c} A_R & A_{RN} \\ \hline 0 & A_N \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{c} B_R \\ 0 \end{array} \right] [ K_R \mid K_N ] = \\ &= \left[ \begin{array}{c|c} A_R + B_R K_R & A_{RN} + B_R K_N \\ \hline 0 & A_N \end{array} \right] \end{aligned}$$

Considerando invece le modifiche imposte agli autovalori del sottosistema raggiungibile dalla retroazione, è particolarmente utile considerare il caso SISO in cui le coordinate scelte siano quelle corrispondenti ad una forma canonica di controllo per il sistema (caso che abbiamo visto generale per sistemi raggiungibili).

La matrice di retroazione in questo caso ha dimensione  $1 \times n$ ,  $K = [ k_0 \ k_1 \ \cdots \ k_{n-1} ]$ , e la matrice dinamica retroazionata viene scritta



$$A + BK = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 + k_0 & -a_1 + k_1 & -a_2 + k_2 & \cdots & -a_{n-1} + k_{n-1} \end{bmatrix}$$

Il polinomio caratteristico della matrice diviene pertanto

$$\begin{aligned} \pi(s) = & (a_0 - k_0) + (a_1 - k_1)s + (a_2 - k_2)s^2 + \\ & + \cdots + (a_{n-1} - k_{n-1})s^{n-1} + s^n. \end{aligned}$$

È evidente come, scegliendo opportunamente i coefficienti che appaiono in  $K$ , si possa fare in modo che gli autovalori risultino in posizioni arbitrariamente scelte nel piano complesso (purchè reali o complesse coniugate).

Trovata la retroazione  $K_c$  che alloca i poli nelle posizioni desiderate per le coordinate della forma canonica, si può facilmente scrivere la retroazione direttamente nelle coordinate originali (nelle quali per esempio potrebbero essere date le misure degli stati) ponendo  $K = K_c T^{-1} = K_c R_c R^{-1}$ .

**Esempio.** Sia data

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad C = [1 \ 0 \ 0]; \quad D = 0;$$

Il sistema è raggiungibile:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 6 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

ed ha polinomio caratteristico  $(s^3 - 2s^2 + s - 2)$ , quindi autovalori in 2 e in  $\pm j$ . Le matrici  $A_c, B_c$  in forma canonica di controllo sono quindi

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}; \quad B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Essendo poi

$$R_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}; \quad R_c^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

si ha  $C_c = CT = [-1 \ 0 \ 1]$ .

Se si desidera porre gli autovalori ad esempio in  $-3, -2 \pm j$ , si calcola il nuovo polinomio caratteristico  $s^3 + \sum_{i=0}^2 c_i s^i = s^3 + 7s^2 + 17s + 15$ , e si risolvono in  $k_i$  le equazioni  $-a_i + k_i = -c_i$ , ottenendo  $k_0 = -17, k_1 = -16, k_2 = -9$ . La legge di controllo, espressa nelle originali coordinate, è dunque data da

$$u(x) = K_c T^{-1} x + v = -\frac{1}{3} [22 \ 29 \ 5] [x_1 \ x_2 \ x_3]^T + v$$

### 5.1.1 Formule per l'Allocazione dei Poli

Le procedure di calcolo sopra esposte possono essere riassunte come segue:

Sia dato un sistema SISO  $(A, B)$  con matrice di raggiungibilità  $R$  invertibile, e siano  $a = [a_0, \dots, a_{n-1}]$  i coefficienti del polinomio caratteristico  $\pi(\lambda)$  di  $A$  (quindi,  $\pi(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$ ); sia dato anche un polinomio caratteristico desiderato  $\hat{\pi}(\lambda)$  con coefficienti  $\hat{a} = [\hat{a}_0, \dots, \hat{a}_{n-1}]$ .

La retroazione  $u = Kx$  che fa sì che  $A+BK$  abbia polinomio caratteristico  $\hat{\pi}(\lambda)$  è data da

$$K = (a - \hat{a})R_c R^{-1}$$

con

$$R_c^{-1} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & 1 \\ a_2 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Una formula ancor più semplice per il calcolo di  $K$  è quella detta di Ackermann:

$$K = -[0 \ \cdots \ 0 \ 1] R^{-1} \hat{\pi}(A)$$

dove  $\pi_d(A) = A^n + \hat{a}_{n-1}A^{n-1} + \dots + \hat{a}_1A + \hat{a}_0I$ . Il comando Matlab  $K = -\text{acker}(A, B, p)$ <sup>1</sup> esegue questo algoritmo, avendo posto in  $p$  le posizioni desiderate degli autovalori da allocare.

<sup>1</sup>Si noti il segno meno usato per la diversa convenzione sull'uso di  $K$ , in retroazione positiva in queste note e negativa per Matlab.

Le formule di allocazione dei poli possono essere numericamente instabili per diversi motivi. Innanzitutto, se vengono applicate ad un sistema che sia sì completamente raggiungibile, ma con matrice di raggiungibilità  $R$  malcondizionata, cioè pressochè non invertibile<sup>2</sup>, produrrà ovviamente un risultato molto elevato in termini dei coefficienti che appaiono in  $K$  e molto sensibile a variazioni anche piccole della posizione degli autovalori di partenza e desiderati.

Un secondo caso in cui si ha forte sensibilità dei risultati alle piccole variazioni numeriche dei dati è quello in cui si richieda di allocare più poli in posizioni coincidenti o molto vicine: questo tipo di allocazione è quindi da evitare<sup>3</sup>

Infine, anche al di fuori di questi casi, gli algoritmi diretto e di Ackermann sopra visti possono essere numericamente instabili, e non produce risultati attendibili, per sistemi con un elevato numero di stati (dell'ordine di alcune decine). Esistono algoritmi più robusti numericamente, ad esempio quello realizzato nel comando Matlab  $K = \text{place}(A, B, p)$ .

**Osservazione.** Dalla discussione precedente, risulta che la retroazione degli stati può assegnare dinamica arbitrariamente veloce ad un sistema purché raggiungibile. Naturalmente questo è vero solo all'interno delle ipotesi di validità del modello che stiamo considerando, in particolare della sua linearità e della illimitata autorità del controllo.

Si consideri come esempio un sistema costituito da un veicolo di massa inerziale  $m$ , spinto dalla azione  $u$  di un propulsore, e si consideri come uscita  $y$  la sua velocità. Una retroazione opportuna può piazzare l'autovalore del sistema tanto a sinistra sull'asse reale, da fare in modo che il sistema raggiunga il valore di regime di un gradino di riferimento, ad esempio i  $100Km/h$  dei test stradali, in tempo arbitrariamente piccolo. Questo sarebbe ovviamente ottenuto mediante valori molto elevati di  $K$ , che si traducono in valori elevati del segnale di controllo  $u$  - corrispondenti ad azioni che il propulsore non è in realtà in grado di fornire.

Questo semplice esempio mostra come la saturazione, ed in generale la limitata autorità ed il costo delle azioni di controllo, siano i limiti fisici che si frappongono in realtà all'ottenimento di modifiche arbitrarie alle dinamiche

---

<sup>2</sup>si ricorda che una matrice è malcondizionata quando il rapporto tra il suo valore singolare massimo e quello minimo è molto maggiore di uno. I valori singolari di una matrice  $R$  sono le radici quadrate degli autovalori di  $R^T R$ . Una matrice che ha un valore singolare nullo non è invertibile. Per le matrici normali, ed in particolare per le matrici simmetriche, i valori singolari coincidono con i valori assoluti degli autovalori.

<sup>3</sup>Si consideri come esempio numerico in Matlab  $A = \text{rand}(n, n)$ ;  $B = \text{rand}(n, 1)$ ; con  $v = \text{rand}(1, 1) * \text{ones}(n, 1)$ ; . Già per  $n = 8$ , il comando  $K = \text{acker}(A, B, v)$  restituisce la diagnostica `Warning: Pole locations are more than 10% in error.`

di sistemi reali. Ne segue in generale che la scelta della dinamica da assegnarsi in anello chiuso è da farsi con attenzione alle richieste che ne risultano sugli ingressi, come si vedrà più avanti nel corso.

### 5.1.2 Invarianza degli zeri per retroazione

La f.d.t. di un sistema  $(A, B)$  retroazionato con una matrice  $K$  dipende solo dal suo sottosistema raggiungibile. Scritto questo in forma canonica di controllabilità con matrici  $A_c, B_c, C_c, D_c$ , i coefficienti del polinomio degli zeri sono gli elementi della matrice delle uscite. Poiché la retroazione degli stati in non altera la forma compagna orizzontale inferiore della matrice dinamica  $A_c + B_c K_c$ , anche dopo la retroazione il sistema è in forma canonica, e quindi, restando  $C_c$  invariato, il polinomio degli zeri della f.d.t. non cambia per retroazione. Si deve notare però la possibilità che la retroazione porti un polo a cancellare uno degli zeri.

### 5.1.3 Retroazione degli stati in sistemi a più ingressi

Per un sistema SISO, la allocazione degli autovalori consiste nella soluzione di  $n$  equazioni lineari (una per ogni autovalore) in  $n$  incognite, le componenti della matrice  $K \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ .

Cosa avviene per un sistema MIMO? Se il sistema ha  $m$  ingressi, vi sono  $mn$  incognite per  $n$  equazioni. Se tra le colonne di  $B$  ne esiste una, diciamo  $B_1$ , tale che

$$\text{rank} [ B_1 \quad AB_1 \quad \cdots \quad A^{n-1}B_1 ] = n,$$

per allocare i poli basterà scegliere opportunamente gli elementi  $K_{1,1}, \dots, K_{n,1}$  e porre tutti gli altri a 0 in  $K$  per ottenere lo scopo.

Se, nonostante il sistema sia raggiungibile, non esiste nessuna colonna di  $B$  che da sola può garantire la raggiungibilità, rimane possibile retroazionare gli stati in modo da allocare gli autovalori arbitrariamente mediante il *Lemma di Heymann*. Questo consiste nell'applicare preventivamente al sistema una retroazione  $u = K_{Hi} x + v$  tale che  $(A + BK_{Hi}, B_i)$  sia controllabile, per poi allocare gli autovalori di  $A + BK_{Hi}$  con una ulteriore retroazione  $v = Kx + w$ .

Il lemma di Heymann afferma che una tale matrice esiste, purchè il sistema sia raggiungibile e  $B_i$  sia non nulla, e fornisce la seguente formula per il calcolo della matrice  $K_{Hi}$  (data nel caso  $i = 1$  senza perdere generalità).

Si costruisca la successione di vettori  $B_1, AB_1, A^2B_1, \dots, A^{\nu_1-1}B_1$ , arrendendosi al passo in cui si trova  $A^{\nu_1}B_1$  linearmente dipendente dai precedenti. Si procede in modo analogo con  $B_2$ , calcolando  $B_2, AB_2, \dots, A^{\nu_2-1}B_2$ , arrendendosi al passo in cui si trova  $A^{\nu_2}B_2$  linearmente dipendente da  $B_1, \dots, A^{\nu_1-1}B_1, B_2, \dots, A^{\nu_2-1}B_2$ .

Se necessario, si procede con  $B_3$  etc. sinché si ottiene una matrice invertibile

$$Q = \begin{bmatrix} B_1 & AB_1 & \cdots & A^{\nu_1-1}B_1 & | & B_2 & AB_2 & \cdots & A^{\nu_2-1}B_2 & | & \cdots \\ \cdots & | & B_{p-1} & AB_{p-1} & \cdots & A^{\nu_{p-1}-1}B_{p-1} & | & B_p & AB_p & \cdots & A^{\nu_p-1}B_p \end{bmatrix}$$

Si costruisce inoltre la matrice  $S \in \mathbb{R}^{m \times n}$

$$S = \left[ 0 \quad \cdots \quad 0 \quad e_2 \quad | \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad e_3 \quad | \quad \cdots \quad | \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad e_p \quad | \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 0 \right]$$

dove  $e_i$  è l' $i$ -esima colonna della matrice identità. La matrice di Heymann è  $K_{H1} = SQ^{-1}$  (la dimostrazione è omessa).

Naturalmente, la scelta fatta per la allocazione degli autovalori del sistema MIMO è solo una delle possibili soluzioni, che sono una infinità di dimensione  $(m-1)n$ . La libertà di scelta garantita dai sistemi MIMO può venir sfruttata per raggiungere altri scopi, oltre che la allocazione degli autovalori (ad esempio, alcuni degli autovettori) Questo argomento è oggetto di studio in corsi più avanzati.

Vale la pena notare che, nella condizione in cui si applica il lemma di Heymann, cioè con una coppia  $(A, B)$  raggiungibile per la quale però nessuna colonna  $B_i$  di  $B$  da sola garantisce la raggiungibilità, *quasi* tutte le retroazioni  $K$  dello stato rendono tutte le coppie  $(A + BK, B_i)$  raggiungibili. Con *quasi* si intende precisamente che, scegliendo casualmente la matrice  $K$ , la probabilità di ottenere la proprietà indicata è uno: infatti, gli  $mn$  elementi di una matrice  $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$  che non verificassero la proprietà, dovrebbero soddisfare esattamente una equazione algebrica ( $\det[B_i, (A + BK)B_i, \dots, (A + BK)^{n-1}B_i] = 0$ ), che definisce una varietà di dimensione  $mn - 1$  nello spazio degli elementi di  $K$ , il quale ha ovviamente misura (e quindi probabilità) zero.

Questo suggerisce una rapida procedura di piazzamento dei poli MIMO: si applica prima una retroazione arbitraria  $K$  che renda raggiungibile  $(A + BK, B_i)$ , per poi applicare una successiva retroazione  $K' \in \mathbb{R}^{1 \times n}$  che allочи i poli di  $A + BK + B_i K_i$  nelle posizioni desiderate. Si deve notare che il metodo della scelta casuale della retroazione può portare a coppie  $(A + BK, B_i)$  raggiungibili, ma con piccolo valore singolare minimo, rendendo quindi malcondizionato il successivo problema di allocazione.

Naturalmente, i gradi di libertà di progetto messi a disposizione nella retroazione dello stato di un sistema con più ingressi può essere a frutto in

modo migliore di quanto descritto sinora. Ad esempio, il comando Matlab  $K = \text{place}(A, B, \mathbf{a})$ , che si applica anche a sistemi multi-ingresso, alloca gli autovalori di  $A - BK$  scegliendo tra le infinite retroazioni  $K$  possibili quella che minimizza la sensitività della posizione degli autovalori in anello chiuso alle perturbazioni dei dati del modello, cioè dei coefficienti delle matrici  $A$  e  $B$ .

# Capitolo 6

## Sintesi di Controllori per Sistemi Nonlineari

Le tecniche viste nel capitolo sullo studio della stabilità dei sistemi nonlineari sono molto utili anche nella sintesi di leggi di controllo per sistemi non lineari. In particolare, essendo i robot macchine in cui spesso le caratteristiche non lineari sono importanti, queste tecniche sono molto utili nel loro controllo.

In questo capitolo si vedranno alcuni concetti generali sul controllo basato su tecniche alla Lyapunov, seguito da un certo numero di applicazioni a robot manipolatori e a veicoli robotici, i cui modelli cinematici e dinamici si assumono noti da altri corsi.

### 6.1 Sintesi di algoritmi di controllo con tecniche alla Lyapunov

Si consideri il problema seguente:

Dato un sistema controllato  $\dot{x} = f(x) + g(x)u$ , trovare una legge di *retroazione degli stati sugli ingressi*  $u = u(x)$  tale che, per il nuovo sistema autonomo  $\dot{x} = \hat{f}(x) = f(x) + g(x)u(x)$ , l'origine sia un equilibrio stabile.

Le tecniche di studio della stabilità alla Lyapunov possono essere molto utili per trovare soluzioni semplici a questo problema. Vediamo qualche esempio.

**Esempio:** Per il sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2^3 \\ \dot{x}_2 &= x_1^3 + u\end{aligned}$$

Per  $u \equiv 0$ , l'equilibrio nell'origine è instabile, come si vede dal teorema di instabilità di Lyapunov con candidata  $V(x) = x_1x_2$ . Lasciando libera la scelta dell'ingresso, con la candidata  $V(x) = x_1^2 + x_2^2$  Si ha  $L_fV = 2x_1x_2^3 + 2x_2x_1^3 = 2x_1x_2(x_1^2 + x_2^2)$  e  $L_gV = 2x_2$ . Se si sceglie

$$u(x) = -\frac{2x_1x_2^3 + 2x_2x_1^3}{2x_2} - x_2 = -x_1(x_2^2 + x_1^2) - x_2$$

si ha  $\dot{V} \preceq 0$ . Il controllore proposto in questo caso rende stabile l'origine.  $\diamond$

**Esempio:** Ricerca degli zeri di sistemi di equazioni. Sia  $h(q) = 0$  un sistema di  $n$  equazioni algebriche in  $n$  incognite di cui si desidera trovare una soluzione  $\hat{q}$ . Si supponga di avere una stima iniziale  $q_0$  della soluzione e di poterla modificare con continuità scegliendo una legge di aggiornamento delle stime del tipo  $\dot{q} = u(q)$ . Si desidera che  $q(t)$  converga agli zeri  $\hat{q}$  a partire da  $q_0$ .

Si ponga  $V(q) = \frac{h^T h}{2}$  e quindi  $\dot{V} = h^T \frac{\partial h}{\partial q} u$ :

**A)** scegliendo (dove possibile!)  $u(q) = -k \left( \frac{\partial h}{\partial q} \right)^{-1} h(q)$  si ha  $\dot{V} = -kh^T h = -kV(q)$  n.d.. Questa tecnica è nota come metodo di Newton–Raphson, e garantisce convergenza esponenziale con velocità  $k$ , quindi arbitrariamente veloce al crescere di  $k$ .

**B)** scegliendo  $u(q) = -k \left( \frac{\partial h}{\partial q} \right)^T h(q)$  con  $k > 0$ , si ha  $\dot{V} = -kh^T \frac{\partial h}{\partial q} \frac{\partial h}{\partial q}^T h$  n.s.d.. Questa tecnica è nota nel calcolo numerico come metodo del gradiente (o “steepest descent”).

L'analisi della fattibilità del metodo (A) e l'analisi della convergenza del metodo (B) dipendono dal rango del jacobiano  $\frac{\partial h}{\partial q}$ . In un intorno sufficientemente piccolo di una soluzione isolata del sistema di equazioni, il Jacobiano è certamente invertibile (per il teorema di U. Dini) e non ha uno spazio nullo. Questo non vale in grande: i metodi possono non convergere, o convergere a minimi locali, se la inizializzazione delle stime è lontana dal valore delle radici cercate.  $\diamond$

**Esempio:** Algoritmi di ricerca delle radici di sistemi di equazioni. Riconsideriamo la soluzione di equazioni algebriche nonlineari  $h(q)$ , tenendo adesso conto di una realizzazione algoritmica, necessariamente in tempo discreto.



L'aggiornamento sia dato da  $q(t+1) = q(t) + u(t)$ . Sia ancora  $V(q) = h^T h$ , la differenza direzionale è

$$\Delta V = h^T(q(t+1))h(q(t+1)) - h^T(q(t))h(q(t)).$$

Per  $u(t)$  sufficientemente piccoli, si ha

$$h(q(t+1)) = h(q(t)) + \frac{\partial h}{\partial q} u(t) + O(u^2(t)),$$

quindi

$$\Delta V = 2h^T \frac{\partial h}{\partial q} u(t) + O(u^2(t)).$$

Le scelte

$$u(t) = -k \left( \frac{\partial h}{\partial q} \right)^{-1} h(q(t))$$

ovvero

$$u(t) = -k \left( \frac{\partial h}{\partial q} \right)^T h(q(t))$$

corrispondono alla realizzazione algoritmica dei metodi sopra visti di Newton-Raphson e del gradiente. In entrambe i casi (assumendo sempre la invertibilità del Jacobiano  $\frac{\partial h}{\partial q}$ ) si ha convergenza locale alle radici per  $k$  piccoli. È d'altronde evidente che se si scegliessero  $k$  elevati, come si potrebbe desiderare per avere elevata velocità di convergenza, la analisi di stabilità non è più valida. Questo pone limiti alla effettiva rapidità di convergenza alle soluzioni di questi algoritmi, e induce a una serie di accorgimenti per la scelta della lunghezza del passo  $k$  che formano argomenti dei corsi di calcolo numerico. ◇

Una funzione  $V(x)$  si dice *funzione di Lyapunov di controllo* (o Control Lyapunov Function, CLF) per il sistema  $\dot{x} = f(x) + g(x)u$ ,  $f(0) = 0$ , se per ogni  $\bar{x}$  dove vale  $L_g V(\bar{x}) = 0$  si ha  $L_f V(\bar{x}) < 0$ .

Se un sistema ammette una CLF, è possibile realizzare un controllore. Ad esempio, quando fosse possibile definire una retroazione

$$u(x) = -\frac{L_f V}{L_g V} - \alpha L_g V, \quad \alpha > 0$$

si otterrebbe immediatamente

$$\dot{V} = -\alpha (L_g V)^2$$

che è almeno semidefinita negativa. In generale, però, questa legge potrebbe non essere applicabile in seguito alle possibili discontinuità della retroazione in vicinanza dell'equilibrio.

In casi abbastanza generali, quando esiste una CLF, la formula di Artstein-Sontag fornisce una retroazione continua

$$u(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } L_g V(x) = 0 \\ -\frac{L_f V}{L_g V} - \frac{\sqrt{(L_f V)^2 + (L_g V)^4}}{L_g V} & \text{altrove} \end{cases}$$

che stabilizza globalmente asintoticamente il sistema nell'origine.

**Esempio:** Si consideri il sistema

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ -x_2^3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1^3 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

e la candidata funzione di Lyapunov di controllo  $V = \frac{x^T x}{2}$ .

Si ha  $L_f V = 2(x_1^2 - x_2^4)$  e  $L_g V = 2x_1^4$ , per cui la funzione data è una funzione di Lyapunov di controllo. Una retroazione stabilizzante ( $C^\infty$  quasi ovunque) è

$$u(x) = \begin{cases} 0, & x_1 = 0 \\ -\frac{(x_1^2 - x_2^4)}{x_1^4} - \frac{\sqrt{16x_1^{16} + 4(x_1^2 - x_2^4)^2}}{2x_1^4} & x_1 \neq 0 \end{cases}$$

◇

## 6.2 Problemi di Controllo di Robot

La grandissima maggioranza delle macchine a controllo automatico, dei sistemi per l'automazione ed in particolare dei robot, sono caratterizzate da dinamica fortemente nonlineare. Inoltre, per la loro stessa natura riprogrammabile e la capacità di modificare reattivamente i comportamenti programmati in reazione alle interazioni con l'ambiente circostante, un approccio di linearizzazione attorno a traiettorie prestabilite è difficilmente applicabile. Per questi sistemi è quindi opportuno studiare la possibilità di effettuare un controllo che tenga conto integralmente delle caratteristiche nonlineari, per poterle compensare e – laddove possibile – addirittura sfruttare.

I principali obiettivi del controllo che si incontrano nelle applicazioni robotiche sono di tre tipi:

**Controllo di Postura** (o *Point-to-point control*), in cui è assegnata una particolare postura fissa in cui si desidera che il robot si porti e rimanga ( $q(t) \rightarrow q_d = \text{costante}$ );

**Inseguimento di Movimento** (o *Trajectory tracking*), in cui è assegnata una legge di moto di un obiettivo che il sistema deve raggiungere e seguire ( $q(t) \rightarrow q_d(t)$ );

**Controllo su Traccia** (o *Path following*), nel quale è assegnata una curva nello spazio, che il sistema deve raggiungere e percorrere, senza che peraltro sia assegnata una legge oraria (ad esempio, la curva  $\Gamma$  implicitamente definita come luogo delle soluzioni di equazioni algebriche  $C(q) = 0$  ( $q(t) \rightarrow \Gamma_d = \{q | C(q) = 0\}$ )).

In questo capitolo vedremo tecniche di controllo che si applicano a sistemi completamente attuati, ovvero a meccanismi che hanno a disposizione tanti attuatori quanti sono i loro gradi di libertà, e che sono in grado di raggiungere e mantenere l'equilibrio in una configurazione arbitraria, purché compatibile con i vincoli.

Una tecnica di controllo per sistemi meccanici completamente attuati, detta *controllo cinematico* o controllo in velocità, consiste nel considerare un modello semplificato del sistema, in cui si considerano solo le relazioni cinematiche tra le velocità del sistema astraendo dalla dinamica.

Progettata così una legge da assegnare alle velocità del sistema per fare in modo che le configurazioni seguano un andamento desiderato, queste velocità possono poi venire imposte come riferimenti cui far tendere la effettiva velocità del sistema, governata dalla equazione della dinamica Lagrangiana del sistema mediante il controllo delle forze generalizzate mediante gli attuatori. A tale controllo dinamico sarà dedicato uno studio successivo.

## 6.3 Controllo Cinematico

Una tecnica di controllo per sistemi meccanici completamente attuati, detta *controllo cinematico* o controllo in velocità, consiste nel considerare un modello semplificato del sistema, in cui si considerano solo le relazioni cinematiche tra le velocità del sistema astraendo dalla dinamica.

Progettata così una legge da assegnare alle velocità del sistema per fare in modo che le configurazioni seguano un andamento desiderato, queste velocità possono poi venire imposte come riferimenti cui far tendere la effettiva velocità del sistema, governata dalla equazione della dinamica Lagrangiana del

sistema mediante il controllo delle forze generalizzate mediante gli attuatori. A tale controllo dinamico sarà dedicato un capitolo successivo.

È da sottolineare qui come la composizione dei risultati del controllo sul modello semplificato (cinematico) con quello dinamico non è ovvia, e richiede strumenti analitici adeguati. In questo senso, vedremo che le tecniche fornite dalla teoria della stabilità e dell'invarianza di Lyapunov sono fondamentali. Cercheremo quindi di studiare le tecniche di controllo cinematico in questa ottica.

## 6.4 Controllo Cinematico di Bracci Robotici

Un esempio di controllo cinematico è quello usato nei metodi di inversione iterativa della cinematica di un manipolatore, che sono richiamati qui rapidamente. Sia  $\xi \in \mathbb{R}^m$  una variabile che rappresenta la configurazione del sistema nello spazio operativo, sia  $q \in \mathbb{R}^n$  la configurazione nello spazio delle variabili di giunto, e  $\xi = Q(q)$  rappresenti la mappa cinematica diretta.

### 6.4.1 Controllo di Postura

Consideriamo innanzitutto il problema del controllo di postura, cioè il raggiungimento di una configurazione desiderata nello spazio operativo  $\xi_d \in \mathbb{R}^m$ . Si desidera trovare la soluzione (o meglio, una delle possibili soluzioni)  $q \in \mathbb{R}^n$  del sistema di equazioni nonlineari  $Q(q) = \xi_d$ . Come ben noto questo problema di cinematica inversa è risolubile in alcuni casi in forma chiusa. Nel caso in cui questo non sia possibile o conveniente, si può procedere ad effettuare un controllo cinematico delle variabili di giunto, che consiste nel pensare alle configurazioni dei giunti come variabili che, inizializzate con un dato valore  $q_0$  che corrisponde ad una diversa postura  $\xi_0 = Q(q_0)$ , possono essere modificate nel tempo secondo una legge  $q(t)$  da stabilire facendo in modo che  $\xi(t) = Q(q(t))$  converga a  $\xi_d$ . Per guidare tale convergenza, possiamo considerare a nostra disposizione la scelta delle velocità dei giunti, ovvero scegliendo il valore  $u$  della variabile di controllo cinematico nella espressione

$$\dot{q} = u.$$

La scelta della legge di controllo, il cui scopo è quello di annullare l'errore di posizionamento  $e(t) = \xi_d - \xi(t)$ , può essere fatta in retroazione  $u = u(e)$ . Posta una funzione candidata di Lyapunov di controllo

$$V = \frac{1}{2} e^T e,$$

si ha

$$\dot{V} = -e^T (J(q)u),$$

dove  $J(q) = \frac{\partial Q}{\partial q}$  indica il Jacobiano analitico del manipolatore, per il quale vale  $\dot{\xi} = J(q)\dot{q}$ . Per avere convergenza dell'errore a zero si desidera avere  $\dot{V}$  negativa definita o almeno semidefinita.

Per ottenere ad esempio  $\dot{V} = -e^T e$  (che porterebbe ad una convergenza asintotica esponenziale della norma dell'errore come  $\|e(t)\| = \exp(-t)\|e(0)\|$ ), proviamo a imporre  $J(q)u = e$ . Se la dimensione del compito assegnato è pari al numero di giunti del manipolatore ( $m = n$ ) ed il Jacobiano è invertibile, quindi, la semplice legge di controllo cinematico

$$u = J^{-1}(q)e \quad (6.1)$$

ottiene lo scopo. Come previsto, con questa legge la dinamica dell'errore di inseguimento risulta

$$\dot{e} = -e$$

quindi l'errore decade esponenzialmente a zero.

La convergenza del metodo può essere modulata con la scelta di  $u = J^{-1}(q)Ke$ , con  $K$  una matrice positiva definita da scegliere. Ad esempio,  $K = kI$  ottiene velocità di convergenza esponenziale pari a  $\sqrt{k}$ . In teoria, valori di  $k$  arbitrariamente grandi porterebbero a convergenza arbitrariamente veloce, ma la implementazione in forma di algoritmo iterativo trasforma il sistema in uno a tempo discreto, la cui stabilità pone limiti a  $K$ .

Questo metodo e le sue varianti, note nella letteratura robotica anche con il nome di CLIK (Closed Loop Inverse Kinematics) non sono altro che versioni specializzate del metodo di Newton-Raphson per trovare le radici di sistemi di equazioni algebriche nonlineari. Nelle implementazioni numeriche, la scelta di  $k$  si traduce nella scelta del passo lungo la direzione indicata dalla soluzione  $J^{-1}e$ , scelta che viene spesso eseguita ottimizzando criteri che tengono conto della velocità di convergenza e della stabilità dell'algoritmo.

### Manipolatori ridondanti

Il metodo si generalizza facilmente al caso di manipolatori ridondanti non singolari, in cui il compito ha dimensione inferiore al numero di giunti,  $m < n$ , ed il Jacobiano  $J(q) \in \mathbb{R}^{m \times n}$  è rettangolare largo a pieno rango righe. Utilizzando una inversa destra  $J^R(q)$ <sup>1</sup>, il controllo cinematico si può scrivere

<sup>1</sup>Una inversa destra è una qualsiasi matrice per cui  $J(q)J^R(q) = I$ . L'esistenza di una inversa destra è garantita se  $J(q)$  ha tutte righe indipendenti; in questo caso, se  $J(q)$  è rettangolare, esistono infinite inverse destre.

nella forma

$$u = J^R(q)e + N_J(q)\lambda \quad (6.2)$$

dove  $N_J(q) \in \mathbb{R}^{n \times n-m}$  è una matrice di base dello spazio nullo di  $J(q)$  (ovvero tale per cui  $J(q)N_J(q) = 0, \forall q$ ). Qualsiasi scelta di  $\lambda \in \mathbb{R}^{n-m}$  porta alla stessa dinamica dell'errore vista sopra, così che  $\lambda$  rimane a disposizione per cercare di soddisfare altri compiti del robot.

Le infinite possibili inverse destre di una matrice a pieno rango righe danno soluzioni con caratteristiche diverse. Si consideri ad esempio il problema di trovare, tra le possibili  $u = \dot{q}$  che risolvono  $J(q)u = e$  (e quindi ottengono  $\dot{V} = -e^T e$ ), quella che minimizza il costo  $\frac{1}{2}u^T W u$ . Costruendo la lagrangiana di questo problema di minimo vincolato,

$$L = \frac{1}{2} u^T W u + \lambda (J u - e)$$

e uguagliando a zero le derivate rispetto a  $u, \lambda$ , si ottiene facilmente

$$u = W^{-1} J^T (J W^{-1} J^T)^{-1} e \stackrel{def}{=} J_W^+ e$$

dove la matrice  $J_W^+$  è la particolare inversa destra che coincide (nel caso di  $J$  non singolare) con la pseudoinversa di  $J$  pesata in  $W$ . Per  $W = I$  questa si semplifica nella consueta

$$u = J^T (J J^T)^{-1} e = J^+ e. \quad (6.3)$$

### Trattamento delle Singolarità

Si noti che con la pseudoinversa  $J^+$  si denota una matrice che è ben definita anche nelle configurazioni in cui  $J$  non ha pieno rango righe, quindi anche nelle singolarità dove la formula precedente non sarebbe applicabile<sup>2</sup>. Pertanto usando la pseudoinversa  $J^+$  è possibile scrivere la soluzione nella forma

$$u = J^+(q)e + N_J(q)\lambda \quad (6.4)$$

formalmente valida anche nel caso in cui si incontri una singolarità. Peraltro, nelle vicinanze di una singolarità, la soluzione con pseudoinversa è

<sup>2</sup>La pseudoinversa di una matrice  $M$  è una inversa destra ( $MM^+ = I$ ) se  $M$  ha pieno rango righe; è una inversa sinistra ( $M^+M = I$ ) se  $M$  ha pieno rango colonne. Pertanto, se  $M$  è invertibile,  $M^+ = M^{-1}$ . Nel caso generale,  $M^+$  è definita dalle quattro proprietà di Moore-Penrose: 1)  $MM^+M = M$ ; 2)  $M^+MM^+ = M^+$ ; 3)  $(MM^+)^T = MM^+$ ; 4)  $(M^+M)^T = M^+M$ . Dato il sistema lineare  $y = Mx$ , la pseudoinversa di  $M$  fornisce il vettore  $\bar{x} = M^+y$  di minima norma  $\|\bar{x}\|$  tra quelli che minimizzano il residuo  $\|y - M\bar{x}\|$ . Nel caso generale la pseudoinversa è ottenuta sulla base della decomposizione ai valori singolari di  $J = U\Sigma V$  come  $J^+ = V^T \Sigma^+ U^T$ .

soggetta a discontinuità e a problemi numerici che provocano soluzioni molto sensibili a piccolissime variazioni dei parametri<sup>3</sup> e questo può generare valori di riferimento della velocità  $\dot{q}$  molto elevati, fisicamente irrealizzabili e/o pericolosi.

Un approccio alternativo a quello della (pseudo)inversione del Jacobiano, è quello detto *del gradiente*, o *steepest descent*:

$$u = J^T(q)e, \quad (6.5)$$

che, applicato alla stessa candidata di Lyapunov, risulta in

$$\dot{V} = -e^T J(q)J^T(q)e.$$

Quando  $J(q)$  non ha singolarità,  $\dot{V}$  è definita negativa e l'errore converge asintoticamente a zero, anche se più lentamente del metodo di Newton-Raphson. Nel caso di singolarità il metodo del gradiente rimane numericamente stabile, anche se si ha che  $\dot{V}$  è solo negativa semidefinita. L'analisi indica che la convergenza può arrestarsi in configurazioni nelle quali si abbia  $J^T(q)(\xi_d - Q(q)) = 0$ , cioè quando l'errore giace esattamente nello spazio nullo che si crea nella singolarità del Jacobiano (caso piuttosto raro, e comunque aggirabile con semplici empiriche numeriche).

Un metodo di soluzione che combina i precedenti è quello di Levenberg-Marquardt (o "Damped Least Squares"). Consideriamo ancora l'obiettivo di trovare  $u = \dot{q}$  che risolve la  $J(q)u = Ke$  cercando anche di minimizzare il costo  $\frac{1}{2}u^T W u$ . Invece che applicare la soluzione esatta del minimo vincolato ottenuta sopra con la tecnica dei moltiplicatori di Lagrange (valida solo nel caso in cui  $J(q)$  aveva pieno rango righe), si rilassi il problema cercando di ottenere invece

$$\arg \min_u \left[ \frac{1}{2} (Ju - Ke)^T (Ju - Ke) + \frac{1}{2} u^T W u \right]. \quad (6.6)$$

Uguagliando a zero la derivata di questo costo composto, il valore che lo minimizza è

$$u = (J^T J + W)^{-1} J^T Ke. \quad (6.7)$$

Se in particolare si sceglie  $K = kI_m$  e  $W = \mu I_n$ , con  $k$  e  $\mu$  scalari positivi, si ha

$$u = k (J^T J + \mu I_n)^{-1} J^T e.$$

---

<sup>3</sup>ad esempio, si consideri  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon & 0 \end{bmatrix}^+ = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/\epsilon \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ , per  $\epsilon$  vicini a zero.

che è equivalente<sup>4</sup> alla

$$u = kJ^T (JJ^T + \mu I_m)^{-1} e.$$

Scegliendo  $k = 1 + \mu$ , è immediato osservare che per  $\mu = 0$  il metodo corrisponde a quello della pseudoinversa per  $J$  nonsingolare, mentre per  $\mu$  grandi corrisponde al metodo del gradiente.

Utilizzando la (6.7), la derivata della funzione di Lyapunov  $V$  vale

$$\dot{V} = -ke^T J(q) (J^T J + \mu I_n)^{-1} J^T e$$

ed è quindi negativa semidefinita (negativa definita se  $J(q)$  ha pieno rango righe) per ogni  $\mu > 0$ <sup>5</sup>. Il metodo di Levenberg-Marquardt è spesso utilizzato variando il valore di  $\mu$  ad ogni passo, aumentandolo quando ci si avvicina a una singolarità avvicinandosi al metodo del gradiente per “smorzare” la soluzione, e diminuendolo in prossimità della soluzione (lontana dalle singolarità), per velocizzare la convergenza approssimando il metodo di Newton-Raphson<sup>6</sup>.

**Esempio:** Per illustrare le differenze tra le diverse soluzioni della cinematica inversa, si consideri il caso scalare  $\xi = Q(q) = -L \cos q$ ,  $J = L \sin q \stackrel{def}{=} x$ . In fig. 6.1 sono riportati i valori delle diverse soluzioni attorno a  $q = 0$ . —  
◇

## 6.4.2 Inseguimento di Movimento

Consideriamo adesso l’inseguimento di un movimento nello spazio operativo. Assegnata una traiettoria  $\xi_d(t)$ , per trovare una legge temporale per i giunti  $q(t)$  che faccia convergere  $Q(q(t))$  a  $\xi_d(t)$  si procede in modo del tutto analogo al caso precedente ponendo  $\dot{q} = u$  e  $V = e^T e$ , da cui  $\dot{V} = e^T (\dot{\xi}_d - J(q)u)$ .

La legge di controllo cinematico con il metodo di Gauss Newton si estende facilmente in questo caso aggiungendo un termine anticipativo in feed-forward, cioè ponendo

$$u = J^{-1}(q) (\dot{\xi}_d + e). \quad (6.8)$$

<sup>4</sup>Per dimostrare che  $(J^T J + \mu I)^{-1} J^T = J^T (JJ^T + \mu I)^{-1}$  basta post-moltiplicare l’equazione per la matrice invertibile  $(JJ^T + \mu I)$  e sviluppare i prodotti.

<sup>5</sup>gli autovalori di  $(JJ^T + \mu I)$  sono quelli di  $JJ^T$ , tutti positivi o nulli, sommati a  $\mu$ . Quindi la matrice tra parentesi è positiva definita e invertibile, e la  $\dot{V}$  si può annullare solo quando  $J^T e = 0$

<sup>6</sup>Gli algoritmi di Levenberg e Marquardt e una loro implementazione efficiente sono descritti in Fletcher, R. (1971). A Modified Marquardt Subroutine for Nonlinear Least Squares. Rpt.AERE-R 6799.



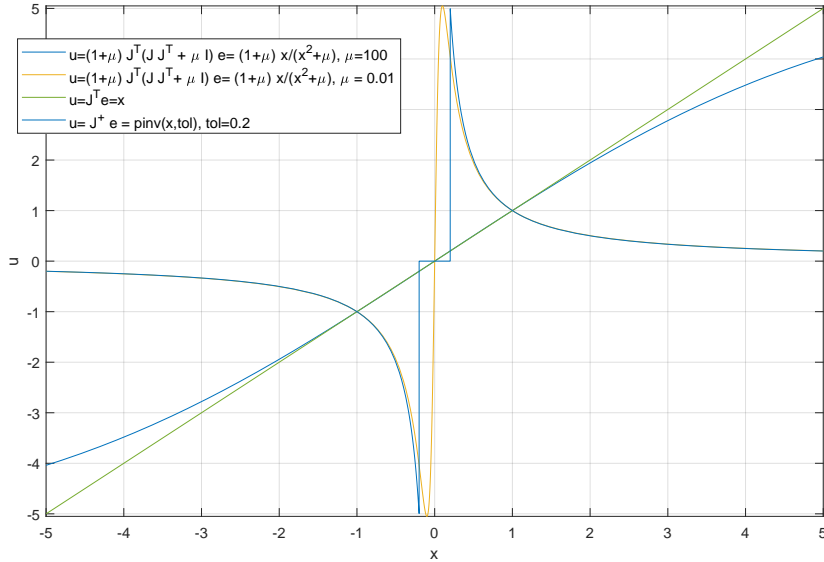


Figura 6.1: Andamento delle diverse soluzioni per  $Ju = e$ , con  $e = 1$  e  $J = L \sin(q)$ , in vicinanza della singolarità  $q = 0$ .

Quando si usino altri metodi robusti ai problemi di inversione, quali quello del gradiente o di Levenberg-Marquardt, che in questo caso ha la forma

$$u = J^T (JJ^T + \mu I)^{-1} (\dot{\xi}_d + e), \quad (6.9)$$

si ottiene come risultato sono una stabilità pratica, ovvero si può garantire solo che l'errore tende ad un intorno dell'origine, il cui raggio è tanto maggiore quanto più alta è la velocità desiderata  $\dot{\xi}$ , come si ottiene facilmente dalla analisi della derivata della stessa candidata di Lyapunov  $V = e^T e$ .

### 6.4.3 Controllo su Traccia

Si consideri ora il raggiungimento ed il mantenimento di una traccia assegnata. Sia data una curva (cioè una varietà di dimensione uno) nello spazio operativo  $m$ -dimensionale, che pensiamo definita implicitamente da  $m - 1$  equazioni  $C(\xi) = 0$ , con  $C(\xi) \in \mathbb{R}^{m-1}$ ,  $C : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m-1}$ . In altri termini, la parte terminale della catena cinematica deve raggiungere questa curva e percorrerla a velocità assegnata: un caso tipico è quello in cui un utensile di taglio, posto nella parte terminale del manipolatore, deve tagliare un certo profilo mantenendo una velocità opportuna, senza peraltro avere una

temporizzazione del percorso da rispettare (insistere su una percorrenza a tempi stabiliti di un certo percorso può comportare errori maggiori sul profilo ottenuto, nel caso ad esempio che l'utensile incontri resistenza variabile all'avanzamento dovuta a disomogeneità del materiale da tagliare).

Si consideri dunque la funzione

$$V(\xi) = \frac{C^T(\xi)C(\xi)}{2},$$

che è sempre positiva e si annulla solo sulla traccia, mentre le curve di livello formano un tubo attorno alla traccia. Derivando rispetto al tempo ed utilizzando il modello cinematico  $\dot{\xi} = J(q)\dot{q}$  con  $\dot{q} = u$ , si ottiene (omettendo l'argomento delle funzioni per brevità)

$$\dot{V} = C^T C_\xi J(q)u,$$

dove  $C_\xi = \frac{\partial C}{\partial \xi}$ . Si noti che, essendo  $C_\xi$  una matrice  $m-1 \times m$ , ammette uno spazio nullo di dimensione generica 1, eccetto nelle eventuali singolarità di  $C_\xi$ , dove la dimensione potrebbe aumentare.

Sia  $S(\xi)$  una base di questo spazio nullo, cioè sia  $C_\xi(\xi)S(\xi) = 0, \forall \xi$ . La matrice  $S(\hat{\xi})$  calcolata in un punto  $\hat{\xi}$  sulla curva ( $C(\hat{\xi}) = 0$ ), rappresenta un vettore tangente alla curva in  $\hat{\xi}$ . Assumendo ancora per semplicità di avere Jacobiano a pieno rango righe (tralasciando qui i casi di singolarità del manipolatore), potremo quindi scegliere il controllo nella forma

$$u = -J^R(q)C_\xi^T C k + J^R(q)S\alpha \quad (6.10)$$

con  $k, \alpha$  parametri scalari liberi, si ottiene

$$\dot{V} = -C^T C_\xi C_\xi^T C k. \quad (6.11)$$

Per  $k > 0$ ,  $\dot{V}$  è quindi semi-definita negativa, il che garantisce la stabilità della varietà  $C(\xi) = 0$ . Si osservi che la condizione  $\dot{V} = 0$  si verifica dove  $C_\xi^T C = 0$ , ovvero sui punti della curva desiderata ( $C = 0$ ) ma anche nei punti in cui esistesse un kernel di  $C_\xi^T \in \mathbb{R}^{m \times m-1}$  in cui si venisse a trovare il vettore  $C$ . Per curve regolari (in cui direzioni normali e tangenti sono ben definite), il rango di  $C_\xi$  è massimo su tutti i punti della curva stessa, quindi per continuità lo è anche in un intorno: questo permette di concludere che esiste un intorno della curva  $C(\xi) = 0$  a partire dal quale il sistema converge asintoticamente verso la curva stessa, e quindi, per il teorema dell'invariante massimo, tale intorno appartiene al bacino di attrazione per la curva. Possono comunque esistere punti dello spazio di stato fuori dalla curva, in cui si ha  $\dot{V} = 0$  (si veda l'esempio più avanti).

Con la scelta (6.10), la cinematica diventa

$$\dot{\xi} = -C_{\xi}^T C k + S \alpha.$$

La scelta di  $\alpha$  non contribuisce alla stabilizzazione, ma permette di assegnare alla velocità di percorrenza della curva un valore desiderato. Ad esempio scegliendo  $\alpha = \frac{v_d}{\|S\|}$  la velocità di percorrenza della curva è pari a  $v_d(t)$ .

Si può in definitiva affermare che la legge di controllo (6.10) rende  $\dot{V}$  semidefinita negativa e quindi la curva stabile ed attrattiva per tutta la regione in cui  $C_{\xi}$  non è singolare.

**Esempio:** Si consideri un manipolatore seriale planare a due gradi di libertà: sia  $\xi = (x, y)^T$  la posizione dell'end-effector e  $q = (q_1, q_2)^T$  il vettore delle variabili di giunto. Sia inoltre

$$C = (x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 - R^2 = 0$$

l'equazione della curva (circonferenza centrata in  $(x_o, y_o)$  e raggio  $R$ ) sulla quale la parte terminale del manipolatore deve portarsi, e che deve percorrere a velocità  $\hat{v}(t)$  assegnata.

Si consideri quindi

$$V = \frac{C^T C}{2} = \frac{1}{2}((x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 - R^2)^2$$

e, ponendo  $\dot{q} = u$ , si ha

$$\dot{V} = ((x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 - R^2) [2(x - x_o) \quad 2(y - y_o)] J(q) u.$$

Scegliendo

$$u = -kJ^{-1}(q)C_{\xi}^T((x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 - R^2) + J^{-1}(q)S\alpha$$

dove  $C_{\xi} = [2(x - x_o), 2(y - y_o)]$ ,  $k > 0$ , e posto (ovunque eccetto che in  $(x_o, y_o)$ )  $S = [-(y - y_o), (x - x_o)]^T$ ,  $\alpha = \frac{\hat{v}}{\|S\|_2}$  con  $\hat{v} > 0$ , si ottiene

$$\dot{V} = -k((x - x_o)^2 + (y - y_o)^2)((x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 - R^2)^2$$

e

$$\dot{\xi} = -kC_{\xi}^T((x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 - R^2) + \frac{S}{\|S\|_2}\hat{v}. \quad (6.12)$$

In figura 6.2 sono riportate le traiettorie del sistema (6.12) a partire da varie condizioni iniziali. Si noti che, una volta raggiunta la curva  $C = (x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 - R^2 = 0$ , il sistema (6.12) si riduce a

$$\dot{\xi} = \frac{S}{\|S\|_2}\hat{v},$$

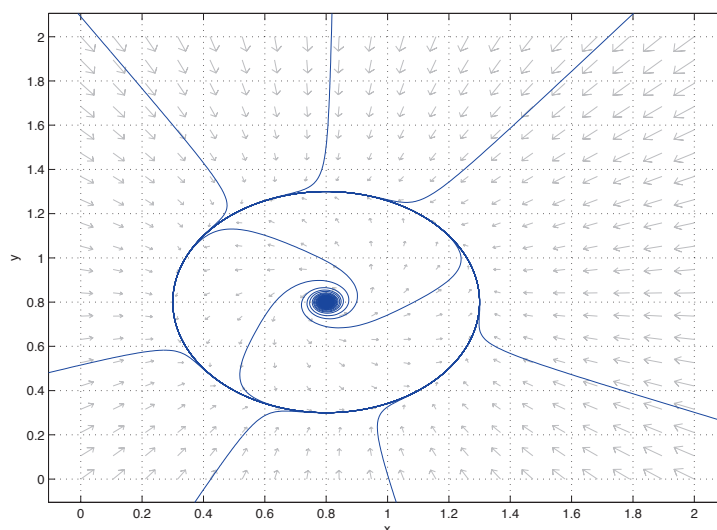


Figura 6.2: Esempio di controllo cinematico di traccia. Traiettorie del sistema controllato nello spazio operativo per differenti condizioni iniziali. Il diagramma è stato ottenuto con lo script open-source `pplane7.m`.

e le velocità della parte terminale del manipolatore sono allineate al vettore tangente alla circonferenza, ovvero a  $S(\xi)$ , e l'end-effector percorre la curva in senso antiorario con velocità pari a  $\hat{v}(t) = 1$ .

Si osservi che  $\dot{V} = 0$  solo sulla curva e in corrispondenza del centro  $\xi_0$ . La regione di asintotica stabilità della circonferenza contiene quindi tutto lo spazio  $\mathbb{R}^2$  ad eccezione al più del centro.

Il comportamento dello schema di controllo nel centro del cerchio ha bisogno di una ulteriore discussione. Infatti, in  $\xi_0$ ,  $C_\xi(\xi_0) = 2 \begin{bmatrix} (x - x_0) & (y - y_0) \end{bmatrix}$  si annulla completamente (ovvero perde rango da 1 a 0). In questo punto di singolarità il kernel di  $C_\xi$  ha quindi dimensione due. In quel punto non è possibile definire un controllo del tipo (6.10) che sia continuo con i valori in un suo intorno. Assegnando in modo arbitrario un valore nullo al controllo  $u$  nel centro, questo diverrebbe un equilibrio instabile per il sistema (come si verifica facilmente con il metodo indiretto di Lyapunov). Un qualsiasi altro valore renderebbe non invariante questo punto, portando la traiettoria nella RAS e quindi facendo convergere la traiettoria alla curva assegnata.

In figura 6.3 è riportato il risultato di alcune simulazioni ottenute col controllore di traccia descritto.

Infine, in figura 6.4 sono riportati i risultati ottenuti per l'inseguimento

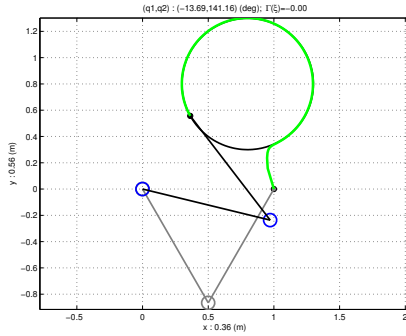
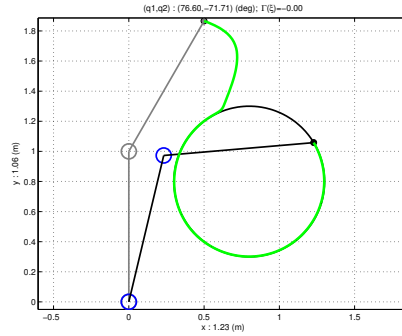
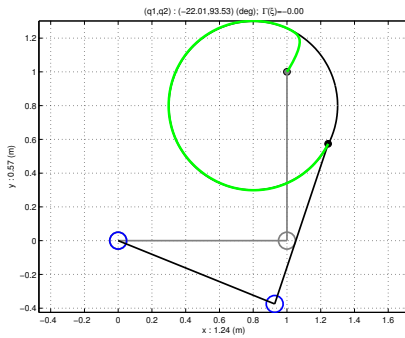
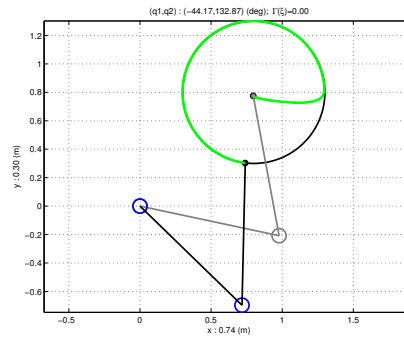
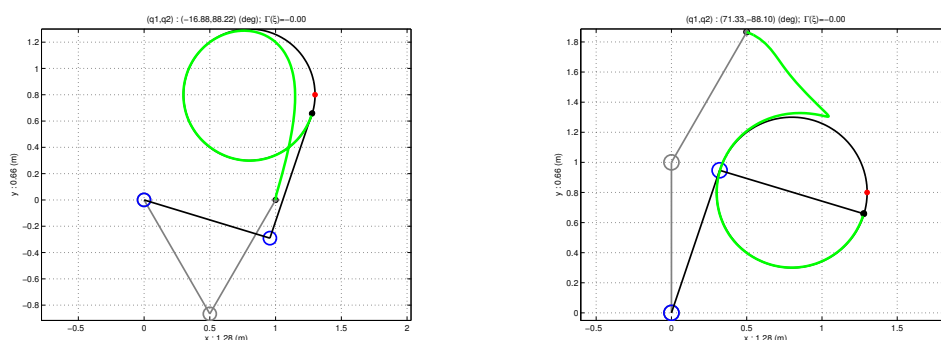
(a)  $(q_1(0), q_2(0)) = (-\pi/3, 2\pi/3)$  e  $\xi(0) = (1, 0)$ .(b)  $(q_1(0), q_2(0)) = (\pi/2, -\pi/6)$  e  $\xi(0) = (0.5, 1.866)$ .(c)  $(q_1(0), q_2(0)) = (0, \pi/2)$  e  $\xi(0) = (1, 1)$ .(d)  $(q_1(0), q_2(0)) = (-\pi/15, 5\pi/8)$  e  $\xi(0) = (0.796, 0.775)$ .

Figura 6.3: Esempio di controllo cinematico di traccia. Contornatura di una traccia circolare con centro in  $(0.8, 0.8)$  m e raggio  $R = 0.5$  m. La velocità di riferimento è  $\hat{v} = 1$  ed il guadagno di convergenza alla traccia è  $k = 50$ .

del moto di un punto di riferimento sul cerchio, ovvero ponendo

$$\xi_d(t) = \begin{bmatrix} x_d(t) \\ y_d(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R \cos(\frac{\hat{v}(t)}{R} t) + x_o \\ R \sin(\frac{\hat{v}(t)}{R} t) + y_o \end{bmatrix}. \quad (6.13)$$

Dal confronto di questi risultati con quelli ottenuti a partire dalle stesse condizioni iniziali per il controllo di traccia (figure 6.3(a) e 6.3(b)), si nota che nell'inseguimento di moto la parte terminale del manipolatore può attraversare la circonferenza durante la fase di avvicinamento anche se le condizioni iniziali sono esterne al cerchio.  $\diamond$



(a)  $(q_1(0), q_2(0)) = (-\pi/3, 2\pi/3)$  e  $\xi(0) = (1, 0)$ .      (b)  $(q_1(0), q_2(0)) = (\pi/2, -\pi/6)$  e  $\xi(0) = (0.5, 1.866)$ .

Figura 6.4: Esempio Inseguimento Traiettoria con Braccio: Inseguimento con legge (6.1) ( $\Lambda = \text{diag}(10, 10)$ ) del moto di un punto descritto da (6.13). Il punto descrive una traiettoria circolare analoga a quella di fig. 6.3. Si confrontino questi andamenti con quelli di fig. 6.3-a e fig. 6.3-b.

**Esercizio.** Con un braccio RRR antropomorfo, eseguire l'inseguimento di una traccia formata da una figura geometrica (un cerchio o una curva di Lissajous, ad esempio) giacente su un piano nello spazio di lavoro, verificando il non attraversamento del piano e del contorno. \*

## 6.5 Controllo cinematico di veicoli planari

Considereremo adesso modelli di veicoli che si muovono nel piano, descritti inizialmente in modo puramente cinematico come corpi caratterizzati dalla posizione di un loro punto caratteristico e dall'orientazione di una retta fissa rispetto ad un sistema di coordinate nel piano. Siano queste coordinate indicate da  $q = (x, y, \theta)$ .

Per alcuni veicoli detti “omnidirezionali”, che si muovono sul piano o sostenendosi su cuscinetti d'aria (hovercraft) o usando ruote omnidirezionali di diverso tipo, il moto cinematico è completamente libero e può essere descritto semplicemente da una equazione del tipo  $\dot{q} = u$ , il che rende il loro controllo cinematico banale.

In molti altri casi, però, i veicoli si muovono su ruote e sono soggetti a vincoli di diversa natura. Considereremo quindi adesso in qualche maggior dettaglio il controllo di veicoli planari soggetti a vincoli cinematici.

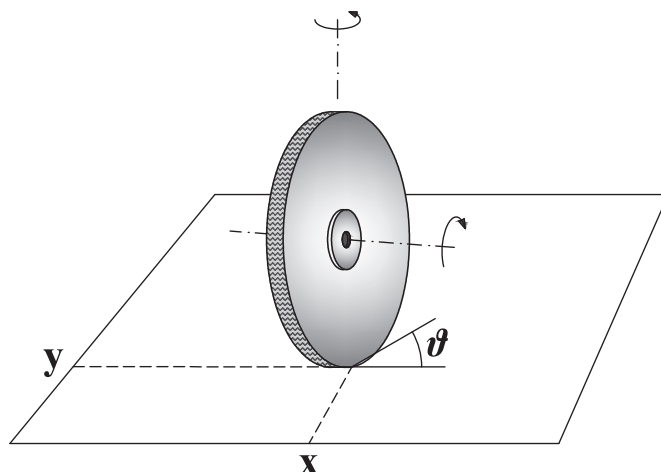


Figura 6.5: Modello di unicycle planare.

### 6.5.1 Modello di un veicolo di tipo unicycle

Consideriamo adesso un elementare modello di veicolo, detto *unicycle*. La caratteristica principale di un unicycle è di muoversi nel piano potendo traslare in una direzione fissa rispetto al suo corpo (detta longitudinale) che può essere modificata nel tempo, mentre gli è impedita la traslazione nella direzione perpendicolare a quella longitudinale, detta trasversale.

Nonostante la sua estrema semplicità, il modello dell'unicycle è di grande rilevanza in robotica. Esso infatti rappresenta in primissima approssimazione una vasta gamma di veicoli di uso comune, utilizzati principalmente nell'industria come agenti per il trasporto e la movimentazione di merci. Questi veicoli possono essere movimentati da ruote, ma anche molti veicoli su cingoli (che ruotano per strisciamento o *skid steering*), marini o aerei ad ala fissa (che hanno direzioni di moto trasversali negate dagli effetti fluidodinamici dei mezzi in cui si muovono), possono vedere il loro moto cinematico utilmente descritto da questo modello.

Il modello dell'unicycle prende il nome da un veicolo ideale che si muove nel piano, dotato di una sola ruota con asse parallelo al piano, e libera di ruotare attorno al proprio asse e attorno ad un asse perpendicolare al piano e passante per il punto di contatto sul piano stesso. Si supponga inoltre che il vincolo di attrito al suolo sulla ruota sia ideale e si opponga a qualsiasi traslazione nella direzione parallela all'asse (fig. 6.5). La cinematica di altri

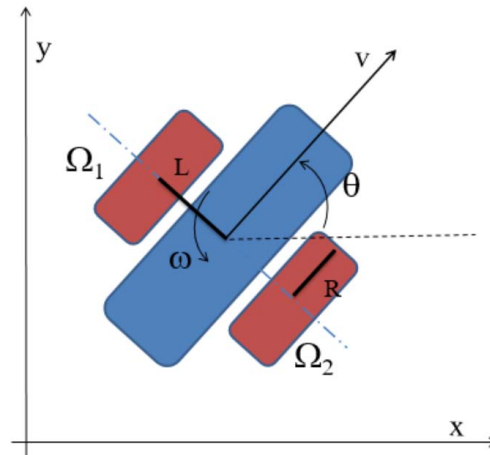


Figura 6.6: Parametri caratteristici di un veicolo a due ruote coassiali.

veicoli soggetti a vincoli sulla velocità trasversale può essere spesso ricondotta facilmente a questo modello.

**Esempio:** Si consideri ad esempio un veicolo terrestre con due ruote coassiali attuate da due motori indipendenti (fig. 6.6). Le due ruote sono pensate come dischi ideali di raggio  $R$  che rotolano sul piano con velocità  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$ , rispettivamente, mentre il loro centro è a distanza  $L$  dal centro del veicolo. Il rotolamento ideale delle ruote impone che la velocità di traslazione del loro centro lungo l'asse delle ruote stesse sia nulla.

Dette  $\omega$  e  $v$  rispettivamente le velocità angolare e longitudinale del veicolo (ovvero la velocità di traslazione del veicolo lungo la perpendicolare all'asse delle ruote), si ha

$$\begin{aligned}\Omega_1 R &= v - \omega L \\ \Omega_2 R &= v + \omega L\end{aligned}$$

ovvero

$$\Omega = A_{vr} t_u$$

dove

$$\Omega \stackrel{def}{=} \begin{bmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \end{bmatrix}; \quad t_u \stackrel{def}{=} \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix}; \quad A_{vr} = \begin{bmatrix} 1/R & -L/R \\ 1/R & L/R \end{bmatrix}.$$

La matrice  $A_{vr}$  che mappa le velocità del veicolo su quelle delle ruote è sempre invertibile, per cui possiamo scrivere

$$t_u = A_{vr}^{-1} \Omega \stackrel{def}{=} A_{rv} \Omega$$

con

$$A_{rv} = \begin{bmatrix} R/2 & R/2 \\ -R/2L & R/2L \end{bmatrix}.$$



La relazione tra il vettore delle coppie alle ruote  $\tau_r$  e il vettore  $\tau_u = [f \ m]^T$  delle forza longitudinale e coppia sul veicolo, è ottenuta facilmente per dualità nella forma

$$\tau_u = A_{vr}^T \tau_r.$$

Studiato il moto del veicolo nelle velocità e forze generalizzate, è quindi facile ricondursi alle corrispondenti velocità e coppie da controllare alle ruote.  $\diamond$

Torniamo alla descrizione del modello astratto dell'uniciclo. Scegliendo come coordinate nel piano  $q = [x, y, \theta]^T$ , dove  $(x, y)$  indicano la posizione proiettata sul piano del centro del veicolo, e  $\theta$  l'orientazione della direzione longitudinale rispetto all'asse delle ascisse, il vincolo imposto alla traslazione trasversale del veicolo è espresso nella forma

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \tan \theta, \quad (6.14)$$

ovvero, in forma Pfaffiana,

$$A(q)\dot{q} = \begin{bmatrix} \sin \theta & -\cos \theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = 0. \quad (6.15)$$

Si noti l'analogia con il primo vincolo definito sul carrello con binario rettilineo: anche in quel caso la direzione lungo la direzione dell'interasse delle ruote era interdotta dalla presenza del binario. In quel caso però tale angolo era costante, mentre adesso è esso stesso una variabile di configurazione.

La matrice dei vincoli cinematici  $A(q)$  ha rango uno ovunque, quindi il suo spazio nullo avrà dimensione pari a due. Una base delle velocità compatibili con il vincolo è ad esempio

$$\dot{q} = S(q)\nu = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 \\ \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{bmatrix} \quad (6.16)$$

Dall'equazione (6.16) appare evidente un'interpretazione fisica delle quasi velocità: la prima componente  $\nu_1$ , corrispondente alla prima colonna di  $S(q)$  che è diretta perpendicolarmente all'interasse delle ruote, rappresenta infatti la velocità di avanzamento del veicolo (che indicheremo anche con  $v$ ), mentre  $\nu_2$  corrisponde alla velocità angolare ( $\omega$ ) attorno all'asse verticale passante per  $(x, y)$ . L'equazione (6.16) può essere quindi riscritta esplicitamente

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \omega. \quad (6.17)$$

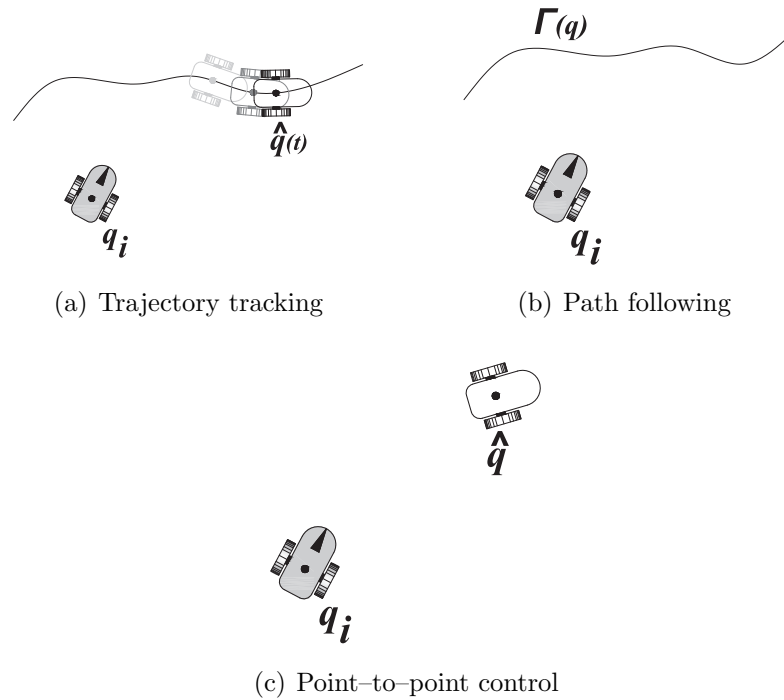


Figura 6.7: Problemi di controllo per unicycle.

È da notare che il vincolo imposto da una singola ruota nel piano non può essere ottenuto per derivazione di un vincolo geometrico. Se così fosse, infatti, questo vincolo ridurrebbe il numero delle configurazioni indipendenti del sistema, il che evidentemente non è possibile visto che il veicolo unicycle rimane in grado di raggiungere, muovendosi compatibilmente con il vincolo, qualsiasi posizione e orientazione  $q$ .

Passiamo adesso a considerare il controllo cinematico del veicolo unicycle. Considereremo i tre obiettivi di controllo precedentemente descritti, illustrati in fig. 6.7.

### 6.5.2 Controllo di traccia con un unicycle

Consideriamo il problema di controllare lungo una traccia il modello di un unicycle (6.17), dove la velocità  $v(t)$  si considererà assegnata (o controllata indipendentemente) e pari a  $\bar{v}(t) \neq 0$ . L'obiettivo primario è quello di progettare una legge di retroazione per la velocità di rotazione nel piano (detta anche velocità di imbardata o di sterzo nel linguaggio tipico di alcu-

ni veicoli)  $\omega(x, y, \theta)$  (o più generalmente  $\omega(x, y, \theta, \bar{v}(t))$ ) in grado di rendere asintoticamente nulla la distanza tra il veicolo e la traccia (fig. 6.7-b)).

Inizieremo considerando una traccia rettilinea che, senza perdere di generalità, può essere pensata giacere sull'asse orizzontale  $y = 0$ . Fissata una velocità di avanzamento  $\bar{v}(t)$ , il modello cinematico del veicolo 6.17 diviene

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{v}(t) \cos \theta \\ \bar{v}(t) \sin \theta \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \omega. \quad (6.18)$$

Il moto desiderato del veicolo, descritto da  $\hat{y}(t) \equiv 0$ , implica  $\hat{\dot{y}}(t) \equiv 0$ , quindi, dalla seconda equazione (6.18) anche  $\hat{\theta}(t) \equiv k\pi$ . Fissiamo come scopo del controllore quello di regolare a zero le due variabili  $y$  e  $\theta$ . In generale non vi sono specifiche sulla traiettoria delle ascisse  $\bar{x}(t)$ , che dipenderà dalla velocità assegnata  $\bar{v}(t)$ : questa potrebbe essere in realtà determinata da una legge di retroazione indipendente, tesa ad esempio a mantenere costante la distanza da un veicolo di riferimento che si muove sulla stessa retta.

### Controllo mediante linearizzazione approssimata

Consideriamo di nuovo il modello cinematico dell'uniciclo in coordinate cartesiane linearizzato attorno ad un moto nominale di un veicolo che avanza lungo  $y = 0$ , con velocità  $\bar{v}(t)$  e  $\bar{\omega}(t) = 0$ . Corrispondentemente siano  $[\bar{x}(t), \bar{y}(t), \bar{\theta}(t)] = [\bar{x}_0 + \int_0^t \bar{v}(\tau) d\tau, 0, 0]$ . Detto  $\tilde{\xi} = [x - \bar{x}(t), y, \theta]^T$ ,  $\tilde{v} = v - \bar{v}(t)$ , si ha

$$\dot{\tilde{\xi}} = A\tilde{\xi} + B_v\tilde{v} + B_\omega\omega$$

con

$$A = \left[ \begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{v}(t) \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|cc} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & & \\ 0 & & A_2 \end{array} \right],$$

e

$$B_v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{v,1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad B_\omega = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ B_{\omega,2} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Il sistema risulta quindi effettivamente scomposto in due sottosistemi indipendenti:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\xi}}_1 &= B_{v,1}\tilde{v} \\ \begin{bmatrix} \dot{\tilde{\xi}}_2 \\ \dot{\tilde{\xi}}_3 \end{bmatrix} &= A_2 \begin{bmatrix} \tilde{\xi}_2 \\ \tilde{\xi}_3 \end{bmatrix} + B_{\omega,2}\omega \end{aligned}$$

Il primo sottosistema rappresenta la dinamica del moto lungo la traccia, e non è di diretto interesse nello studio della dinamica dell'inseguimento della traccia stessa, che invece è rappresentata dal secondo sottosistema. Si può osservare che questo secondo sottosistema è tempo variante nel caso generale ( $A_2$  contiene il termine  $\bar{v}(t)$ ). Nel caso particolare in cui sia  $\bar{v}(t) = \bar{v}$  costante, anche questo sottosistema è lineare tempo invariante, completamente raggiungibile dal secondo ingresso, e in forma canonica di controllo. Considereremo questo caso, lasciando alcune considerazioni sul caso a parametri tempo-varianti a più avanti.

La stabilizzazione del secondo sottosistema nell'origine, che è sufficiente a portare il veicolo sulla traccia desiderata, può essere ottenuta semplicemente con una retroazione degli errori in  $y$  e  $\theta$  ponendo

$$\omega = -K_2 \tilde{\xi}_2 - K_3 \tilde{\xi}_3,$$

dove la scelta di  $K_2, K_3 > 0$  alloca gli autovalori nel semipiano sinistro. Se in aggiunta si desidera che il veicolo raggiunga il riferimento lungo la traccia, basterà porre ulteriormente  $\tilde{v} = -K_1 \tilde{\xi}_1$ ,  $K_1 > 0$ .

Naturalmente, questo risultato si appoggia sulla ipotesi che lo stato sia noto, e garantisce la convergenza sull'asse  $x$  solo per condizioni iniziali sufficientemente piccole. Qualora lo stato non sia completamente noto, si può ricorrere ad un osservatore asintotico che sulla base di alcune uscite permetta di risalire all'intero stato. Ad esempio, scegliendo come uscita la distanza  $\tilde{\xi}_2 = y$  dalla carreggiata sulla quale vogliamo stabilizzare il veicolo, si ottiene la seguente matrice di osservabilità per il sistema linearizzato

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{v} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

da cui  $\ker(\mathcal{O}) = \text{Im}([1 \ 0 \ 0])$ . A partire da tale uscita il sistema linearizzato approssimato non è completamente osservabile (lo stato  $\tilde{\xi}_1 = x - \bar{x}$  non è ricostruibile), ma essendo il sottosistema del controllo di traccia osservabile, è possibile utilizzare l'uscita  $y$  per ricostruire  $\tilde{\xi}_3 = \theta$  e realizzare quindi il controllo di traccia.

Quando il controllo ottenuto sulla base del modello linearizzato è applicato al vero modello cinematico del veicolo, questo ne risulta asintoticamente stabilizzato sulla traccia (si vedano ad esempio i risultati di alcune simulazioni in fig. 6.8). Ovviamente la convergenza alla traccia è garantita solo per errori iniziali sufficientemente piccoli.

**Esercizio.** Si valuti analiticamente e numericamente una stima del bacino di attrazione del controllo basato su modello linearizzato. Si ripeta lo

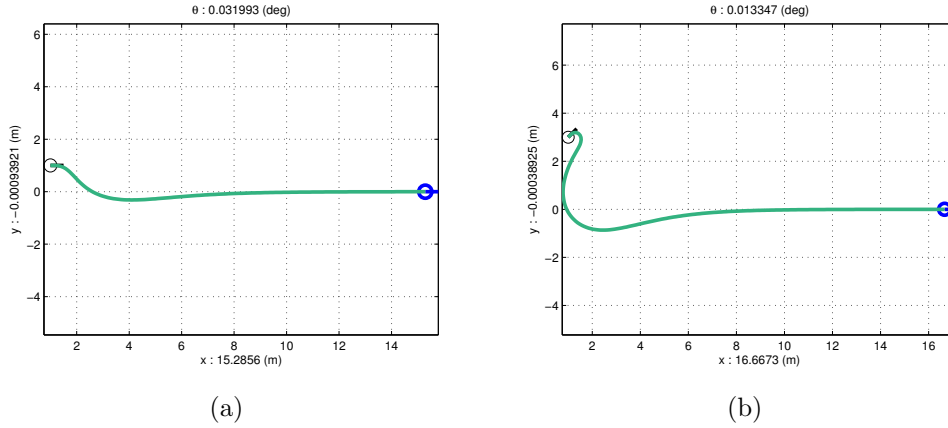


Figura 6.8: Risultati della simulazione per la stabilizzazione dell'uniciclo sulla retta  $y = 0$  mediante controllore basato sul sistema linearizzato approssimato attorno alla traccia di riferimento con  $\hat{v} = 10$  e stato iniziale: (a)  $q_0 = [x_0, y_0, \theta_0]^T = [1, 1, 0]$ ; (b)  $q_0 = [x_0, y_0, \theta_0]^T = [1, 3, \frac{\pi}{4}]$ .

studio per diverse scelte dei parametri del controllore linearizzato.

**Esercizio.** Si costruisca un controllore con retroazione della sola uscita  $y$  (distanza dalla retta). Si verifichi se per condizioni iniziali all'interno di una regione data (ad es. nella forma  $|y(0)| \leq y_0, |\theta(0)| \leq \theta_0$ ) si può garantire l'asintotica stabilità e il non superamento nelle evoluzioni di limiti funzionali assegnati (ad es. nella forma  $|y(t)| \leq y_M, |\theta(t)| \leq \theta_M, \forall t$ ).

### Controllo mediante funzione di Lyapunov

È possibile osservare che in effetti la dinamica delle variabili  $y$  e  $\theta$  non dipende in alcun modo dalla  $x$ . Quindi possiamo studiare la seconda e terza equazione di (6.18) come un sottosistema a sé stante, con variabili di stato  $(y, \theta)$  ed ingresso  $\omega$  che le deve regolare a zero. Possiamo quindi costruire una funzione candidata di Lyapunov di controllo positiva definita intorno all'origine nello spazio di stato ridotto  $(y, \theta)$  nella forma

$$V(q) = \frac{1}{2}(y^2 + \theta^2),$$

per la quale si ha

$$\dot{V}(q) = y \sin \theta \bar{v}(t) + \theta \omega.$$

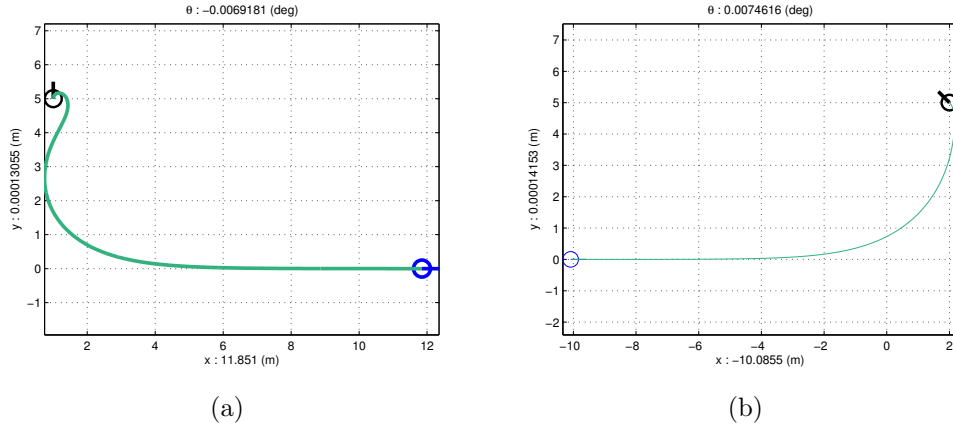


Figura 6.9: Risultati della simulazione per la stabilizzazione dell'uniciclo sulla retta  $y = 0$  mediante funzione di controllo di Lyapunov: (a) stato iniziale  $q_0 = [x_0, y_0, \theta_0]^T = [1, 5, \frac{\pi}{2}]$  e  $\hat{v} = 10$ ; (b) stato iniziale  $q_0 = [x_0, y_0, \theta_0]^T = [2, 2, \frac{3\pi}{4}]$  e  $\hat{v} = -10$  (marcia indietro). Per tutte le simulazioni la costante di controllo  $K_\theta$  è stata scelta pari a 20.

Scegliendo come legge di controllo

$$\omega(y, \theta) = -y \frac{\sin \theta}{\theta} \bar{v}(t) - K_\theta \theta \quad (6.19)$$

con  $K_\theta > 0$  costante, si ottiene  $\dot{V}(q) = -K_\theta \theta^2$ , che è negativa semi-definita. Si noti che la funzione di retroazione  $\omega(y, \theta)$  è ben definita e continua ovunque, in particolare anche in  $\theta = 0$ , dove vale  $\omega(y, 0) = -y \bar{v}(t)$ .

Si ottiene immediatamente che l'insieme  $R = \{q | \dot{V}(q) = 0\}$  è dato da  $R = \{y, \theta | \theta = 0\}$ . Da qui si ricava facilmente che l'unica traiettoria del sistema interamente contenuta in  $R$  è caratterizzata da  $\dot{\theta} = 0 = \omega = -y \bar{v}(t)$ , dalla quale infine si ottiene che, per  $\bar{v}(t) \neq 0$ , tutte le traiettorie che partono dall'interno di una curva di livello di  $V$  convergono al punto di equilibrio  $(y, \theta) = (0, 0)$ . Inoltre, essendo  $V$  radialmente illimitata, è possibile concludere per la globale asintotica stabilità dell'equilibrio.

I risultati di alcune simulazioni sono riportati in fig. 6.9.

### 6.5.3 Inseguimento di moto con un uniciclo

Per l'inseguimento di un moto assegnato (figura 6.10), è da considerare il fatto che i vincoli cui è sottoposto l'uniciclo possono rendere impossibile raggiungere e mantenere il veicolo sul punto obiettivo, se questo si muove con legge arbitraria.

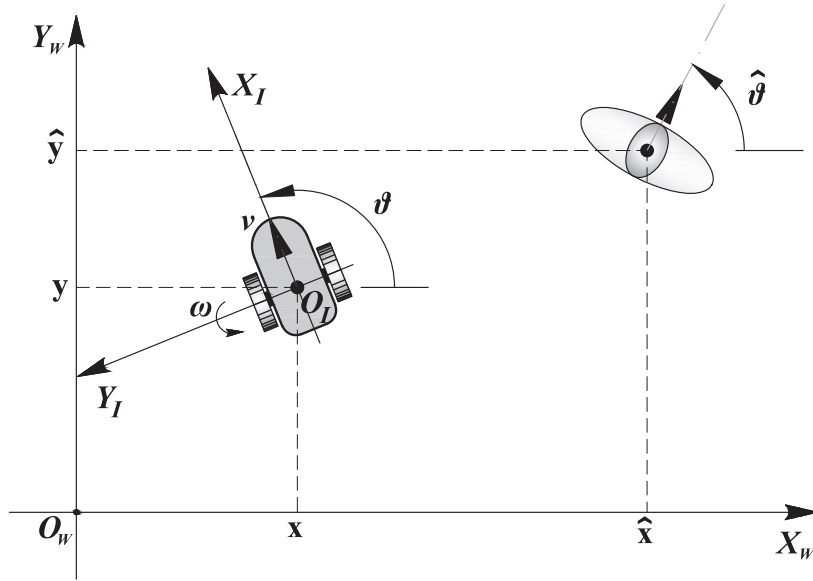


Figura 6.10: Riferimento assoluto  $\langle W \rangle$  e riferimento solido al veicolo inseguitore  $\langle I \rangle$ .

Si consideri infatti un moto desiderato generale, descritto da una terna di funzioni assegnate  $q_d(t) = (x_d(t), y_d(t), \theta_d(t))$ . Definito l'errore di postura tra il veicolo da controllare e l'obiettivo come  $e = [x_d - x, y_d - y, \theta_d - \theta]^T$ , il problema è ricondotto a un problema di stabilizzazione nell'origine per  $e$ . Notando che l'errore di inseguimento prescinde dalla posizione assoluta dei due veicoli rispetto ad una terna fissa di riferimento  $\langle W \rangle$ , ma dipende solamente dalla loro posizione relativa, è possibile riferire le variabili errore rispetto ad una terna di riferimento solida con il veicolo "inseguitore"  $\langle I \rangle$  ed allineata con l'asse  $x$  nel suo senso di avanzamento, come riportato in figura 6.10. Nelle nuove coordinate, l'errore di postura si scrive

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (x_d - x) \cos \theta + (y_d - y) \sin \theta \\ -(x_d - x) \sin \theta + (y_d - y) \cos \theta \\ \theta_d - \theta \end{bmatrix}.$$

Derivando rispetto al tempo queste espressioni, ed esprimendo tutto nelle nuove coordinate di errore, si ha

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -v + e_2 \omega + \cos(\theta_d - e_3) \dot{x}_d + \sin(\theta_d - e_3) \dot{y}_d \\ -e_1 \omega - \sin(\theta_d - e_3) \dot{x}_d + \cos(\theta_d - e_3) \dot{y}_d \\ \dot{\theta}_d - \omega \end{bmatrix}, \quad (6.20)$$

dove si sono usate le equazioni del veicolo (6.17). Si consideri ora la possibilità di avere un equilibrio con errore nullo, cioè un inseguimento perfetto con  $e \equiv 0$  e  $\dot{e} \equiv 0$ . Dalla prima e terza delle (6.20) si ottiene immediatamente che deve essere

$$\begin{aligned} v &= \dot{x}_d \cos \theta_d + \dot{y}_d \sin \theta_d \\ \omega &= \dot{\theta}_d \end{aligned} ,$$

mentre per soddisfare la seconda equazione delle (6.20) è necessario che sia

$$\dot{x}_d \sin \theta_d - \dot{y}_d \cos \theta_d = \begin{bmatrix} \sin \theta_d & -\cos \theta_d & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_d \\ \dot{y}_d \\ \dot{\theta}_d \end{bmatrix} = 0.$$

Questa condizione esprime un vincolo sul moto del punto da inseguire, che è dello stesso tipo di quello cui è sottoposto il veicolo inseguitore. In altri termini, l'inseguimento esatto da parte di un unicycle è possibile solo se il punto obiettivo si muove anch'esso come un unicycle (questa può essere considerata una istanza del cosiddetto "principio del modello interno" nella teoria del servocontrollo).

Se il moto dell'obiettivo da inseguire è generato proprio da un modello di unicycle, ovvero se

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_d \\ \dot{y}_d \\ \dot{\theta}_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_d \\ \sin \theta_d \\ 0 \end{bmatrix} v_d + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \omega_d,$$

la dinamica dell'errore di inseguimento (6.20) assume la forma semplificata

$$\dot{e} = \begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -v + e_2 \omega + v_d \cos e_3 \\ -e_1 \omega + v_d \sin e_3 \\ \omega_d - \omega \end{bmatrix}. \quad (6.21)$$

### Controllo mediante linearizzazione approssimata

Il sistema (6.21) ha adesso un equilibrio in  $e = 0$  corrispondente agli ingressi  $v = v_d(t)$  e  $\omega = \omega_d(t)$ . Definendo le variabili di controllo traslate  $u_1 = v - v_d(t)$  e  $u_2 = \omega - \omega_d(t)$ , il sistema assume la forma  $\dot{e} = f(e, t) + g(e)u$ , ovvero

$$\dot{e} = \begin{bmatrix} -v_d(t)(1 - \cos e_3) + \omega_d(t) e_2 \\ v_d(t) \sin e_3 - \omega_d(t) e_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u_1 + \begin{bmatrix} e_2 \\ -e_1 \\ -1 \end{bmatrix} u_2. \quad (6.22)$$

Per controllare il sistema (6.22) si può procedere a linearizzarne il modello intorno all'equilibrio nell'origine ( $e = 0, u = 0$ ), per poi applicare tecniche di



controllo lineare. Il modello linearizzato  $\dot{e} = Ae + Bu$  si ottiene facilmente come

$$A = \left[ \begin{array}{ccc} 0 & \omega_d(t) + u_2 & -v_d \sin e_3 \\ -\omega_d - u_2 & 0 & v_d \cos e_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \Bigg|_{\substack{e=0 \\ u=0}} = \left[ \begin{array}{ccc} 0 & \omega_d(t) & 0 \\ -\omega_d(t) & 0 & v_d(t) \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

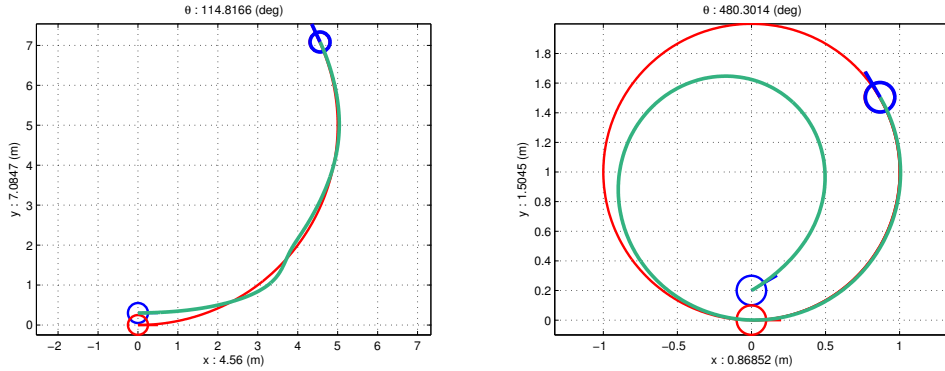
$$B = \left[ \begin{array}{cc} -1 & e_2 \\ 0 & -e_1 \\ 0 & -1 \end{array} \right] \Bigg|_{\substack{e=0 \\ u=0}} = \left[ \begin{array}{cc} -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{array} \right].$$

Il sistema è in generale tempo variante, essendo gli elementi della matrice dinamica  $A$  funzioni esplicite del tempo. Il controllo del modello linearizzato si può d'altronde effettuare con metodi elementari solo nell'ipotesi che il riferimento abbia velocità  $v_d(t) = v_d$ ,  $\omega_d(t) = \omega_d$  costanti. In questa ipotesi, il sistema linearizzato ha matrice di raggiungibilità

$$R = \left[ \begin{array}{cccccc} -1 & 0 & 0 & 0 & \omega_d^2 & -\omega_d v_d \\ 0 & 0 & \omega_d & -v_d & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

ed è quindi completamente raggiungibile purchè la velocità di avanzamento e/o quella di rotazione dell'obiettivo da inseguire sia diversa da zero. Se questo è il caso, una semplice retroazione degli stati  $u = Ke$  permette di allocare gli autovalori di  $A+BK$  liberamente nel semipiano sinistro, e quindi può rendere l'inseguimento asintoticamente stabile. Naturalmente, questo risultato si appoggia sulla ipotesi che sia lo stato (ovvero l'errore di inseguimento) che le velocità dell'obiettivo (da cui dipende la retroazione  $K = K(v_d, \omega_d)$ ) siano note, e garantisce la convergenza sull'obiettivo solo per condizioni iniziali sufficientemente piccole. Ad illustrazione di questa tecnica, in figura 6.11 è riportato il risultato di alcune simulazioni

Nel caso più generale di velocità dell'obiettivo non costanti, il problema di stabilizzazione è più complesso. Una tecnica semplice, ma sulle cui caratteristiche di convergenza non è possibile dare garanzie precise, consiste nell'applicare una versione "estesa" della tecnica di allocazione, calcolando una matrice di retroazione  $K(t) = K(v_d(t), \omega_d(t))$  che allochi gli autovalori istantanei di  $A(t) + BK(t)$  in una posizione costante nel semipiano sinistro (questo può venir fatto con un algoritmo di allocazione in forma simbolica, ovvero ricalcolando numericamente la retroazione ad intervalli di tempo sufficientemente brevi, in modo simile a come si procede in un filtro di Kalman esteso). Si noti che la procedura di allocazione estesa non è sufficiente a



(a)  $e_o = [0.3, 0, 0]^T$ ,  $v_d = 1$  e  $\omega_d = 0.2$       (b)  $e_o = [0.2, 0, \pi/6]^T$ ,  $0v_d = 1$  e  $\omega_d = 1$

Figura 6.11: Inseguimento di obiettivi mobili (in rosso) con veicolo di tipo unicycle (in blu). Il controllore implementato, basato sul modello linearizzato approssimato, è costituito da una semplice retroazione dello stato ( $u = Ke$ ) il quale è stato stimato utilizzando come unica uscita misurata l'errore  $e_1$ . Il sistema linearizzato risulta completamente osservabile dalla misura di  $e_1$  purchè la velocità di avanzamento e/o quella di rotazione dell'obiettivo da inseguire sia diversa da zero.

garantire la stabilità nel caso generale: comunque, se le velocità  $v_d(t)$  e  $\omega_d(t)$  sono limitate e le loro derivate  $\dot{v}_d(t)$  e  $\dot{\omega}_d(t)$  sono sufficientemente piccole, il teorema di Rosenbrock sulla stabilità dei sistemi lineari lentamente tempo varianti garantisce l'esponenziale stabilità del sistema linearizzato risultante.

**Esercizio.** Applicare il metodo di inseguimento di traiettoria per un veicolo-obiettivo che si muova con legge tempo variante. Si supponga inoltre di conoscere solo la misura della distanza tra i veicoli e la direzione del veicolo inseguito rispetto all'inseguitore, nel sistema di riferimento di quest'ultimo, sviluppando (se possibile) un osservatore dello stato.

### Controllo mediante funzione di Lyapunov

Torniamo a considerare la dinamica dell'errore di tracking (6.21).

$$\dot{e} = \begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -v + e_2\omega + v_d \cos e_3 \\ -e_1\omega + v_d \sin e_3 \\ \omega_d - \omega \end{bmatrix}.$$

Si scelga come funzione candidata

$$V(e) = \frac{1}{2}(e_1^2 + e_2^2) + K(1 - \cos e_3),$$

con  $K > 0$ , che è p.d. e globalmente p.s.d., annullandosi solo in  $e_3 = 0$  e multipli di  $2\pi$ . Si noti che l'insieme  $\Omega_\ell = \{e | V(e) < \ell\}$  è limitato dalla curva di livello  $V(e) = \ell$  chiusa per ogni  $\ell < 2K$ . Calcolandone la derivata si ha

$$\begin{aligned}\dot{V}(e) &= e_1(v_d \cos e_3 - v + e_2\omega) + e_2(v_d \sin e_3 - e_1\omega) + K \sin e_3(\omega_d - \omega) \\ &= e_1(v_d \cos e_3 - v) + e_2(v_d \sin e_3) + K \sin e_3(\omega_d - \omega) \\ &= e_1(v_d \cos e_3 - v) + \sin e_3(e_2v_d + K(\omega_d - \omega)) .\end{aligned}$$

Scegliendo i controlli

$$\begin{cases} v = v_d \cos e_3 - \lambda_1 e_1 \\ \omega = \omega_d - \frac{e_2}{K}v_d - \lambda_2 \sin e_3 \end{cases} ,$$

con  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  guadagni positivi, si ottiene

$$\dot{V} = -\lambda_1 e_1^2 - K \lambda_2 \sin^2 e_3 .$$

Nel caso in cui  $v_d$  e  $\omega_d$  siano costanti possiamo usare i teoremi di Lyapunov e dell'insieme invariante massimo per discutere la convergenza. Se il riferimento varia le sue velocità, il sistema (6.21) diviene tempo-variante, e il teorema di Lasalle deve essere usato con maggior cautela, ricorrendo alla versione di Lasalle-Yoshizawa che lo generalizza a sistemi tempo varianti.

In ogni caso, posto  $\dot{V}(e) = -W(e)$  negativa semi-definita, e definito l'insieme  $S$  in cui si annulla la derivata della funzione di Lyapunov ( $S = \{e \in \Omega_{\ell=2K} | W(e) = 0\}$ ), si ha che  $e(t) \rightarrow S$  per  $t \rightarrow \infty$ . D'altronde, per  $e \in S$  vale  $v = v_d$  e  $\omega = \omega_d - \frac{e_2}{K}v_d$ , da cui la dinamica del sistema diviene

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{e}_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_2\omega_d - \frac{1}{K}e_2^2v_d \\ 0 \\ -\frac{1}{K}e_2v_d \end{bmatrix} .$$

Da queste relazioni si ricava che, se almeno una tra le velocità dell'obiettivo da inseguire  $v_d$  e  $\omega_d$  è diversa da zero, l'insieme invariante massimo in  $S$  è l'origine, che è quindi un punto di equilibrio asintoticamente stabile per il sistema (6.21), attrattivo per tutti i punti di  $\Omega_{2K}$ <sup>7</sup>.

Ad illustrazione di questa tecnica, fissando  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ ,  $K = 10$ , e scegliendo come condizione iniziale del veicolo inseguitore il punto  $q_0 = [x_0, y_0, \theta_0]^T = [0, 20, \frac{\pi}{2}]^T$  si ottengono vari risultati a seconda delle velocità del riferimento. Nel primo esempio (fig. 6.12-a) il veicolo di riferimento ha come condizione iniziale  $q_d(0) = [-10, 0, -\frac{\pi}{4}]^T$  e velocità  $[v_d, \omega_d]^T =$

<sup>7</sup>Il sistema controllato ammette anche altri equilibri in  $e_1 = e_2 = 0$  ed  $e_3 = \pm\pi$ , che sono instabili. La situazione si ripete per i multipli di  $2\pi$

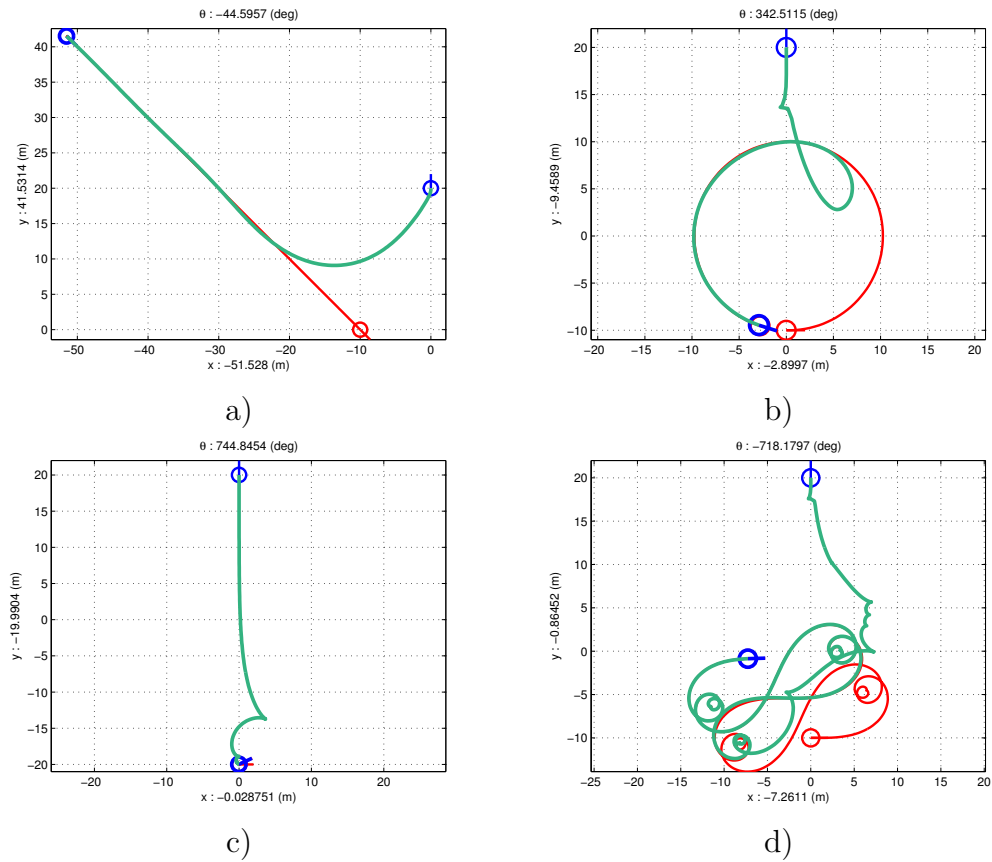


Figura 6.12: Inseguimento di obiettivi mobili con veicolo di tipo unicycle, con una legge derivata da una funzione di Lyapunov di controllo.

$[-10, 0]^T$ , che definiscono una retta di equazione  $y = -x - 10$ . Se il veicolo di riferimento ha come condizione iniziale  $q_d(0) = [0, -10, 0]^T$  e velocità  $[v_d, \omega_d]^T = [10, 1]^T$  (fig. 6.12-b), la sua traiettoria descrive una circonferenza di raggio  $R = 10$  nello spazio di stato del veicolo, percorsa a velocità costante. Nel terzo esempio (fig. 6.12-c) il veicolo di riferimento ha come condizione iniziale  $q_d(0) = [0, -20, 0]^T$ . Le velocità del riferimento sono stavolta  $[v_d, \omega_d]^T = [0, 1]^T$  corrispondenti ad una traiettoria di rotazione sul posto. Nel quarto ed ultimo esempio (figura 6.12 in basso a destra) il veicolo di riferimento ha come condizione iniziale  $q_d(0) = [0, -10, 0]^T$  e velocità tempo variante  $[v_d, \omega_d]^T = [20 \cos(t), 10 \sin(t)]^T$ , le quali descrivono una traiettoria complessa nello spazio di stato.

### 6.5.4 Controllo della postura di un unicycle

Dal punto di vista prettamente controllistico, il problema del controllo di postura (“point-to-point motion”) è un problema di stabilizzazione di un punto di equilibrio nello spazio di stato del veicolo.

Nel caso dei veicoli soggetti a vincoli anolonomi, questo problema è considerevolmente più difficile di quelli di inseguimento di un moto o di una traccia. Per illustrare questo punto, si consideri che il sistema linearizzato ottenuto nel paragrafo 6.5.3 diviene non completamente raggiungibile né stabilizzabile quando il veicolo di riferimento sia immobile  $\hat{v} = \hat{\omega} = 0$ , come accade appunto se si desidera raggiungere una posizione e orientazione costanti. Ciò impone che la stabilizzazione di postura debba usare metodi di controllo intrinsecamente nonlineari.

Anche all’interno dei sistemi nonlineari, la stabilizzazione di un robot mobile in una assegnata postura rappresenta un problema con caratteristiche molto particolari. Si consideri infatti il seguente teorema di carattere molto generale, dovuto a Roger Brockett:

**Theorem 1.** *Sia dato il sistema  $\dot{x} = f(x, u)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ , e sia  $x_0$  uno stato di equilibrio del sistema con ingresso nullo (ossia  $f(x_0, 0) = 0$ ). Condizione necessaria per l’esistenza di una legge di controllo differenziabile con continuità e tempo invariante  $u(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  che renda l’equilibrio asintoticamente stabile è che l’immagine della funzione  $f(x, u)$  applicata al dominio  $\{x \in B_{x_0} \subset \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m\}$  contenga un insieme aperto in  $\mathbb{R}^n$  di cui fa parte l’origine (ovvero  $f(x, u)$  sia surgettiva localmente in  $x$ ).*

Per applicare la condizione di Brockett alla cinematica dell’unicycle dovremmo poter trovare una soluzione in  $x, y, \theta, v, \omega$ , con  $x, y, \theta$  piccoli, per valori piccoli ma arbitrari del vettore  $[a, b, c]^T$  in

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \cos \theta \\ v \sin \theta \\ \omega \end{bmatrix}.$$

Ciò è chiaramente impossibile: basti pensare al caso  $a = 0, b \neq 0, \forall c$ , che impone  $\theta = \pm\pi/2$ . Questo esclude che si possa trovare una retroazione tempo invariante e differenziabile con continuità per stabilizzare l’unicycle su una postura assegnata.

Nonostante l’ostruzione posta dal teorema di Brockett, si consideri il problema di stabilizzare una postura (che senza perdere di generalità supporremo sia l’origine dello spazio di stato  $(x, y, \theta)$ ) per il veicolo di tipo unicycle. Si

introduca un nuovo sistema di coordinate polari definito da

$$\bar{q} = \begin{bmatrix} \rho \\ \phi \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{x^2 + y^2} \\ \arctan(\frac{y}{x}) - \pi \\ \phi - \theta \end{bmatrix} = \Phi(q), \quad (6.23)$$

dove  $\rho$  è la distanza del punto di mezzo dell'interasse delle ruote dall'origine,  $\phi$  è l'angolo<sup>8</sup> formato con l'asse delle ascisse dal vettore che unisce il veicolo all'origine, e  $\alpha$  è l'angolo tra la direzione di avanzamento del veicolo ed il vettore stesso (figura 6.13).

Si osservi che il cambiamento di variabili è ben definito e biunivoco ovunque nel piano, eccetto che nell'origine. La coordinata  $\phi$  non è infatti definita in  $x = y = 0$ , mentre all'origine dello spazio  $(\rho, \phi, \alpha)$  corrisponde univocamente l'origine di  $(x, y, \theta)$ .

La trasformazione di coordinate inversa è data da

$$q = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\rho \cos \phi \\ -\rho \sin \phi \\ \phi - \alpha \end{bmatrix} = \Phi^{-1}(\bar{q}). \quad (6.24)$$

Per questi cambiamenti di coordinate si ha

$$\Phi_* = \frac{\partial \Phi}{\partial q} = \begin{bmatrix} \frac{x}{\rho} & \frac{y}{\rho} & 0 \\ -\frac{y}{\rho^2} & \frac{x}{\rho^2} & 0 \\ -\frac{y}{\rho^2} & \frac{x}{\rho^2} & -1 \end{bmatrix}; \quad \Phi_*^{-1} = \frac{\partial \Phi^{-1}}{\partial \bar{q}} = \begin{bmatrix} -\cos \phi & \rho \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & -\rho \cos \phi & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

e  $\det \Phi_* = -1/\rho$ ,  $\det \Phi_*^{-1} = -\rho$ . Si osserva ancora che nel punto  $\rho = 0$  le funzioni  $\Phi(q)$  non definiscono un cambiamento di coordinate lecito, ma possono essere usate ovunque altrove.

Introducendo per convenienza la nuova variabile di controllo  $w = v/\rho$  (definita anch'essa ovunque eccetto che nell'origine), il modello cinematico nelle nuove variabili di stato è dato da

$$\begin{bmatrix} \dot{\rho} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x \cos \theta + y \sin \theta}{\rho} v \\ \frac{-y \cos \theta + x \sin \theta}{\rho^2} v \\ \dot{\phi} - \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\rho \cos \alpha \\ \sin \alpha \\ \sin \alpha \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \omega \quad (6.25)$$

È possibile osservare che il sistema (6.25), ottenuto con un cambiamento non ovunque continuo di coordinate e quindi non perfettamente equivalente al sistema originario, soddisfa adesso la condizione necessaria per la stabilizzabilità.

<sup>8</sup>Si dà per inteso che la funzione  $\arctan(y/x)$  sia definita su tutti i quadranti del piano cartesiano come  $\text{atan2}(y, x)$ .

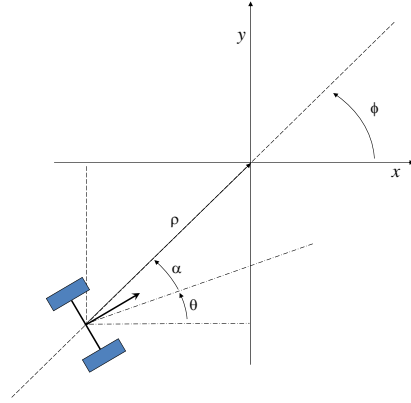


Figura 6.13: Coordinate usate per descrivere la postura dell'uniciclo.

Si può cercare quindi di stabilizzare il veicolo utilizzando un controllore alla Lyapunov. Si consideri a tal proposito la candidata

$$V(\bar{q}) = \frac{1}{2}(\lambda_1 \rho^2 + \lambda_2 \phi^2 + \alpha^2)$$

con  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  costanti positive di progetto, per la quale si ha

$$\dot{V} = -\lambda_1 \rho^2 \cos \alpha w + \lambda_2 \phi \sin \alpha w + \alpha \sin \alpha w - \alpha \omega.$$

Si può porre una legge di controllo

$$\begin{aligned} w &= k_1 \cos \alpha, \quad k_1 > 0 \\ \omega &= k_1 \frac{\sin \alpha}{\alpha} \cos \alpha (\alpha + \lambda_2 \phi) + k_2 \alpha, \quad k_2 > 0, \end{aligned} \quad (6.26)$$

che è ben definita ovunque nelle coordinate  $\bar{q}$ . Si ottiene quindi

$$\dot{V}(\bar{q}) = -\lambda_1 k_1 \rho^2 \cos^2 \alpha - k_2 \alpha^2$$

che è negativa semi-definita. Notando che nell'insieme  $R = \{\bar{q} \mid \dot{V}(\bar{q}) = 0\} = \{\bar{q} \mid \rho = 0, \alpha = 0\}$  dalle (6.26) si ha  $w = k_1$  (quindi  $v = \rho w = 0$ ) e  $\omega = k_1 \lambda_2 \phi$  e, sostituendo nella dinamica (6.25),  $\omega = k_1 \lambda_2 \phi = \dot{\alpha} = 0$ , quindi l'invariante massimo in  $R$  ha  $\phi = 0$ . Per Krasowsky si ha quindi che l'origine di  $\bar{q}$  è asintoticamente stabile. Essendo la candidata  $V(\bar{q})$  ovunque positiva (eccetto che nell'origine) e radialmente illimitata, per qualsiasi condizione iniziale si può scegliere un livello  $\ell$  tale per cui la condizione iniziale sia

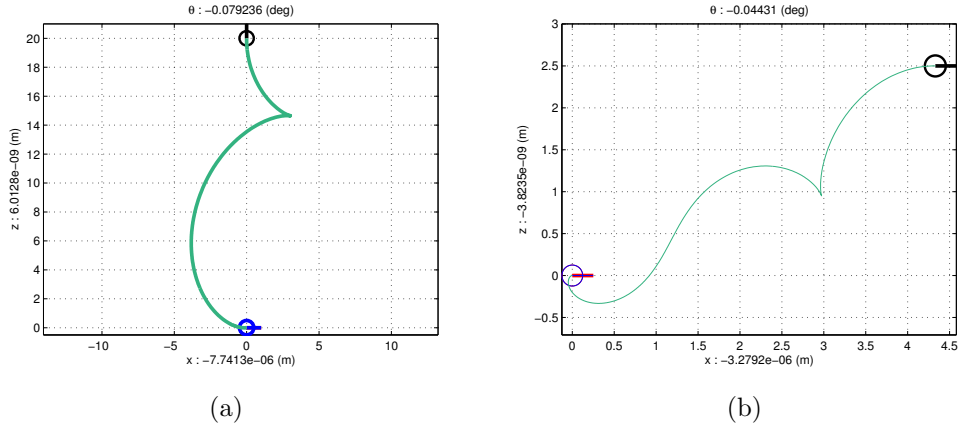


Figura 6.14: Risultati della simulazione per il controllo di postura di un unicyclo, a partire dalla posizione iniziale: (a)  $(\rho_o, \phi_o, \alpha_o) = (20, 3\pi/2, \pi)$ , (b)  $(\rho_o, \phi_o, \alpha_o) = (5, 7\pi/6, 7\pi/6)$ . Per entrambe le simulazioni, i valori delle costanti di controllo sono:  $k_1 = k_2 = 1$  e  $\lambda_2 = 0.5$ .

all'interno della curva di livello  $\Omega_\ell$ , e quindi concludere anche per la globale attrattività dell'origine.

I risultati di alcune simulazioni sono riportati in figura 6.14.

In conclusione, si osserva che, nonostante la difficoltà del problema nelle coordinate originali, il progetto e l'analisi della stabilità nelle coordinate  $\bar{q}$  è stata svolta con tecniche semplici, e ha prodotto leggi di controllo continue e differenziabili con continuità. Naturalmente, vista la natura discontinua delle trasformazioni usate, è necessario porre attenzione al significato e agli effetti reali delle posizioni fatte.

Si osservi innanzitutto che la convergenza di  $\bar{q}$  all'origine è asintotica, e che quindi, se  $\rho(0) \neq 0$ ,  $\rho(t) \neq 0$  per ogni  $t$  finito. Se  $\rho(0) = 0$ , il controllo (6.26) resta ben definito. Si osservi in particolare che la velocità di traslazione  $v = \rho w$  si annulla in queste configurazioni, e che la coordinata  $\phi$  continua a convergere a zero, anche se perde significato fisico in relazione al veicolo originario.

Quando si esprimesse la legge di controllo (6.26) nelle originali coordinate  $q$  del veicolo, queste non rimarrebbero continue: in due configurazioni con veicoli in punti  $(x, y)$  arbitrariamente vicini (nella metrica naturale di  $q$ ,  $d = \sqrt{x^2 + y^2} + \alpha|\theta|$ ) ma in quadranti opposti del piano, i valori di  $\alpha$  e  $\phi$ , e quindi i controlli (6.26), assumono valori diversi per una differenza finita.

La praticità o meno del controllore proposto dipende dai sensori disponibili. Se le misure effettivamente ottenibili sono quelle delle configurazioni



originali  $q$ , la discontinuità messa in evidenza rende difficile l'applicazione pratica nelle vicinanze dell'origine, dove il rumore di misura può provocare discontinuità a salto dell'azione di controllo. Se però i sensori a bordo veicoli rilevano proprio la distanza dall'obiettivo e gli angoli sotto i quali lo si riguarda, il metodo diviene efficace e facilmente applicabile.

## 6.6 Controllo Dinamico di Sistemi Meccanici Completamente Attuati

### 6.6.1 Controllo Dinamico di Sistemi Non Vincolati - Bracci Articolati

Riprendendo la nozione già introdotta in precedenza di “completa attuazione”, diremo più precisamente che un meccanismo non vincolato è completamente attuato se a ogni forza generalizzata della formulazione lagrangiana può essere fatta corrispondere l'azione controllata di un attuatore.

Consideriamo dapprima l'espressione della dinamica di un sistema Lagrangiano descritto da  $n$  coordinate  $q$  non vincolate, soggetto alle forze generalizzate  $\tau$ , ovvero

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau, \quad (6.27)$$

Si noti che in generale le forze generalizzate  $\tau$  (cioè quelle che fanno lavoro sulle particolari coordinate lagrangiane  $q$  scelte) possono non coincidere con le forze  $f$  effettivamente esercitate dagli  $\ell$  attuatori. Vi sarà comunque tra esse una relazione che assumeremo lineare e che indicheremo in quel che segue con

$$\tau = F(q)f.$$

Il sistema si dirà *completamente attuato* se la matrice  $F(q)$  è quadrata ( $\ell = n$ ) e invertibile su tutto il dominio di configurazioni di interesse. Si dirà che il sistema è *sovra-attuato* (o che l'attuazione è *ridondante*) se  $\ell > n$  ed il rango di  $F(q)$  è  $n$  ovunque, mentre il sistema si dirà *sotto-attuato* se  $\text{rank}(F(q)) < n$ . Considereremo in questo capitolo sistemi completamente attuati. I sistemi con attuatori ridondanti possono essere facilmente ricondotti a quelli, introducendo solamente in più la opportunità di una scelta ottima di  $f$  per una data scelta di  $\tau$ . I casi di sistemi vincolati completamente attuati sono trattati in una sezione successiva, mentre i sistemi sottoattuati sono trattati in un capitolo successivo.

### 6.6.2 Controllo Proporzionale Derivativo ai Giunti

La prima e più semplice possibile soluzione per la scelta di una legge per le coppie  $\tau$  per controllare la dinamica del sistema (6.27) prevede l'applicazione di controllori standard alle variabili di giunto, considerata ciascuna indipendentemente dalle altre.

Indicando i riferimenti che si desidera inseguire con  $q_d(t) : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}^n$ , definiamo gli errori di inseguimento  $e_q(t) = q_d(t) - q(t)$ . Consideriamo una legge di controllo per la  $i$ -esima coordinata data da un termine proporzionale all'errore più un termine proporzionale alla sua derivata, sommato ad un termine di azione in avanti (*feed forward*)

$$\tau_i = \tau_{ff,i} + K_{p,i}e_{q,i} + K_{v,i}\dot{e}_{q,i}$$

con  $K_{p,i} > 0$  e  $K_{v,i} > 0$ , ovvero in forma compatta

$$\tau = \tau_{ff} + K_p e_q + K_v \dot{e}_q$$

con  $K_p = \text{diag}(K_{p,i})$  e  $K_v = \text{diag}(K_{v,i})$  matrici diagonali positive definite. Leggi di controllo di questo tipo, detto Proporzionale-Derivativo (PD) con compensazione, sono state utilizzate nei controllori dei manipolatori industriali articolati sin dai primi esemplari negli anni '60.

La dinamica del sistema controllato nelle variabili di stato  $(e_q, \dot{e}_q) \in \mathbb{R}^{2n}$  diviene dunque

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau_{ff} + K_p e_q + K_v \dot{e}_q. \quad (6.28)$$

dove si legga  $q = q_d - e_q$ ,  $\dot{q} = \dot{q}_d - \dot{e}_q$ , etc.

L'origine  $e_q = 0$ ,  $\dot{e}_q = 0$  è un equilibrio del sistema (6.28), corrispondente al moto  $q(t) \equiv q_d(t)$ , se

$$M(q_d(t))\ddot{q}_d + C(q_d, \dot{q}_d)\dot{q}_d + G(q_d) = \tau_{ff}.$$

Questo si verifica se  $\dot{q}_d = \ddot{q}_d = 0$  e se vale  $\tau_{ff} = G(q)$ . La prima ipotesi significa limitarsi al caso di controllo di postura, mentre la seconda corrisponde a supporre la perfetta compensazione degli effetti della gravità. Questa ultima ipotesi può essere verificata ad esempio in assenza di effetti della forza peso sui giunti (come nel caso di moti del sistema limitati ad un piano orizzontale), o quando sia disponibile una stima accurata del termine  $G(q)$ .

La legge di controllo

$$\tau = G(q) + K_p e_q + K_v \dot{e}_q \quad (6.29)$$

viene detta *controllo PD ai giunti con compensazione di gravità*.

Per quanto la legge di controllo di ciascuna coordinata sia indipendente dai valori delle altre, i forti accoppiamenti dinamici rendono tutt'altro che ovvia la conclusione che il controllo PD possa stabilizzare il sistema nel valore desiderato  $e_q = \dot{e}_q = 0$ . Per studiare la stabilità del sistema complessivo, utilizzeremo la tecnica di Lyapunov diretta. Consideriamo la candidata di Lyapunov

$$V(e_q, \dot{e}_q) = \frac{1}{2} \dot{e}_q^T M(q) \dot{e}_q + \frac{1}{2} e_q^T K_p e_q.$$

Osserviamo che, nell'ipotesi  $\dot{q}_d = 0$ , il primo addendo in  $V$  corrisponde all'energia cinetica del sistema  $T = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} > 0$ . Il secondo addendo ha invece la forma di una energia potenziale associata ad un elemento elastico multidimensionale di rigidità  $K_p$  elongato di  $e_q$ . Se  $K_p$  è diagonale, è possibile visualizzare questa elasticità come quella di molle virtuali associate a ciascun giunto che si oppongono agli spostamenti rispetto alle posizioni di riferimento del giunto stesso.

Derivando la candidata  $V(t)$  lungo le traiettorie del sistema (6.28), si ha

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \dot{q}^T M(q) \ddot{q} + \frac{1}{2} \dot{q}^T \dot{M}(q) \dot{q} - e_q^T K_p \dot{q} \\ &= \dot{q}^T (\tau - C(q, \dot{q}) \dot{q} - G(q)) + \frac{1}{2} \dot{q}^T \dot{M}(q) \dot{q} - e_q^T K_p \dot{q} \\ &= \dot{q}^T K_p e_q - \dot{q}^T K_v \dot{q} + \frac{1}{2} \dot{q}^T \left( \dot{M}(q) - 2C(q, \dot{q}) \right) \dot{q} - e_q^T K_p \dot{q} \\ &= -\dot{q}^T K_v \dot{q} \end{aligned} \quad (6.30)$$

dove nell'ultimo passaggio il primo addendo si cancella con l'ultimo (si tratta di due scalari, la cui uguaglianza è evidente per trasposizione), e si è utilizzata la nota proprietà  $\frac{1}{2} \dot{q}^T (\dot{M} - 2C) \dot{q} = 0$ , che deriva dal teorema delle forze vive.

La  $\dot{V}(e_q, \dot{e}_q)$  così ottenuta è negativa semi-definita, il che permette di concludere sulla stabilità marginale dell'equilibrio. Si può però facilmente proseguire l'analisi applicando il teorema dell'insieme invariante massimo. Osserviamo che, essendo  $M(q)$  e  $K_p$  positive definite (la prima in quanto matrice di inerzia, la seconda per scelta),  $V(e_q, \dot{e}_q)$  è radialmente illimitata e le sue curve di livello  $\Omega_\ell = \{(e_q, \dot{e}_q) | V(e_q, \dot{e}_q) = \ell\}$  sono chiuse per qualsiasi livello  $\ell$ . Al loro interno l'insieme  $R = \{(e_q, \dot{e}_q) \in \Omega_\ell | \dot{V}(e_q, \dot{e}_q) = 0\}$  in cui  $V(t)$  non decresce è dato da  $R = \{(e_q, \dot{e}_q) \in \Omega_\ell | \dot{e}_q = 0\}$ . In  $R$  si ha quindi (per l'ipotesi  $\dot{q}_d = 0$ ) che  $\dot{q} \equiv 0$  e  $\ddot{q} \equiv 0$ . L'insieme invariante massimo in  $R$  è dunque ottenuto per sostituzione nel sistema (6.28) (nell'ipotesi di perfetta compensazione di gravità) come  $M = \{(e_q, \dot{e}_q) \in R | K_p e_q = 0\}$ , quindi, essendo  $K_p$  definita positiva,  $M$  coincide con l'origine  $e_q = 0, \dot{e}_q = 0$ , punto cui converge qualsiasi traiettoria iniziata da  $\Omega_\ell$ , il che dimostra la globale asintotica stabilità di questo equilibrio.

Il controllo PD indipendente ai giunti con compensazione di gravità garantisce quindi il raggiungimento asintotico di riferimenti  $q_d$  costanti, utili ad esempio per eseguire traiettorie punto-punto di bracci manipolatori per operazioni tipo “pick and place”. Si noti però che i controllori PD non garantiscono il raggiungimento del valore desiderato, e neppure la stabilità del sistema, se le ipotesi di cui sopra non sono verificate.

Si osservi che, nel controllo di postura con imperfetta compensazione della gravità mediante un termine  $\widehat{G}(q)$  si avrebbe un equilibrio spostato in una configurazione  $\bar{q}$  che si può calcolare risolvendo l'equazione

$$G(\bar{q}) - \widehat{G}(\bar{q}) = K_p(q_d - \bar{q}).$$

Questa equazione può non essere facile da risolvere in forma chiusa, ma è sempre possibile risolverla efficientemente in modo iterativo coi metodi di Newton-Raphson o del gradiente già incontrati nella soluzione della cinematica inversa.

Una intuizione fisica immediata del nuovo equilibrio  $\bar{q}$  si ha per  $K_p$  diagonale: ogni giunto si comporta sotto l'effetto del peso non compensato come una elasticità di costante  $K_{p,i}$  con posizione di riposo in  $q_{d,i}$ . È facile vedere, usando adesso la candidata

$$V(t) = \frac{1}{2} \dot{e}_q^T M(q) \dot{e}_q + \frac{1}{2} (\bar{q} - q)^T K_p (\bar{q} - q),$$

che questo nuovo equilibrio è esso stesso asintoticamente stabile.

### 6.6.3 Controllo PD nello spazio operativo

Una semplice modifica del controllore appena descritto permette di ottenere un simile comportamento direttamente espresso nello spazio operativo del robot, ovvero nelle variabili  $\xi = Q(q)$ . Definendo l'errore  $e_\xi = \xi_d - \xi$  ed assumendo  $\dot{\xi}_d = 0$ , la legge di controllo

$$\tau = J^T(q) K_\xi e_\xi - K_v \dot{q} + \tau_{ff}, \quad (6.31)$$

dove  $J(q) = \frac{\partial Q}{\partial q}$  è il Jacobiano analitico, rende asintoticamente stabile la postura desiderata  $\xi_d$  se  $\tau_{ff} = G(q)$ . Per dimostrarlo basta considerare la candidata di Lyapunov

$$V(e_\xi, \dot{e}_\xi) = \frac{1}{2} e_\xi^T K_\xi e_\xi + \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q}$$

e la sua derivata

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= -e_\xi^T K_\xi J \dot{q} + \dot{q}^T M(q) \ddot{q} + \frac{1}{2} \dot{q}^T \dot{M}(q) \dot{q} \\ &= -\dot{q}^T J^T K_\xi e_\xi + \dot{q}^T (\tau - C(q, \dot{q}) \dot{q} - G(q)) + \frac{1}{2} \dot{q}^T \dot{M}(q) \dot{q} \\ &= -\dot{q}^T K_v \dot{q}. \end{aligned}$$

Da qui è possibile derivare la asintotica stabilità dell'equilibrio nella posizione desiderata con argomenti analoghi a quelli usati nella sezione precedente per il controllo PD nello spazio dei giunti.

È interessante vedere esplicitamente l'effetto della applicazione di azioni esterne applicate al manipolatore. Per semplicità, ci riferiremo al caso in cui queste azioni siano unicamente forze  $F_e$ , e ci limiteremo a studiarne l'effetto sugli spostamenti traslazionali dell'end-effector (tralasciando eventuali coppie e le rotazioni indotte). In questo caso, il Jacobiano analitico e quello geometrico coincidono.

Supponendo perfettamente compensata la gravità, l'equilibrio del sistema si sposta nella soluzione di

$$J^T(\bar{q})F_e = J^T(\bar{q})K_\xi\bar{e}_\xi,$$

dove  $\bar{e}_\xi(q_d - \bar{q})$ . In configurazioni nonsingolari del braccio, quindi, si ha

$$F_e = K_\xi\bar{e}_\xi$$

quindi il manipolatore si comporta come un insieme di molle lineari che si oppongono al carico esterno con punto di riposo  $q_d$ . Se  $J^T$  ha uno spazio nullo, le forze esterne che giacciono in tali direzioni sono invece assorbite direttamente dalla struttura del robot, e non generano alcuna deformazione delle "molle" virtuali introdotte dalla componente proporzionale del controllore PD.

### 6.6.4 Controllo a Coppia Calcolata

Si desidera adesso affrontare il problema di controllare il sistema (6.27) lungo traiettorie desiderate  $q_d(t)$  di tipo più generale, come richiesto in molte applicazioni di robotica avanzata in cui il braccio non deve semplicemente posizionarsi (come nelle sezione 6.6.2), ma deve seguire percorsi prestabiliti con accuratezza geometrica e temporale.

A tale fine, è utile riconsiderare l'equazione di regime del sistema lungo un moto nominale, la cui soluzione soddisfi esattamente la specifica  $q(t) \equiv q_d(t)$ . Dal principio del modello interno, infatti, per ottenere inseguimento perfetto di una traiettoria desiderata il controllo deve contenere il modello del sistema dinamico, usato per calcolare una azione in avanti (feedforward), complementato da un'azione di feedback che ne renda stabile il moto. Una possibile scelta per il controllo che segue queste indicazioni è data da

$$\tau(q, \dot{q}, e_q, \dot{e}_q) = M(q)\ddot{q}_d + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) + K'_p e_q + K'_v \dot{e}_q, \quad (6.32)$$

dove  $K'_v$  e  $K'_p$  sono matrici positive definite. È facile verificare che, nel caso di inizializzazione sulla traiettoria esatta ( $e_q(0) = \dot{e}_q(0) = 0$ , ovvero  $q(0) = q_d(0)$  e  $\dot{q}(0) = \dot{q}_d(0)$ ), il controllo  $\tau$  vale esattamente

$$\tau(q, \dot{q}, e_q, \dot{e}_q)|_{q=q_d} = M(q_d)\ddot{q}_d + C(q_d, \dot{q}_d)\dot{q}_d + G(q_d),$$

che soddisfa il modello (6.27).

Ricordiamo qui che stiamo usando l'ipotesi di completa attuazione del sistema, che ci garantisce che, qualunque sia il valore di  $\tau$  ottenuto dalla (6.32), sarà possibile comandare agli attuatori una opportuna azione  $f$  tale per cui  $F(q)f = \tau$ . In un sistema non completamente attuato, in cui  $F(q)$  non ha pieno rango, questo non sarebbe possibile (si pensi ad esempio al caso in cui alcune forze generalizzate non sono collegate ad attuatori, per cui le corrispondenti componenti di  $\tau$  devono essere nulle).

Si noti inoltre che, per la sintesi della legge di controllo (6.32), si assume di avere a disposizione il valore misurato di  $q(t)$  e  $\dot{q}(t)$ , nonché di essere in grado di calcolare un modello esatto per la dinamica, cioè di poter valutare le funzioni  $M(\cdot)$ ,  $C(\cdot, \cdot)$  e  $G(\cdot)$  in modo che esse corrispondano ai valori fisici del sistema (di tali ipotesi discuteremo la portata più avanti).

Sostituendo la (6.32) nella (6.27), e scegliendo per comodità di porre  $K'_p = M(q)K_p$ ,  $K'_v = M(q)K_v$ , si ha

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = M(q)(\ddot{q}_d + K_v\dot{e}_q + K_p e_q) + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q)$$

da cui immediatamente

$$M(q)\ddot{q} = M(q)(\ddot{q}_d + K_v\dot{e}_q + K_p e_q) \quad (6.33)$$

$$M(q)(\ddot{e}_q + K_v\dot{e}_q + K_p e_q) = 0. \quad (6.34)$$

Per l'invertibilità della matrice dinamica  $M(q)$  si ottiene

$$\ddot{e}_q + K_v\dot{e}_q + K_p e_q = 0 \quad (6.35)$$

che rappresenta la dinamica dell'errore di inseguimento, che risulta lineare. Se le matrici  $K_p, K_v$  sono diagonali, si hanno in effetti tanti sistemi del secondo ordine quanti giunti, ognuno disaccoppiato ed indipendente. La scelta di elementi diagonali  $K_{p,i}$  e  $K_{v,i}$  positivi garantisce la asintotica stabilità dell'equilibrio  $e_q = \dot{e}_q = 0$ , e determina il comportamento dinamico dell'inseguimento secondo le classiche regole del piazzamento dei poli.

In definitiva il controllo proposto, che viene detto "a coppia calcolata" (o "computed torque"), mostra come la perfetta conoscenza del modello dinamico di un manipolatore ne consenta la linearizzazione perfetta garantendo l'allocazione arbitraria dei poli del sistema a ciclo chiuso e il completo disaccoppiamento delle dinamiche delle diverse coordinate  $q$ . È quindi garantita la possibilità di ottenere inseguimenti di traiettorie di posizione dei giunti con errore a regime nullo e tempi di convergenza arbitrariamente veloci.

### 6.6.5 Controllo a Coppia Calcolata nello Spazio Operativo

In certi casi, è desiderabile determinare direttamente la coppia di controllo  $\tau$  che garantisce l'inseguimento asintotico di una posizione cartesiana e angolare  $\xi_d$  da parte della posizione  $\xi$  dell'end-effector di un manipolatore, senza passare preliminarmente dalla inversione cinematica  $q_d(t) = Q^{-1}(\xi_d(t))$ .

Per ottenere questo, è possibile applicare il metodo a coppia calcolata direttamente nello spazio operativo: a tal fine, è necessario determinare preliminarmente l'equazione della dinamica del manipolatore nello stesso spazio.

Si consideri per semplicità il caso in cui il manipolatore in questione abbia un numero di giunti pari alla dimensione dello spazio operativo e che durante il moto non si incontrino singolarità. In tal modo, partendo dall'espressione della cinematica differenziale

$$\dot{\xi} = J(q)\dot{q}$$

e della sua derivata

$$\ddot{\xi} = J(q)\ddot{q} + \dot{J}(q)\dot{q}$$

si ha

$$\ddot{q} = J^{-1}(q) \left( \ddot{\xi} - \dot{J}(q)\dot{q} \right). \quad (6.36)$$

Sostituendo la (6.36) nella equazione dinamica del manipolatore nelle coordinate di giunto  $q$ , si ottiene

$$M(q)J^{-1}(q) \left( \ddot{\xi} - \dot{J}(q)\dot{q} \right) + h(q, \dot{q}) = \tau \quad (6.37)$$

dove  $h(q, \dot{q}) = C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q)$ . Premoltiplicando i termini della eq. (6.37) per  $J^{-T}(q)$ , si ottiene l'equazione della dinamica del manipolatore nello spazio operativo

$$J^{-T}MJ^{-1} \left( \ddot{\xi} - \dot{J}\dot{q} \right) + J^{-T}h(q, \dot{q}) = J^{-T}\tau$$

ovvero

$$M_\xi \ddot{\xi} + h_\xi = F, \quad (6.38)$$

dove  $M_\xi = (J(q)M^{-1}(q)J^T(q))^{-1}$  viene detta *matrice dinamica nello spazio operativo* del manipolatore, e  $h_\xi = J^{-T}(q)h(q, \dot{q}) - M_\xi(q)\dot{J}(q)\dot{q}$  indica i termini dovuti a forze apparenti e potenziali nelle coordinate dello spazio operativo. Utilizzando il legame tra le coppie ai giunti  $\tau$  e le equivalenti forze generalizzate  $F$  che agiscono sull'end-effector, si è posto

$$J^{-T}(q)\tau = F$$

ad indicare la forza generalizzata esterna equivalente alla azione delle coppie sui giunti. Introducendo l'errore di posizione  $e_\xi = \xi_d - \xi$ , il controllo a forza calcolata nello spazio operativo è dunque

$$F_{cf} = M_\xi \left( \ddot{\xi}_d + K_v \dot{e}_\xi + K_p e_\xi \right) + h_\xi(\xi, \dot{\xi}),$$

che sostituita nella (6.38) porta a

$$M_\xi(q) (\ddot{e}_\xi + K_v \dot{e}_\xi + K_p e_\xi) = 0,$$

da cui, essendo  $M_\xi$  definita positiva (ricordiamo l'ipotesi di assenza di singolarità), la dinamica dell'errore di inseguimento  $e_\xi$  è lineare e asintoticamente stabile se  $K_v$ ,  $K_p$  sono matrici opportunamente progettate. Ovviamente, il controllo applicato agli attuatori sui giunti è infine calcolato come

$$\tau = J^T(q) F_{cf}.$$

È interessante osservare il comportamento del sistema così controllato quando la traiettoria desiderata sia una postura  $\xi_d$  fissa o lentamente variabile, e sul braccio agisca una forza esterna  $F_{ext}$  applicata nello spazio operativo, ad esempio per interazione dell'end-effector con l'ambiente:

$$M_\xi \ddot{e}_\xi + K'_v \dot{e}_\xi + K'_p e_\xi = F_{ext},$$

con  $M_\xi$  costante,  $K'_p = M_\xi K_p$  e  $K'_v = M_\xi K_v$ . La trasformata di Laplace di questo modello,

$$e_\xi(s) = (M_\xi s^2 + K'_v s + K'_p)^{-1} F_{ext}(s),$$

illustra come il comportamento del robot così controllato, e sottoposto a disturbi esterni applicati all'end-effector, è quello di un sistema masse-molle-smorzatori, costante elastica  $K_{P,i}$  e smorzamento  $K_{v,i}$ , con posizione di riposo la postura desiderata  $\xi_d(t)$ . La scelta di opportuni valori dei parametri del controllore quindi permette di controllare l'impedenza apparente del manipolatore quando interagisce con l'ambiente attraverso il suo end-effector. Questa è la base del cosiddetto *controllo di impedenza*, che permette al braccio robotico di esibire comportamenti con maggiore o minor rigidità e smorzamento nelle interazioni fisiche.

### 6.6.6 Robustezza del Controllo a Coppia Calcolata

I risultati apparentemente molto buoni del controllo progettato nella sezione precedente sono stati ottenuti nelle ipotesi poco realistiche di disporre di un



modello perfetto del sistema da controllare. Esaminiamo adesso il caso in cui questa ipotesi non sia verificata, o perché i parametri inerziali e geometrici del sistema non sono noti, o anche semplicemente perché il calcolo accurato del modello dinamico in ogni configurazione sul processore di controllo richiede più tempo di quanto disponibile per l'applicazione in tempo reale, e vi si rinunci.

Supponiamo dunque di applicare una legge di controllo che, approssimando quella a coppia calcolata nominale (6.32), sia descritta da

$$\tau = \widehat{M}(q) (\ddot{q}_d + K_v \dot{e}_q + K_p e_q) + \widehat{C}(q, \dot{q}) \dot{q} + \widehat{G}(q) \quad (6.39)$$

dove  $\widehat{M}(q)$ ,  $\widehat{C}(q, \dot{q})$  e  $\widehat{G}(q)$  rappresentano i modelli approssimati usati per le matrici dinamica, di Coriolis e del vettore delle coppie gravitazionali del manipolatore. Sostituendo la (6.39) nella (6.27), e compiendo passaggi analoghi ai precedenti, si ottiene

$$\widehat{M}(q) (\ddot{e}_q + K_v \dot{e}_q + K_p e_q) = \widetilde{M}(q) \ddot{q} + \widetilde{C}(q, \dot{q}) \dot{q} + \widetilde{G}(q).$$

avendo introdotto le matrici di errore di modello

$$\begin{cases} \widetilde{M}(q) = M(q) - \widehat{M}(q), \\ \widetilde{C}(q, \dot{q}) = C(q, \dot{q}) - \widehat{C}(q, \dot{q}), \\ \widetilde{G}(q) = G(q) - \widehat{G}(q). \end{cases}$$

Se la matrice di inerzia stimata è invertibile si può poi scrivere

$$\ddot{e}_q + K_v \dot{e}_q + K_p e_q = \eta \quad (6.40)$$

dove si è posto

$$\eta = \widehat{M}(q)^{-1} (\widetilde{M}(q) \ddot{q} + \widetilde{C}(q, \dot{q}) \dot{q} + \widetilde{G}(q))$$

Nel sistema (6.40) la dinamica dell'errore, che è quella vista in (6.35), risulta però adesso eccitata dal termine di disturbo  $\eta$ . Considerando  $\eta$  come fosse un disturbo esterno, si potrebbe scrivere in termini di trasformate di Laplace

$$e_q(s) = (Is^2 + K_v s + K_p)^{-1} \eta(s).$$

Per una scelta opportuna dei guadagni  $K_p$  e  $K_v$  che renda il sistema (6.35) asintoticamente stabile, il sistema perturbato (6.40) è "Bounded Input Bounded Output" (BIBO) stabile, quindi per ogni  $\eta(t)$  limitato in norma, la corrispondente risposta  $e_q(t)$ , nonché la sua derivata, sono anch'esse limitate in norma<sup>9</sup> Di conseguenza, per qualche  $\beta_1 > 0$  e  $\beta_2 > 0$ , si potrà scrivere

$$\begin{aligned} \|e_q(t)\|_\infty &\leq \beta_1 \|\eta(t)\|_\infty \\ \|\dot{e}_q(t)\|_\infty &\leq \beta_2 \|\eta(t)\|_\infty \end{aligned} \quad (6.41)$$

<sup>9</sup>Ci riferiamo qui alla norma infinito di funzione  $\|f(t)\|_\infty = \sup_{0 \leq t \leq \infty} |f(t)|$ .

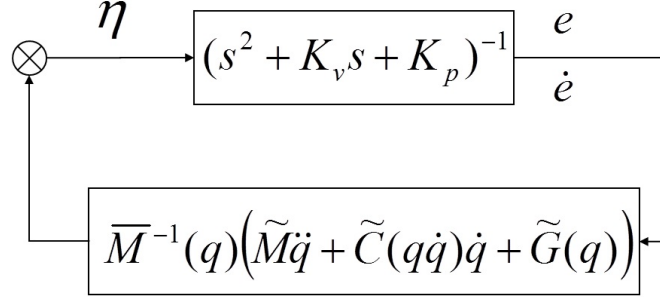


Figura 6.15: Sistema Lagrangiano controllato col metodo di coppia calcolata con modello imperfetto.

Considerando che  $q(t) = q_d(t) - e_q(t)$ , si osserva però che il termine di disturbo  $\eta(\cdot)$  è esso stesso funzione dell'errore e della sua derivata. La (6.40) può quindi essere vista come la connessione in anello di due sistemi (si veda fig. 6.15). Nulla si può dire riguardo la stabilità del sistema connesso se non si entra nel dettaglio delle particolari stime utilizzate, e degli errori conseguenti.

È utile notare che la dipendenza di  $\eta$  dalla accelerazione  $\ddot{q}$  può essere in effetti rimossa quando ci si metta nelle coordinate di errore  $(e_q, \dot{e}_q)$ . Sostituendo la (6.39) nella (6.27), e ponendo per comodità  $\bar{\tau} = (\ddot{q}_d + K_v \dot{e}_q + K_p e_q)$ , si ha

$$\begin{aligned} \ddot{q} &= M^{-1} \widehat{M} \bar{\tau} - M^{-1} (\tilde{C} \dot{q} + \tilde{G}) + \bar{\tau} - \bar{\tau} \\ &= (M^{-1} \widehat{M} - I) \bar{\tau} - M^{-1} (\tilde{C} \dot{q} + \tilde{G}) + \bar{\tau} \end{aligned}$$

e osservando dalla (6.40) che  $\eta = \ddot{e} + K_v \dot{e}_q + K_p e_q = \bar{\tau} - \ddot{q}$ , si ottiene

$$\eta(q, \dot{q}, \ddot{q}_d) = \bar{\tau} - \ddot{q} = (I - M^{-1} \widehat{M}) (\ddot{q}_d + K_v \dot{e}_q + K_p e_q) + M^{-1} (\tilde{C} \dot{q} + \tilde{G}(q)) \quad (6.42)$$

ovvero, con facili sostituzioni,  $\eta = \eta(e_q, \dot{e}_q, q_d, \dot{q}_d, \ddot{q}_d)$ . Dalla (6.42), si può osservare che, per ogni data funzione da inseguire  $q_d(t)$ , il disturbo  $\eta$  dipende da funzioni degli errori nelle diverse coordinate  $e_{q,i}$ , delle loro derivate  $\dot{e}_{q,i}$ , e da termini di tipo  $\dot{e}_{q,i} \dot{e}_{q,j}$  che combinano tali derivate. Si può dimostrare che queste funzioni sono limitabili<sup>10</sup>, e, per opportuni valori  $\alpha_i > 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, 4$ ,

<sup>10</sup>Questa proprietà discende dalla presenza di funzioni limitate nelle espressioni delle matrici dinamiche, e dal fatto che la matrice di inerzia  $M(q)$  è sempre invertibile con inversa composta da funzioni limitate

si potrà scrivere

$$\|\eta\|_\infty \leq \alpha_1 + \alpha_2 \|e_q\|_\infty + \alpha_3 \|\dot{e}_q\|_\infty + \alpha_4 \|\dot{e}_q\|_\infty^2. \quad (6.43)$$

È naturale attendersi che i coefficienti  $\alpha_i$  siano tanto più grandi quanto maggiori sono gli errori di modello, e quanto maggiori sono i riferimenti  $q_d(t)$ , le loro velocità  $\dot{q}_d(t)$  ed accelerazioni  $\ddot{q}_d(t)$ .

Combinando le due disequazioni (6.41) con la (6.43), si ottiene

$$\begin{cases} \|e_q\|_\infty \leq \beta_1 \alpha_1 + \beta_1 \alpha_2 \|e_q\|_\infty + \beta_1 \alpha_3 \|\dot{e}_q\|_\infty + \beta_1 \alpha_4 \|\dot{e}_q\|_\infty^2, \\ \|\dot{e}_q\|_\infty \leq \beta_2 \alpha_1 + \beta_2 \alpha_2 \|e_q\|_\infty + \beta_2 \alpha_3 \|\dot{e}_q\|_\infty + \beta_2 \alpha_4 \|\dot{e}_q\|_\infty^2. \end{cases} \quad (6.44)$$

A seconda dei valori numerici ottenuti per i guadagni  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$ , le (6.44) rappresentano due regioni ammissibili nel primo quadrante del piano  $(\|e_q\|_\infty, \|\dot{e}_q\|_\infty)$ . Queste due regioni, i cui bordi sono parabole a concavità opposte, possono a seconda dei casi intersecarsi o meno, come illustrato in fig.6.16. Essendo le due norme per definizione positive, solo il primo quadrante è di interesse. Si possono dare due casi qualitativamente diversi. Per errori di modello sufficientemente piccoli e/o traiettorie desiderate sufficientemente lente, le regioni ammissibili si intersecano, lasciando una regione ammissibile compatta contigua all'origine (a sinistra in fig. 6.16): in questo caso, l'applicazione della coppia calcolata con modello imperfetto dà luogo ad inseguimento approssimato con errore non nullo, ma comunque limitato. Se le condizioni sono tali da non avere intersezione tra le due parabole (vedi fig. 6.16 a destra), non può essere invece garantita una evoluzione limitata dell'errore di posizione, ed il sistema può risultare quindi instabile.

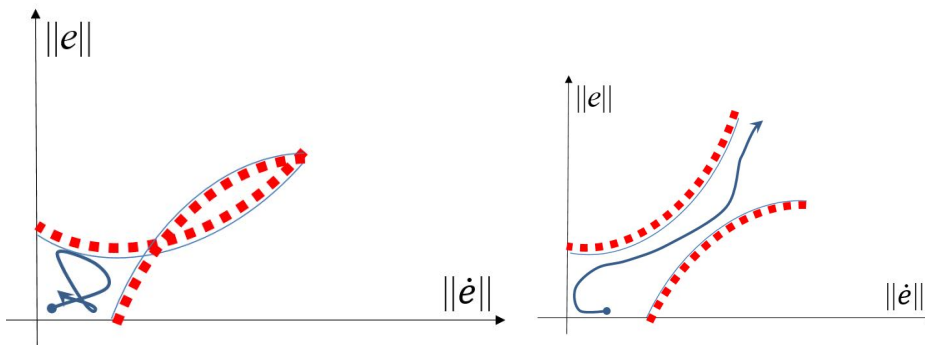


Figura 6.16: Descrizione qualitativa delle possibili evoluzioni delle norme dell'errore di inseguimento e della sua derivata  $\|e\|, \|\dot{e}\|$ .

**Esempio:** Il controllo proporzionale derivativo può essere visto come una approssimazione molto rudimentale di uno schema a coppia calcolata, in cui si ponga  $\widehat{M} = I$ ,  $\widehat{C} = 0$ , e  $\widehat{G} = G$  nel caso di perfetta compensazione di gravità. Questo controllo è robusto anche alle forti approssimazioni della dinamica purché le traiettorie desiderate siano costanti. \_\_\_\_\_  $\diamond$

### 6.6.7 Controllo a Struttura Variabile

Si consideri una semplice modifica del controllo a coppia calcolata con parametri non ideali ottenuta semplicemente aggiungendo ai termini proporzionale e derivativo un termine “correttivo”  $\Delta(t)$ , ovvero

$$\tau = \widehat{M}(q) (\ddot{q}_d + K_v \dot{e}_q + K_p e_q + \Delta(t)) + \widehat{C}(q, \dot{q}) \dot{q} + \widehat{G}(q). \quad (6.45)$$

Sostituendo la (6.45) nella (6.27) si ottiene

$$\ddot{e}_q + K_v \dot{e}_q + K_p e_q = \eta(t) - \Delta(t) \quad (6.46)$$

Si supponga adesso di saper valutare, per una certa traiettoria di riferimento  $q_d(t)$ , per certi scostamenti iniziali  $e_q(0)$ ,  $\dot{e}_q(0)$  e per certi errori massimi nei parametri stimati (ovvero per tutto un insieme di tali condizioni), una maggiorazione in norma della perturbazione  $\eta(t)$ , ovvero una funzione scalare

$$\rho(t) \geq \|\eta(e_q(t), q_d(t))\|, \quad \forall t.$$

La norma qui usata è la norma due del vettore  $\eta(t)$ , ovvero  $\|\eta(t)\| = \sqrt{\eta(t)^T \eta(t)}$ , al variare di  $t$ . Naturalmente, è da aspettarsi che questa maggiorazione sia tanto più elevata quanto più grandi sono gli errori relativi di modello  $M(q)^{-1} \widetilde{M}(q)$ ,  $M(q)^{-1} \widetilde{C}(q, \dot{q})$  e  $M(q)^{-1} \widetilde{G}(q)$ . Inoltre, essa sarà tanto maggiore quanto più i riferimenti  $q_d(t)$  sono veloci ed accelerati. Infine, la maggiorazione dovrà essere tanto più alta quanto più grande può divenire l'errore  $e_q(t)$ , il che dipende dall'errore iniziale, ma anche dal termine stesso  $\eta(t) - \Delta(t)$  che ne eccita la dinamica (6.46). Si osservi che la scelta di  $\Delta(t)$  è ancora da farsi: si può supporre peraltro che valga

$$\|\eta(t)\| \leq \gamma \|\Delta(t)\| + \delta, \quad (6.47)$$

per qualche valore  $\gamma > 0$ ,  $\delta > 0$ . La scelta di modelli sufficientemente accurati e riferimenti sufficientemente lenti dà luogo a valori di  $\gamma$  e  $\delta$  piccoli

a piacimento. Si consideri adesso lo stato  $x = (e_q, \dot{e}_q)^T$  in dimensione  $2n$  del sistema (6.46), e la corrispondente equazione di stato

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -K_p & -K_v \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix} (\eta(t) - \Delta(t)),$$

che riscriviamo in forma compatta introducendo le matrici  $A_d$  e  $B_d$

$$\dot{x} = A_d x + B_d (\eta(t) - \Delta(t)). \quad (6.48)$$

Se la scelta fatta per i guadagni proporzionali e derivativi è stabilizzante (come ovvio), il sistema non eccitato  $\dot{x} = A_d x$ , è asintoticamente stabile. Data quindi una qualsiasi matrice  $Q \in R^{2n \times 2n}$  simmetrica e positiva definita, la soluzione  $P \in R^{2n \times 2n}$  dell'equazione di Lyapunov

$$A_d^T P + P A_d = -Q$$

è simmetrica e positiva definita, e la funzione  $V(t) = x^T P x$  è di Lyapunov per il sistema libero, avendosi per quel sistema  $\dot{V} = -x^T Q x < 0$ . Considerando adesso la stessa funzione  $V(x)$  come candidata per il sistema perturbato (6.48), si ottiene

$$\dot{V}(t) = -x^T Q x + 2x^T P B_d (\eta(t) - \Delta(t)), \quad (6.49)$$

In questa funzione, il termine  $2x^T P B_d (\eta(t) - \Delta(t))$  può avere segno qualsiasi, e non è più quindi garantita essere negativa definita. Applicando una tecnica di progetto "alla Lyapunov", si può applicare un  $\Delta(t)$  tale per cui si possa ottenere  $\dot{V}(t) < 0$ . Per far ciò, definito il termine  $w(t) = B_d^T P x(t)$ , si consideri il prodotto scalare  $w(t)^T (\eta(t) - \Delta(t))$ . Il caso peggiore si ha quando  $\eta(t)$  è allineato a  $w(t)$ , quando si ha  $w(t)^T \eta(t) = \|w(t)\| \|\eta(t)\|$  massimamente positivo. Per dominare questo effetto e rendere  $w^T (\eta - \Delta)$  negativo, si può scegliere di porre

$$\Delta(t) = \begin{cases} \rho(t) \frac{w(t)}{\|w(t)\|}, & \text{se } \|w(t)\| \neq 0, \\ 0, & \text{se } \|w(t)\| = 0, \end{cases} \quad (6.50)$$

che implica  $\|\Delta(t)\| = \rho(t)$  per  $\|w(t)\| \neq 0$ . Dalla (6.50), e per la maggiorazione  $\rho(t) \geq \|\eta(t)\|$ , si ha quindi

$$\begin{cases} w(t)^T (\eta(t) - \Delta(t)) \leq -\|w(t)\| (\rho(t) - \|\eta(t)\|) < 0, & \|w(t)\| \neq 0 \\ w(t)^T (\eta(t) - \Delta(t)) = 0, & \|w(t)\| = 0 \end{cases} \quad (6.51)$$

Da notare che per la funzione maggiorante, a causa della (6.47), deve valere

$$\rho(t) \geq \gamma \|\Delta\| + \delta = \gamma \rho(t) + \delta$$

che può essere verificata da

$$\rho(t) \geq \frac{\delta}{1 - \gamma} > 0.$$

Perché la soluzione abbia senso deve essere  $\rho > 0$ , quindi è necessario che sia  $\gamma < 1$ , che può essere garantito da traiettorie sufficientemente lente e/o da modelli sufficientemente accurati.

Si noti che la legge di controllo  $\Delta(t)$  trovata in (6.51) è di tipo discontinuo. Nel caso particolare di una sola coordinata, cioè con  $\Delta \in R^1$ ,  $\Delta = \rho \frac{w}{\|w\|}$  è la funzione segno  $\text{sign}(w) = \frac{w}{|w|} = \pm 1$ . Il controllo corrispondente è detto *tutto-niente*, o *bang-bang*, o ancora *a relay*). Nel caso generale, invece, la funzione di controllo trovata è proporzionale alla derivata di un cono  $C = \sqrt{w(t)^T w(t)} \in R^n$ , che è discontinua nel vertice del cono stesso.

Come conseguenza della natura discontinua del termine additivo  $\Delta$ , possono insorgere fenomeni di *chattering* (ovvero oscillazioni sostenute ad alta frequenza del valore del controllo) nelle vicinanze della singolarità  $w(t) = 0$ , con conseguente innesco di vibrazioni, eccessiva usura degli attuatori etc. Per evitare il *chattering*, si può introdurre una correzione del tipo

$$\Delta = \rho(t) \frac{w(t)}{\sqrt{w(t)^T w(t) + \epsilon}}, \quad (6.52)$$

con  $\epsilon > 0$  valore piccolo scelto empiricamente. In questo modo, si sostituisce alla discontinuità una zona di transizione (detta *boundary layer*) in cui la funzione di controllo è analitica. Questo rilassamento implica un comportamento più liscio del sistema, anche se la convergenza alla traiettoria desiderata non può più essere garantita, ed è sostituita da una garanzia di *Uniform Ultimate Boundedness*, *UUB*, ovvero limitatezza del valore di errore a regime.

### 6.6.8 Controllo in Backstepping

Il controllo a coppia calcolata (6.32) permette di inseguire una traiettoria nello spazio dei giunti  $q_d(t)$ , che può essere ottenuta a partire da una traiettoria desiderata nello spazio operativo  $\xi_d(t)$  attraverso un metodo di inversione cinematica come discusso in precedenza. I due sistemi sono collegati in serie e restano separati, così che gli errori del primo possono sommarsi a quelli del secondo.

Consideriamo adesso uno schema di controllo che parte dai metodi visti per la soluzione cinematica e li sfrutta per chiudere un anello globale intorno al sistema.

Se  $e_\xi = \xi_d - \xi$  è l'errore di inseguimento della traiettoria desiderata, il sistema complessivo può essere descritto dalle due equazioni

$$\dot{e}_\xi = \dot{\xi}_d - J(q)\dot{q} \quad (6.53)$$

$$\ddot{q} = M^{-1}(q)(\tau - C(q, \dot{q})\dot{q} - G(q)). \quad (6.54)$$

Si può osservare che queste equazioni appaiono in una forma particolare, dove la prima equazione rappresenta un modello puramente cinematico di robot, e il secondo contiene tutte le dinamiche. Seguiremo qui un approccio che tende a dividere il problema del controllo in due fasi: prima controlla l'equazione cinematica usando le velocità come input nominali, quindi escogita un controllore che fa tracciare le velocità reali ingressi nominali. Questo approccio è noto come controllo "backstepping".

Per il controllo della parte cinematica usiamo uno dei metodi visti in precedenza. Supponiamo di poter utilizzare il metodo di Newton-Raphson e scegliamo per le velocità la legge di riferimento (che indicheremo con  $\dot{q}_r$ )

$$\dot{q}_r = J^+(\dot{\xi}_d + \Lambda e_\xi) \quad (6.55)$$

con  $\Lambda$  una matrice di guadagni simmetrica e positiva definita. Come si ricorderà, questa legge fa sì che per la funzione  $V(e) = \frac{1}{2}e_\xi^T e_\xi$  si abbia  $\dot{V} = -e_\xi^T \Lambda e_\xi$ .

Considereremo  $\dot{q}_r$  come la velocità di riferimento cui la vera velocità del sistema,  $\dot{q}$ , deve essere fatta convergere dal vero ingresso al sistema, che sono le coppie  $\tau$ .

Introduciamo per convenienza una nuova variabile

$$s = \dot{q}_r - \dot{q}$$

Nelle coordinate  $(e_\xi, s)$ , poniamo una candidata di Lyapunov

$$W(e_\xi, s, t) = V(e_\xi) + \frac{1}{2}s^T M(q)s,$$

che è costituita dalla somma della funzione di Lyapunov del controllo cinematico, sommata ad un termine quadratico nell'errore di velocità rispetto al riferimento.

Calcolando la derivata di questa candidata si ha

$$\begin{aligned} \dot{W} &= e_\xi^T \dot{e}_\xi + s^T M \dot{s} + \frac{1}{2}s^T \dot{M}s \\ &= e_\xi^T \dot{e}_\xi + s^T (M\ddot{q}_r - M\ddot{q}) + \frac{1}{2}s^T \dot{M}s \\ &= e_\xi^T \dot{e}_\xi + s^T (M\ddot{q}_r + C\dot{q} + G - \tau) + \frac{1}{2}s^T \dot{M}s. \end{aligned}$$

Sommando e sottraendo a destra il termine  $s^T C s$ , che può essere riscritto sia come  $\frac{1}{2} s^T (2C) s$  che come  $s^T (C\dot{q}_r - C\dot{q})$ , abbiamo

$$\dot{W} = e_\xi^T \dot{e}_\xi + s^T (M\ddot{q}_r + C\dot{q}_r + G - \tau) + \frac{1}{2} s^T (\dot{M} - 2C) s.$$

Assumendo che la matrice  $C(q, \dot{q})$  sia scritta nella forma di Christoffel, sappiamo che la matrice  $\dot{M} - 2C$  è antisimmetrica, quindi l'ultimo termine a destra è nullo per qualsiasi  $s$ . Scegliamo quindi

$$\tau = M\ddot{q}_r + C\dot{q}_r + G + K_d s + \bar{\tau} \quad (6.56)$$

in modo che

$$\dot{W} = e_\xi^T \dot{e}_\xi - s^T K_d s - s^T \bar{\tau}.$$

Scrivendo

$$s = \dot{q}_r - \dot{q} = J^+ (\dot{\xi}_d + \Lambda e_\xi) - J^+ \dot{\xi} = J^+ (\dot{e}_\xi + \Lambda e_\xi),$$

si ha

$$\dot{W} = e_\xi^T \dot{e}_\xi - s^T K_d s - (\dot{e}_\xi + \Lambda e_\xi)^T J^{+T} \bar{\tau}.$$

Infine, scegliendo  $\bar{\tau} = J^T e_\xi$ , si ha

$$\dot{W} = -s^T K_d s - e_\xi^T \Lambda e_\xi.$$

Possiamo quindi applicare il teorema di Lyapunov. Il sistema dinamico (6.53), (6.54), nelle nuove coordinate  $(e_\xi, s)$ , è tempo variante per l'effetto di  $\xi_d(t)$  su  $q = Q^{-1}(\xi_d(t) - e_\xi)$ . Altrettanto vale per la candidata di Lyapunov in cui appare  $M(q)$ .

Possiamo peraltro verificare facilmente che, per motivi fisici, la norma della matrice di inerzia è limitata ( $\max_q \|M(q)\| \leq \beta_M$ ), e altrettanto vale per la sua inversa ( $\max_q \|M(q)^{-1}\| \leq 1/\beta_m$ ). Per la norma 2,  $\beta_M$  e  $\beta_m$  sono una limitazione superiore e inferiore, rispettivamente, del massimo e minimo valore singolare di  $M(q)$ . Si può scrivere quindi

$$\frac{1}{2} \|e_\xi\|^2 + \frac{1}{2} \beta_m^2 \|s\|^2 \leq W(e, s, t) \leq \frac{1}{2} \|e_\xi\|^2 + \frac{1}{2} \beta_M^2 \|s\|^2, \quad \forall t, \forall e, s$$

dove le due funzioni che delimitano la  $W(e_\xi, s, t)$  sono di classe  $\mathcal{K}_\infty$ .<sup>11</sup> Dalla (6.6.8) si ha poi che  $\dot{W}$  è tempo-invariante e globalmente negativa definita nelle coordinate  $(e_\xi, s)$ .

In conclusione, dal teorema di Lyapunov per sistemi tempo-varianti si ha che la legge di controllo in backstepping

$$\tau = M\ddot{q}_r + C\dot{q}_r + G(q) + K_d s + J^T e_\xi \quad (6.57)$$

rende l'origine  $(e_\xi, s) = 0$  asintoticamente stabile, e quindi che  $\xi$  converge a  $\xi_d(t)$ .

<sup>11</sup>una funzione  $\alpha : [0, \infty) \mapsto \mathbb{R}$  si dice di classe  $\mathcal{K}_\infty$  se è strettamente crescente, se  $\alpha(0) = 0$  e  $\lim_{r \rightarrow \infty} \alpha(r) = \infty$ .



### 6.6.9 Confronto tra le tecniche di controllo ai giunti.

Mentre il controllo PD e quello a struttura variabile hanno differenze ovvie, la differenza tra i metodi CT e BS vale la pena di essere discussa brevemente.

Per l'inseguimento di un riferimento di traiettoria dato all'end-effector, il metodo CT usa le uscite del metodo di inversione cinematica prescelto come riferimento per il controllo della dinamica. Il metodo BS permette invece di inglobare la soluzione di cinematica inversa e dinamica nello stesso anello di controllo globale.

Anche se la loro derivazione è molto diversa (il che sarà importante in vista di successive modifiche per adattare queste tecniche al caso di modelli incerti) i due metodi hanno comunque alcune similarità. Scrivendo la legge di controllo BS a livello di giunti (cioè considerando  $e_q = (q_d - q)$  al posto di  $e_\xi$  e ponendo quindi  $J = I$ ), ed esprimendo tutto in  $(e_q, \dot{e}_q)$  usando le  $\dot{q}_r = \dot{q}_d + \Lambda e_q$  e  $\dot{q}_d = \dot{e}_q + \dot{q}$ , si ha

$$\begin{aligned}\tau_{BS,q} &= M\ddot{q}_r + C\dot{q}_r + G(q) + K_d s + e_q \\ &= M\ddot{q}_d + M\Lambda\dot{e}_q + C\dot{q} + C\dot{e}_q + C\Lambda e_q + G + K_d\dot{e}_q + K_d\Lambda e_q + e_q \\ &= M\ddot{q}_d + C\dot{q} + G + (M\Lambda + K_d + C)\dot{e}_q + ((C + K_d)\Lambda + I)e_q.\end{aligned}$$

Confrontando questa con la legge CT,

$$\tau_{CT} = M\ddot{q}_d + C\dot{q} + G + MK_v\dot{e}_q + MK_p e_q,$$

si osserva che, affinché le leggi di controllo coincidessero, si dovrebbe avere

$$\begin{aligned}K_v &= \Lambda + M^{-1}(K_d + C) \\ K_p &= M^{-1}((K_d + C)\Lambda + I).\end{aligned}$$

Quindi, un controllore Computed Torque che coincidesse con il controllore BackStepping ai giunti dovrebbe avere matrici di guadagno funzioni dello stato.

### 6.6.10 Constrained Systems with Complete Actuation - Vehicles

#### 6.6.11 Modeling

Consider a system described by  $n$  Lagrangian coordinates  $q$ , with kinetic energy  $T(q) = \frac{1}{2}\dot{q}^T M(q)\dot{q}$  and gravitational potential energy  $U(q)$ ,  $\frac{\partial U}{\partial q} = G(q)$  as in (6.27), now subject to  $m$  independent kinematic constraints in the form

$A(q)\dot{q} = 0$ . From the theory of Lagrangian systems, the dynamics can be written as

$$\tau = M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) + A^T(q)\lambda \quad (6.58)$$

with  $\tau$  generalized forces and  $\lambda$  a vector of Lagrange multipliers.

Adjoining this equation with the derivative of the constraint equations  $A(q)\dot{q} + \dot{A}(q)\dot{q} = 0$ , and rearranging in matrix form, one obtains

$$\begin{bmatrix} M(q) & A(q)^T \\ A(q) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -h(q, \dot{q}) + \tau \\ -\dot{A}(q)\dot{q} \end{bmatrix}$$

The matrix in the left-hand term is invertible if the constraints (the rows of  $A(q)$ ) are independent, hence both the accelerations  $\ddot{q}$  and the Lagrange multipliers  $\lambda$  can be calculated at any instant knowing the state of the system  $(q, \dot{q})$  and generalized torques  $\tau$ . The Lagrange multipliers have the physical meaning of the reaction forces that are developed to prevent violations of the constraints

When the explicit calculation of the vincular reactions is not needed, the dynamics of constrained Lagrangian systems can also be derived in a more compact form using the method of quasi-velocities. Letting  $S(q) \in \mathbb{R}^{n \times n-m}$  denote a basis for the kernel of  $A(q)$ , the kinematic system is described by

$$\dot{q} = S(q)\nu, \quad (6.59)$$

where  $\nu \in \mathbb{R}^{n-m}$  is the quasi-velocity vector corresponding to the  $n - m$  residual degrees-of-freedom of the system. By derivation we get

$$\ddot{q} = S(q)\dot{\nu} + \dot{S}(q)\nu, \quad (6.60)$$

with  $\dot{S}_{i,j}(q) = \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^{n-m} \frac{\partial S_{i,j}(q)}{\partial q_k} S_{k,\ell}(q)\nu_\ell$ . Substituting (6.59) and (6.60) in the dynamics, and premultiplying the equation by  $S^T(q)$ , we have

$$S^T M S \dot{\nu} + S^T (C S + M \dot{S}) \nu + S^T G = S^T \tau$$

where the fact that  $S^T A^T = 0$  is used.

The vector  $\tau_c = S^T \tau$  collects the  $n - m$  components of the projection of generalized forces on the constraint. The system is said to be **completely actuated** if the actuator forces  $f$  effectively acting on the system are biunivocally related to such projections, i.e. if there exists an invertible map  $F(q)$  such that  $\tau_c = F(q)f$ .

For notational convenience, let  $M_c(q) \stackrel{def}{=} S^T M S$ ,  $C_c(q, \nu) \stackrel{def}{=} S^T (C S + M \dot{S})$ , and  $G_c(q) = S^T G$ . The overall constrained system can then be written in the form

$$\begin{aligned} \dot{q} &= S\nu \\ \dot{\nu} &= -M_c^{-1}(C_c\nu + G_c) + M_c^{-1}\tau_c. \end{aligned} \quad (6.61)$$

### 6.6.12 Backstepping Control - General Case

Although application of a computed torque method to the constrained dynamics (6.61) would be straightforward, the lack of integration between the reference generation step (via a kinematic controller) and the dynamic control has even more severe implications on overall convergence to zero error in the case of constrained systems than those discussed before. It will be hence important to consider an integrated controller design, such as offered by the backstepping method. On the other hand, the straightforward application of the backstepping method as seen in the case of unconstrained systems is not directly applicable, and it is useful to consider a more general approach.

Consider a system whose state  $x$  can be partitioned so that the dynamics can be written as

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f(x_1) + g(x_1)x_2 \\ \dot{x}_2 &= h(x_1, x_2) + \ell(x_1, x_2)u\end{aligned}\quad (6.62)$$

with  $x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$ ,  $x_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$ ,  $u \in \mathbb{R}^{n_2}$ . Assume the origin is an equilibrium, and that  $\ell(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$  is invertible for all  $x_1, x_2$ .

The backstepping method assumes that a controller design exists for the “higher level” system

$$\dot{x}_1 = f(x_1) + g(x_1)u' \quad (6.63)$$

in the form of a stabilizing feedback law  $u' = \Gamma(x_1)$ , and that a Lyapunov function  $V(x_1)$  is available such that (omitting the argument of functions, and letting  $V_{x_1} = \frac{\partial V}{\partial x_1}$ )

$$\dot{V}(x_1) = V_{x_1} (f + g\Gamma)$$

is negative semi-definite (or negative definite).

In the backstepping method, the control for (6.62) is computed so that the state  $x_2$  tends to track the value of  $u' = \Gamma(x_1)$ . This can be obtained using the control Lyapunov function

$$W(x) = V + \frac{1}{2} (\Gamma - x_2)^T P(x) (\Gamma - x_2),$$

where  $P(x) \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$  is a positive definite “design” matrix (i.e. a matrix whose choice is at the controller designer’s disposal). Letting  $v = h(x_1, x_2) + \ell(x_1, x_2)u$  and  $\dot{\Gamma}(x_1) = \Gamma_{x_1} (f + g x_2)$ , we compute

$$\begin{aligned}\dot{W}(x) &= V_{x_1} (f + g x_2) + (\Gamma - x_2)^T P (\dot{\Gamma} - v) + \\ &\quad + \frac{1}{2} (\Gamma - x_2)^T \dot{P} (\Gamma - x_2).\end{aligned}$$

Let us then choose

$$v = \dot{\Gamma} + P^{-1} \left( \frac{1}{2} \dot{P} (\Gamma - x_2) + K (\Gamma - x_2) \right) + \bar{v}$$

(with  $K$  a positive definite design matrix) so that we get

$$\dot{W} = V_{x_1} (f + g x_2) - (\Gamma - x_2)^T P \bar{v} - (\Gamma - x_2)^T K (\Gamma - x_2).$$

Summing and subtracting a term  $V_{x_1} g \Gamma$  on the right we have

$$\dot{W} = V_{x_1} (f + g \Gamma) - V_{x_1} g (\Gamma - x_2) - (\Gamma - x_2)^T P \bar{v} - (\Gamma - x_2)^T K (\Gamma - x_2),$$

so that, by setting  $\bar{v} = -P^{-1} g^T V_{x_1}^T$ , we have

$$\dot{W} = \dot{V} - (\Gamma - x_2)^T K (\Gamma - x_2),$$

which is negative semi-definite (or definite, if so is  $\dot{V}(x_1)$ ) in the origin. We have thus shown that the overall control law

$$u = \ell(x)^{-1} (v(x) - h(x)), \quad (6.64)$$

with

$$v = \dot{\Gamma} + P^{-1} \left( \frac{1}{2} \dot{P} (\Gamma - x_2) + K (\Gamma - x_2) - g^T V_{x_1}^T \right)$$

stabilizes (asymptotically) the origin of system (6.62).

A few remarks are in order.

- The control of an uncostrained lagrangian system (e.g. a robot arm)

$$\dot{e}_q = \dot{q}_d - \dot{q} \quad (6.65)$$

$$\ddot{q} = -M^{-1}(q) (C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q)) + M(q)^{-1}\tau, \quad (6.66)$$

with  $e_q = q_d - q$  the joint space error, can be regarded as an instance of the general backstepping method, by setting  $x_1 = e_q$ ,  $f(x_1) = \dot{q}_d$ ,  $g(x_1) = -I$ ,  $x_2 = \dot{q}$ ,  $h(x) = -M^{-1}(q) (C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q))$ ,  $\ell(x) = M^{-1}(q)$ ,  $u = \tau$ ,  $\Gamma(x_1) = \dot{q}_d + \Lambda e_q = \dot{q}_r$ . If we choose  $P = M(q)$ , we obtain exactly the controller already found in (6.57).

- A state-dependent  $P$  is not strictly required for the application of the general backstepping. In the previous example of a robot arm, with similar notation but choosing a constant  $P$ , we get (omitting arguments of functions)

$$u = M (v + M^{-1} (C\dot{q} + G)) \quad (6.67)$$

$$v = \ddot{q}_d + \Lambda \dot{e}_q + P^{-1} (K \dot{e}_q + K \Lambda e_q + K_e e_q) \quad (6.68)$$

Hence, we have

$$\tau = u = M (\ddot{q}_d + (\Lambda + P^{-1}K)\dot{e}_q + P^{-1}(K\Lambda + K_e)e_q) + C\dot{q} + G. \quad (6.69)$$

### 6.6.13 Backstepping Control of Constrained Lagrangian Systems

The general form of the backstepping technique can be directly applied to synthesize a controller for the constrained system described by equation (6.61).

If a law  $\nu = \Gamma(q)$  is designed for the kinematic level, such that  $\dot{q} = S(q)\Gamma(q)$  is stabilized, and a Lyapunov function  $V(q)$  is available with  $\dot{V}(q) = V_q S \Gamma$  negative semi-definite, then

$$W(q, \nu) = V(q) + \frac{1}{2}(\nu - \Gamma)^T P (\nu - \Gamma)$$

is a Lyapunov control function for the overall system (6.61).

The usual backstepping control derivations indeed yield

$$\tau_c(q, \nu) = C_c \nu + G_c + M_c \left( \dot{\Gamma} - \frac{1}{2} P^{-1} \dot{P} (\nu - \Gamma) - P^{-1} K (\nu - \Gamma) - P^{-1} S^T V_q^T \right) \quad (6.70)$$

for which

$$\dot{W} = \dot{V} - (\nu - \Gamma)^T K (\nu - \Gamma),$$

which is in turn negative semi-definite (actually negative definite if such was  $\dot{V}$ ).

### 6.6.14 Modello e controllo dinamico di un uniciclo

#### Modello dinamico di un uniciclo

Sia  $m$  la massa del veicolo e  $I_z$  il momento di inerzia rispetto all'asse perpendicolare al piano di moto. Facendo riferimento alla notazione usata in precedenza (fig. 6.5), le coordinate generalizzate sul piano sono  $q = [x, y, \theta]^T$ . Supponendo che il moto si svolga su un piano orizzontale, l'energia potenziale del sistema è costante. L'energia cinetica è data da  $T = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q}$ , dove

$$M = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & J \end{bmatrix}.$$

La matrice della forma Pfaffiana  $A(q)$  e la sua derivata per il vincolo cinematico (6.15) sono date da

$$A(q) = \begin{bmatrix} \sin \theta & -\cos \theta & 0 \end{bmatrix}; \quad \dot{A}(q) = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \cos \theta & \dot{\theta} \sin \theta \end{bmatrix}.$$

Con semplici calcoli si trova che i termini delle forze apparenti e gravitazionali sono nulli. L'espressione della dinamica di un veicolo con vincolo di unicycle è quindi

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 & \sin \theta \\ 0 & m & 0 & -\cos \theta \\ 0 & 0 & I_z & 0 \\ \sin \theta & -\cos \theta & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{\theta} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_x \\ \tau_y \\ \tau_\theta \\ -\dot{x}\dot{\theta} \cos \theta - \dot{y}\dot{\theta} \sin \theta \end{bmatrix}. \quad (6.71)$$

Risolvendo questa equazione mediante inversione della matrice a primo termine si ottiene

$$\begin{cases} \ddot{x} = \frac{\cos \theta}{m} (\tau_x \cos \theta + \tau_y \sin \theta) - \dot{\theta} \sin \theta (\dot{x} \cos \theta + \dot{y} \sin \theta) \\ \ddot{y} = \frac{\sin \theta}{m} (\tau_x \cos \theta + \tau_y \sin \theta) + \dot{\theta} \cos \theta (\dot{x} \cos \theta + \dot{y} \sin \theta) \\ \ddot{\theta} = \frac{\tau_\theta}{I_z} \\ \lambda = \tau_x \sin \theta - \tau_y \cos \theta + m \dot{\theta} (\dot{x} \cos \theta + \dot{y} \sin \theta) \end{cases}. \quad (6.72)$$

Si osserva qui che il termine  $(\tau_x \cos \theta + \tau_y \sin \theta) \stackrel{def}{=} \tau_v$  corrisponde alla somma delle proiezioni delle forze generalizzate  $\tau_x$  e  $\tau_y$  lungo la direzione longitudinale del veicolo.

Scegliendo invece di descrivere il sistema vincolato usando il metodo delle quasi velocità, la base  $S(q)$  dello spazio nullo di  $A(q)$  e la sua derivata sono

$$S(q) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 \\ \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \dot{S}(q) = \begin{bmatrix} -\dot{\theta} \sin \theta & 0 \\ \dot{\theta} \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Proiettando la dinamica del sistema lungo il vincolo, si ha

$$S(q)^T M(q) S(q)^T \dot{\nu} + S(q)^T M(q) \dot{S}(q) \dot{\nu} = S(q)^T \tau.$$

Si ottiene facilmente

$$\begin{aligned} M_c(q) &= S(q)^T M(q) S(q) = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & I_z \end{bmatrix} \\ h_c(q, \dot{q}, \nu) &= S(q)^T M(q) \dot{S}(q) \dot{\nu} = 0 \\ \tau_c &= S(q)^T \tau = \begin{bmatrix} \tau_x \cos \theta + \tau_y \sin \theta \\ \tau_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_v \\ \tau_\theta \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.73)$$

e quindi

$$\begin{aligned}\dot{v}_1 &= \frac{1}{m}(\tau_x \cos \theta + \tau_y \sin \theta) = \frac{1}{m}\tau_v \\ \dot{v}_2 &= \frac{\tau_\theta}{I_z}.\end{aligned}\quad (6.74)$$

In definitiva il modello dinamico complessivo dell'uniciclo è dato da

$$\begin{cases} \dot{x} = v \cos \theta \\ \dot{y} = v \sin \theta \\ \dot{\theta} = \omega \\ \dot{v} = \frac{1}{m}\tau_v \\ \dot{\omega} = \frac{1}{I_z}\tau_\theta.\end{cases}\quad (6.75)$$

### Inseguimento di traccia con un uniciclo

Si consideri nuovamente il problema di stabilizzare un veicolo di tipo uniciclo su di un percorso assegnato, considerandolo adesso come sistema dinamico (6.75). Nella sezione 6.5.2 è stata determinata una legge di controllo che stabilizzava il modello cinematico del veicolo sull'asse delle ascisse  $y = 0$ , che richiamiamo qui per comodità. Considerando il modello cinematico dell'uniciclo (??) con velocità di avanzamento  $v = \hat{v}(t)$  dell'uniciclo assegnata, la legge è stata ottenuta usando (nello spazio di stato ridotto  $(y, \theta)$ ) la candidata di Lyapunov

$$V(q) = \frac{1}{2}(y^2 + \theta^2) \quad (6.76)$$

e la sua derivata

$$\dot{V}(q) = y\hat{v}(t) \sin \theta + \theta u', \quad (6.77)$$

quindi ponendo

$$u' = \Gamma_\omega(\theta, y) = -\hat{v}(t)y \frac{\sin \theta}{\theta} - K_\theta \theta \quad (6.78)$$

per la quale si aveva

$$\dot{V}(q) = -K_\theta \theta^2 \quad (6.79)$$

che risulta s.n.d.. Attraverso il teorema di Lasalle si poteva dimostrare la asintotica stabilità del moto desiderato.

Per la stabilizzazione del modello dinamico con backstepping, si definisce unaa candidata di Lyapunov estesa allo spazio di stato  $(y, \theta, \omega)$  come

$$W(q, \omega) = V(q) + \frac{1}{2}(\omega - \Gamma_\omega)^2, \quad (6.80)$$

dove  $\Gamma_\omega$  rappresenta la legge di stabilizzazione nel caso cinematico (riportata in (6.78)).

Derivando rispetto al tempo si ottiene

$$\dot{W}(q, \omega) = y\hat{v}(t) \sin \theta + \theta\omega + (\omega - \Gamma_\omega) \left( \frac{\tau_\theta}{I_z} - \dot{\Gamma}_\omega \right). \quad (6.81)$$

Sommando e sottraendo a destra  $\theta\Gamma_\omega$ , possiamo riscrivere

$$\dot{W}(q, \omega) = \dot{V}(q) + \theta(\omega - \Gamma_\omega) + (\omega - \Gamma_\omega) \left( \frac{\tau_\theta}{I_z} - \dot{\Gamma}_\omega \right). \quad (6.82)$$

Scegliamo quindi

$$\tau_\theta = I_z(\dot{\Gamma}_\omega - K_b(\omega - \Gamma_\omega) - \theta) \quad (6.83)$$

con  $K_b > 0$  costante di backstepping, in modo da ottenere

$$\dot{W}(q, \omega) = -K_\theta\theta^2 - K_b(\omega - \Gamma_\omega)^2,$$

ovvero la (6.79) con l'aggiunta del termine di backstepping che risulta n.d..

A illustrazione di questo risultato, si riporta in fig. 6.17 l'andamento del veicolo con controllo cinematico direttamente su  $\omega$  e quello con controllo dinamico su  $\tau_\theta$  ottenuto con il metodo di backstepping. Per completezza, si riporta anche il risultato ottenuto facendo inseguire la velocità di riferimento  $\omega_r$  da parte di un controllore dinamico a coppia calcolata, che in questo caso è semplicemente dato da

$$\tau_\theta = I_z (\dot{\omega}_r + K_v(\omega_r - \omega) + K_p(\theta_r - \theta)),$$

dove  $\theta_r(t)$  è ottenuta direttamente da  $\omega_r$  per integrazione a partire dal valore iniziale di  $\theta(0)$ . Come si osserva, la mancata chiusura di un anello globale attorno alla variabile  $y$  impedisce la convergenza di questo secondo schema al valore desiderato, mentre il backstepping insegue correttamente la traccia desiderata.

### Inseguimento del moto di un punto con unicyclo

Si consideri il problema dell'inseguimento di una traiettoria di riferimento nel caso di unicyclo. Le variabili di stato da stabilizzare sono in questo caso gli errori di tracking tra i due veicoli, con cinematica:

$$\dot{e} = \begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v + e_2\omega - \hat{v} \cos e_3 \\ -e_1\omega + \hat{v} \sin e_3 \\ \omega - \hat{\omega} \end{bmatrix}. \quad (6.84)$$



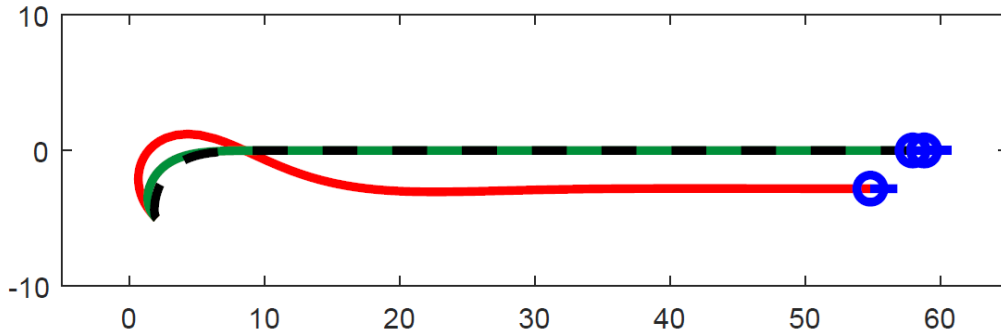


Figura 6.17: Inseguimento di traccia con uniciclo cinematico (in tratteggio), con backstepping della dinamica (in verde) e con controllo a coppia calcolata (in rosso).

La candidata di Lyapunov e la relativa derivata direzionale per il modello cinematico sono:

$$\begin{cases} V(e) = \frac{1}{2}(e_1^2 + e_2^2) + K(1 - \cos e_3) \\ \dot{V}(e) = e_1(v + e_2\omega - \hat{v} \cos e_3) + e_2(-e_1\omega + \hat{v} \sin e_3) + K \sin e_3(\omega - \hat{\omega}). \end{cases} \quad (6.85)$$

Ricordiamo che, sostituendo i controlli

$$\begin{cases} v = \Gamma_v = \hat{v} \cos e_3 - \lambda_1 e_1 \\ \omega = \Gamma_\omega = \hat{\omega} - \frac{1}{K} e_2 \hat{v} - \lambda_2 \sin e_3, \end{cases} \quad (6.86)$$

con  $\lambda_1, \lambda_2 > 0$  si ottiene

$$\dot{V}(e) = -\lambda_1 e_1^2 - K \lambda_2 \sin^2 e_3, \quad (6.87)$$

che è s.d.n.. Ricordiamo anche che utilizzando il teorema di Lasalle-Yoshizawa è possibile concludere sulla asintotica stabilità del punto di equilibrio  $e = [e_1, e_2, e_3]^T = [0, 0, 0]^T$ .

Per la stabilizzazione del modello dinamico applichiamo la tecnica del backstepping. Il modello dinamico complessivo è

$$\dot{e} = \begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \\ \dot{v} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v + e_2\omega - \hat{v} \cos e_3 \\ -e_1\omega + \hat{v} \sin e_3 \\ \omega - \hat{\omega} \\ \frac{\tau_v}{m} \\ \frac{\tau_\theta}{I_z} \end{bmatrix}. \quad (6.88)$$

Si definisca quindi la candidata di Lyapunov estesa:

$$W(e, v, \omega) = V(e) + \frac{1}{2}(v - \Gamma_v)^2 + \frac{1}{2}(\omega - \Gamma_\omega)^2, \quad (6.89)$$

dove  $\Gamma_\omega$  e  $\Gamma_v$  rappresentano le leggi di stabilizzazione nel caso cinematico (6.86). La derivata direzionale della candidata di Lyapunov risulta

$$\dot{W}(e, v, \omega) = \dot{V}(e) + (v - \Gamma_v) \left( \frac{\tau_v}{m} - \dot{\Gamma}_v \right) + (\omega - \Gamma_\omega) \left( \frac{\tau_\theta}{I_z} - \dot{\Gamma}_\omega \right). \quad (6.90)$$

Scegliamo per  $\tau_v$  e  $\tau_\theta$

$$\begin{cases} \tau_v = m(\dot{\Gamma}_v - K_{bv}(v - \Gamma_v) + \bar{\tau}_v) \\ \tau_\theta = I_z(\dot{\Gamma}_\omega - K_{b\omega}(\omega - \Gamma_\omega) + \bar{\tau}_\theta), \end{cases} \quad (6.91)$$

dove  $K_{bv} > 0$  e  $K_{b\omega} > 0$  sono costanti di guadagno rispettivamente per la velocità lineare ed angolare, da definire in base alle desiderate velocità di convergenza per il veicolo, e dove  $\bar{\tau}_v$  e  $\bar{\tau}_\omega$  sono termini ancora da scegliere.

Sostituendo le (6.91), la seconda delle (6.85) e le  $\Gamma_v$  e  $\Gamma_\omega$  (vedi (6.86)) in (6.90) si ottiene

$$\begin{aligned} \dot{W}(e, v, \omega) &= \dot{V}(e) + (v - \Gamma_v)\bar{\tau}_v + (\omega - \Gamma_\omega)\bar{\tau}_\theta - K_{bv}(v - \Gamma_v)^2 - K_{b\omega}(\omega - \Gamma_\omega)^2 = \\ &= e_1 v - e_1 \hat{v} \cos e_3 + e_2 \hat{v} \sin e_3 + K \sin e_3 (\omega - \hat{\omega}) + \\ &+ (v - \hat{v} \cos e_3 + \lambda_1 e_1) \bar{\tau}_v + \left( \omega - \hat{\omega} + \frac{1}{K} e_2 \hat{v} + \lambda_2 \sin e_3 \right) \bar{\tau}_\theta + \\ &- K_{bv}(v - \Gamma_v)^2 - K_{b\omega}(\omega - \Gamma_\omega)^2. \end{aligned}$$

Scegliendo  $\bar{\tau}_v = -e_1$  si ottiene

$$\begin{aligned} \dot{W}(e, v, \omega) &= -\lambda_1 e_1^2 + e_2 \hat{v} \sin e_3 + K \sin e_3 (\omega - \hat{\omega}) + \\ &+ \left( \omega - \hat{\omega} + \frac{1}{K} e_2 \hat{v} + \lambda_2 \sin e_3 \right) \bar{\tau}_\theta - K_{bv}(v - \Gamma_v)^2 - K_{b\omega}(\omega - \Gamma_\omega)^2, \end{aligned}$$

Infine, scegliendo  $\bar{\tau}_\theta = -K \sin e_3$  si ha

$$\dot{W}(e, v, \omega) = -\lambda_1 e_1^2 - \lambda_2 K \sin^2 e_3 - K_{bv}(v - \Gamma_v)^2 - K_{b\omega}(\omega - \Gamma_\omega)^2,$$

dalla quale è possibile notare come si sia ottenuta la stessa derivata direzionale del caso cinematico con l'aggiunta del termine di backstepping.

I risultati dell'inseguimento di un veicolo che si muove con traiettorie diverse da parte di un uniciclo dinamico sono riportati in fig. 6.18. La costante di guadagno del controllore cinematico è fissato a  $K = 10$ , mentre

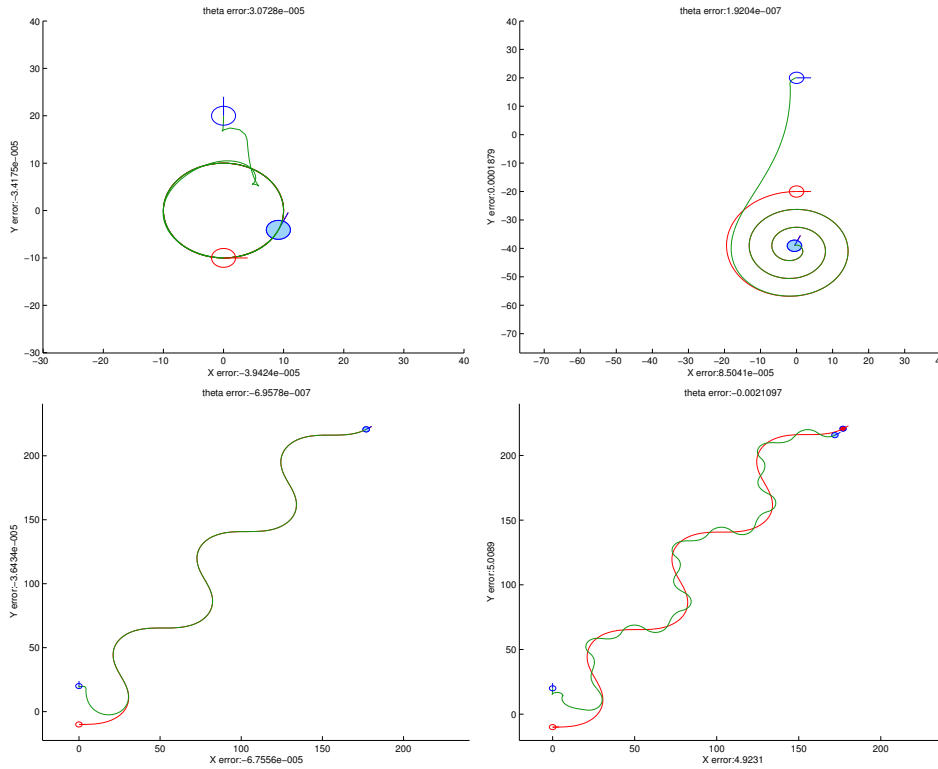


Figura 6.18: Risultati della simulazione per l'inseguimento di un uniciclo di riferimento nel caso di modello dinamico.

le costanti di backstepping sono  $K_{bv} = 10$  e  $K_{b\omega} = 1000$ . La massa ed il momento di inerzia sono posti rispettivamente pari a  $m = 10$  e  $I_z = 1$ . Nel primo esempio (figura 6.18, in alto a sinistra) il veicolo di riferimento ha come condizione iniziale  $q_0^r = [x_0^r, y_0^r, \theta_0^r]^T = [0, -10, 0]^T$  e velocità  $[v_r(t), \omega_r(t)]^T = [10, 1]^T$ , così che la sua traiettoria descrive una circonferenza di raggio  $R = 10$  percorsa a velocità costante. Il veicolo inseguitore parte invece da  $q_0^i = [x_0^i, y_0^i, \theta_0^i, v, \omega]^T = [0, 20, \frac{\pi}{2}, 0, 0]^T$ .

Nel secondo esempio (figura 6.18, in alto a destra) il veicolo di riferimento parte da  $q_0^r = [x_0^r, y_0^r, \theta_0^r]^T = [0, -20, 0]^T$ . Lo stato del veicolo inseguitore è inizializzato in  $q_0^i = [x_0^i, y_0^i, \theta_0^i, v, \omega]^T = [0, 20, 0, 0, 0]^T$ .

Nel terzo esempio (figura 6.18, in basso a sinistra) il veicolo di riferimento ha come condizioni iniziali  $q_0^r = [x_0^r, y_0^r, \theta_0^r]^T = [0, -10, 0]^T$  e velocità  $[v_r(t), \omega_r(t)]^T = [20 \cos(t), 10 \sin(t)]^T$ . Lo stato di partenza del veicolo inseguitore è invece  $q_0^i = [x_0^i, y_0^i, \theta_0^i, v, \omega]^T = [0, 20, \frac{\pi}{2}, 0, 0]^T$ .

Nel quarto esempio (figura 6.18, in basso a destra) i due veicoli partono da condizioni identiche al caso precedente. L'unica differenza qui è nel tuning

della costante di guadagno di backstepping, posto qui pari a  $K_{b\omega} = 10$ , che mostra come la convergenza verso il riferimento possa essere molto rallentata, e praticamente compromessa.

### Controllo di postura (regolazione) di un uniciclo

Anche per quest'ultimo esempio si prenda in considerazione la stabilizzazione dinamica su un punto di un veicolo uniciclo. Si riporta brevemente il modello cinematico del sistema utilizzato:

$$\begin{cases} \dot{\rho} = -\cos \beta v \\ \dot{\phi} = \frac{1}{\rho} \sin \beta v \\ \dot{\beta} = \frac{1}{\rho} \sin \beta v - \omega \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dot{\rho} = -\rho \cos \beta \bar{v} \\ \dot{\phi} = \sin \beta \bar{v} \\ \dot{\beta} = \sin \beta \bar{v} - \omega \end{cases} \quad (6.92)$$

dove  $\bar{v} = \frac{v}{\rho}$  è la nuova velocità di avanzamento lineare del veicolo ed  $\omega$  è l'usuale velocità angolare.

La candidata di Lyapunov utilizzata e la relativa derivata direzionale sono riportate di seguito:

$$\begin{cases} V(\bar{q}) = \frac{1}{2}(\rho^2 + \phi^2 + \lambda\beta^2) \\ \dot{V}(\bar{q}) = -\rho^2 \cos \beta \bar{v} + \phi \sin \beta \bar{v} + \lambda\beta \sin \beta \bar{v} - \lambda\beta\omega, \end{cases} \quad (6.93)$$

dove  $\lambda > 0$  è un grado di libertà aggiuntivo a disposizione del progettista. Scegliendo i seguenti controlli:

$$\begin{cases} \bar{v} = \Gamma_{\bar{v}} = \cos \beta \\ \omega = \Gamma_{\omega} = \frac{(\phi + \lambda\beta) \sin \beta}{\lambda} \cos \beta + \beta \end{cases}, \quad (6.94)$$

si ottiene  $V(\bar{q})$  s.n.d. ed utilizzando ancora una volta Krasowskii–Lasalle, è possibile concludere sulla asintotica stabilità del punto di equilibrio.

Il modello dinamico del sistema è riportato di seguito:

$$\begin{cases} \dot{v} = \frac{\tau_v}{m} \\ \dot{\omega} = \frac{\tau_\omega}{I_z} \end{cases}, \quad (6.95)$$

dove, per semplicità,  $\tau_v$  e  $\tau_\omega$  sono le coppie di controllo. Il modello dinamico (6.95) necessita della trasformazione  $v \rightarrow \bar{v}$ :

$$v = \rho \bar{v} \rightarrow \dot{v} = \dot{\rho} \bar{v} + \rho \dot{\bar{v}} = -\rho \cos \beta \bar{v}^2 + \rho \dot{\bar{v}} \rightarrow \dot{\bar{v}} = \frac{\tau_v}{m\rho} + \cos \beta \bar{v}^2. \quad (6.96)$$

Il modello dinamico complessivo sarà dunque:

$$\begin{bmatrix} \dot{\rho} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\bar{v}} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\rho \cos \beta \bar{v} \\ \sin \beta \bar{v} \\ \sin \beta \bar{v} - \omega \\ \frac{\tau_v}{m\rho} + \cos \beta \bar{v}^2 \\ \frac{\tau_\omega}{I_z} \end{bmatrix}. \quad (6.97)$$

Per la stabilizzazione del modello dinamico si applichi la tecnica del backstepping. Si definisca la candidata di Lyapunov estesa:

$$W(\bar{q}, \bar{v}, \omega) = V(\bar{q}) + \frac{1}{2}(\bar{v} - \Gamma_{\bar{v}})^2 + \frac{1}{2}(\omega - \Gamma_{\omega})^2, \quad (6.98)$$

dove  $\Gamma_{\bar{v}}$  e  $\Gamma_{\omega}$  rappresentano le leggi di stabilizzazione nel caso cinematico (riportate in (6.94)).

La derivata direzionale della candidata di Lyapunov risulta

$$\begin{aligned} \dot{W}(\bar{q}, \bar{v}, \omega) &= \dot{V}(\bar{q}) + (\bar{v} - \Gamma_{\bar{v}})(\dot{\bar{v}} - \dot{\Gamma}_{\bar{v}}) + (\omega - \Gamma_{\omega})(\dot{\omega} - \dot{\Gamma}_{\omega}) = \\ &= \dot{V}(\bar{q}) + (\bar{v} - \Gamma_{\bar{v}}) \left( \frac{\tau_v}{m\rho} + \cos \beta \bar{v}^2 - \dot{\Gamma}_{\bar{v}} \right) + (\omega - \Gamma_{\omega}) \left( \frac{\tau_{\omega}}{I_z} - \dot{\Gamma}_{\omega} \right). \end{aligned}$$

Possibili leggi per le coppie di controllo a disposizione  $\tau_v$  e  $\tau_{\omega}$  sono:

$$\begin{cases} \tau_v = m\rho(\dot{\Gamma}_{\bar{v}} - \cos \beta \bar{v}^2 - K_{bv}(\bar{v} - \Gamma_{\bar{v}}) + \bar{\tau}_v) \\ \tau_{\omega} = I_z(\dot{\Gamma}_{\omega} - K_{b\omega}(\omega - \Gamma_{\omega}) + \bar{\tau}_{\omega}) \end{cases},$$

Con questa scelta degli ingressi si ottiene

$$\begin{aligned} \dot{W}(\bar{q}, \bar{v}, \omega) &= \dot{V}(\bar{q}) + (\bar{v} - \Gamma_{\bar{v}})\bar{\tau}_v - K_{bv}(\bar{v} - \Gamma_{\bar{v}})^2 + (\omega - \Gamma_{\omega})\bar{\tau}_{\omega} - K_{b\omega}(\omega - \Gamma_{\omega})^2 = \\ &= -\rho^2 \cos \beta \bar{v} + (\phi + \lambda\beta) \sin \beta \bar{v} - \lambda\beta\omega + (\bar{v} - \cos \beta)\bar{\tau}_v + \\ &= \left( \omega - \frac{(\phi + \lambda\beta) \sin \beta}{\lambda} \cos \beta - \beta \right) \bar{\tau}_{\omega} - K_{bv}(\bar{v} - \Gamma_{\bar{v}})^2 - K_{b\omega}(\omega - \Gamma_{\omega})^2 \end{aligned}$$

Scegliendo  $\bar{\tau}_v = -(\phi + \lambda\beta) \sin \beta$  e  $\bar{\tau}_{\omega} = \lambda\beta$  si ottiene

$$\begin{aligned} \dot{W}(\bar{q}, \bar{v}, \omega) &= -\rho^2 \cos \beta \bar{v} - \lambda\beta\omega + (\phi + \lambda\beta) \sin \beta \cos \beta + \\ &= \left( \omega - \frac{(\phi + \lambda\beta) \sin \beta}{\lambda} \cos \beta - \beta \right) \bar{\tau}_{\omega} - K_{bv}(\bar{v} - \Gamma_{\bar{v}})^2 - K_{b\omega}(\omega - \Gamma_{\omega})^2 = \\ &= -\rho^2 \cos \beta \bar{v} - \lambda\beta^2 - K_{bv}(\bar{v} - \Gamma_{\bar{v}})^2 - K_{b\omega}(\omega - \Gamma_{\omega})^2 \end{aligned}$$

dove nell'ultima uguaglianza si è scelto  $\bar{\tau}_{\omega} = \lambda\beta$ . È possibile notare come si sia ottenuta la stessa derivata direzionale del caso cinematico con l'aggiunta del termine di backstepping.

Per una verifica pratica dei risultati ottenuti con la teoria di Lyapunov ed il backstepping, il controllore è stato implementato e simulato con **Simulink**. Come nel caso cinematico, si fissi la costante di guadagno  $\lambda = 1/2$  e la condizione iniziale  $q_0 = [x_0, y_0, \theta_0, v, \omega]^T = [0, 20, \frac{\pi}{2}, 10, 0]$ . Nel caso di controllo sul modello dinamico è necessario fissare il valore delle costanti di backstepping, mediandole tra velocità di inseguimento e spesa per il controllo.

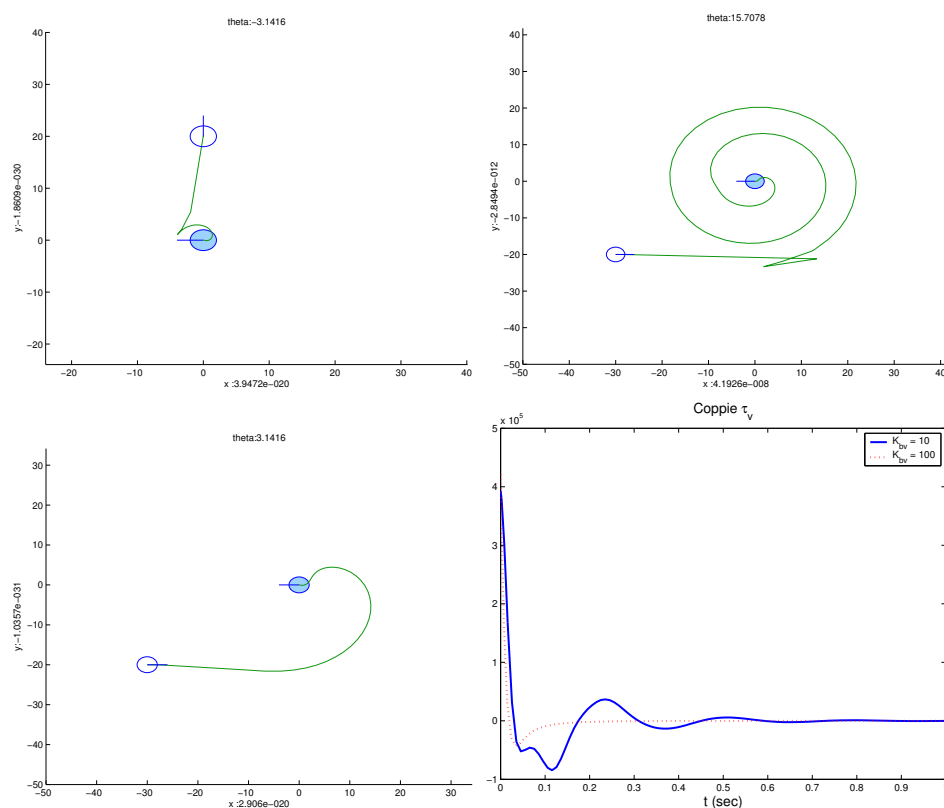


Figura 6.19: Risultati della simulazione per la stabilizzazione dell'uniciclo su un punto utilizzando il modello dinamico con massa del veicolo  $m = 10\text{Kg}$  e momento di inerzia  $I_z = 1\text{Kgm}^2$ .

Si fissi perciò  $K_{bv} = 10$  e  $K_{b\omega} = 100$ . Siano  $m = 10$  e  $I_z = 1$  rispettivamente la massa ed il momento di inerzia del veicolo. Con le scelte elencate è possibile ottenere i risultati riportati in figura 6.19, in alto a sinistra.

Nel secondo esempio la posizione iniziale del veicolo è  $q_0 = [x_0, y_0, \theta_0]^T = [-30, -20, 0, 0, -1]^T$  (figura 6.19, in alto a destra).

Per valutare l'influenza della costante di guadagno di backstepping sulla convergenza del veicolo, si osservi nella fig. 6.19 in basso a sinistra l'effetto della scelta  $K_{bv} = 100$  sulle stesse condizioni iniziali dell'esempio precedente. La rapida convergenza del modello dinamico sul riferimento cinematico produce una traiettoria molto diversa dalla spirale ottenuta nell'esempio precedente. Si osserva in questo esempio come il controllo cinematico sia effettivamente influenzato dal controllore dinamico, in virtù della chiusura della retroazione sulle variabili effettive.

Infine, nel grafico in basso a destra della figura 6.19 si può osservare che l'aumento della costante di guadagno di backstepping, oltre al miglioramento della convergenza, porta anche ovviamente ad un aumento della coppia  $\tau_{bv}$  richiesta agli attuatori.

## 6.7 Controlli Adattivi e ad Apprendimento

In the previous chapters, we have seen how the application of controllers heavily based on the model can lead to significant problems in the case where the model is known only with approximation, generating trajectory tracking errors and potentially instability. This could be remedied in part with the application of robust control techniques, which may have limitations related to the excessive authority of the required control.

On the other hand, one can think that the collection of information on the difference between the expected evolution of the estimated dynamic model and the true one of the corresponding system can be used to improve the estimate itself. In this chapter we will introduce the possibility of learning from the errors made and updating the estimate of the controller parameters during the execution of the control itself, i.e., to use control schemes described as *adaptive* or *learning*.

### 6.7.1 Controllo Cinematico con Parametri Geometrici Incerti

Si consideri innanzitutto un problema di controllo cinematico di posizione o di traiettoria quando alcuni dei parametri geometrici che definiscono la geometria del robot non siano noti. Sia  $p$  un vettore di parametri non noti (come ad esempio le lunghezze dei bracci o gli angoli tra gli assi), e sia  $\hat{p}$  una stima di questi parametri.

Sia  $\xi = Q(q, p)$  la mappa cinematica tra le variabili di giunto e quelle dell'end-effector, e supponiamo che, per ogni valore dei parametri, la mappa sia invertibile (escludendo quindi per semplicità singolarità e ridondanze). In queste ipotesi, l'errore di inseguimento  $e = \xi_d(t) - \xi$  rappresenta completamente le configurazioni del braccio.

Nel caso di conoscenza perfetta dei parametri la legge di inversione cinematica derivata dal metodo di Newton-Raphson (o CLIK), è scritta  $\dot{q} = J^{-1}(q, p)(\dot{\xi}_d + K_e e)$ , con  $K_e$  positiva definita, e rende la dinamica dell'errore  $\dot{e} = \dot{\xi}_d(t) - J\dot{q} = -K_e e$  globalmente asintoticamente stabile.

Se si conosce solo una stima dei parametri cinematici, o di alcuni di questi, una approssimazione di questo schema di controllo può essere scritta usando

uno Jacobiano stimato  $\hat{J} = J(q, \hat{p})$  nella forma

$$\dot{q} = \hat{J}^{-1}(\dot{\xi}_d + K_e e). \quad (6.99)$$

Si osservi esplicitamente che l'errore di posizionamento dell'end-effector  $e(q, p, t)$  non può più essere valutato, se i parametri  $p$  non sono noti, attraverso la misura degli angoli di giunto, ma lo si può valutare unicamente se si dispone di una misura assoluta della postura dell'end-effector (cosa possibile con sistemi di misura 3D oggi largamente disponibili, ad esempio con attrezzature per *motion capture*).

Supponiamo adesso che i parametri incogniti possano essere combinati e raccolti in un certo numero di funzioni (anche non lineari)  $\pi(p)$ , in modo che nella cinematica differenziale si possano separare queste funzioni da quelle di  $q$ ,  $\dot{q}$  e dei parametri noti, e si possa riscrivere in forma lineare rispetto a  $\pi(p)$ , ovvero

$$\dot{\xi} = J(q, \pi)\dot{q} = Y(q, \dot{q})\pi. \quad (6.100)$$

La matrice  $Y(q, \dot{q})$  è detta “regressore” del problema. Grazie a questa proprietà, la dinamica dell'errore può essere scritta

$$\dot{e} = \dot{\xi}_d - Y\pi = \dot{\xi}_d - \hat{J}\dot{q} + \hat{J}\dot{q} = \dot{\xi}_d - \hat{J}\dot{q} - Y\tilde{\pi},$$

dove per brevità si intende  $\hat{\pi} = \pi(\hat{p})$ , mentre  $\tilde{\pi} = \pi - \hat{\pi}$  indica l'errore di stima. Sostituendo in questa espressione la legge di controllo CLIK approssimata (6.99), si ha

$$\dot{e} = -K_e e - Y\tilde{\pi}. \quad (6.101)$$

Supponiamo a questo punto di poter aggiornare nel tempo la stima dei parametri  $\hat{\pi}(t)$ , cercando di imparare dagli errori via via osservati per migliorare le stime e diminuire gli errori finchè essi non siano ridotti a zero. La dinamica delle stime e quella degli errori sono in generale interdipendenti, quindi il sistema così generato ha stati  $(e, \hat{\pi})$ .

Per trovare la legge di aggiornamento della stima  $\hat{\pi}(t)$ , si può ancora procedere con la proposizione di una funzione candidata

$$V = \frac{1}{2}e^T e + \frac{1}{2}\tilde{\pi}^T R\tilde{\pi}, \quad (6.102)$$

che è positiva definita purché  $R$  sia scelta positiva definita.

Differenziando questa candidata (6.102) rispetto al tempo si ha

$$\dot{V} = -e^T(Y\tilde{\pi} + K_e e) + \tilde{\pi}^T R\dot{\tilde{\pi}}.$$

Da cui, ricordando che i veri parametri geometrici sono costanti e quindi  $\dot{\tilde{\pi}} = -\dot{\hat{\pi}}$  e scegliendo la legge di aggiornamento della stima nella forma

$$\dot{\hat{\pi}} = -R^{-1}Y^T e, \quad (6.103)$$



si ha

$$\dot{V} = -e^T K_e e.$$

Si noti che, alla luce della (6.99), la dipendenza di  $Y(q, \dot{q})$  da  $\dot{q}$  nella legge di aggiornamento (6.103) deve essere vista come una dipendenza da  $e, \hat{\pi}, \dot{\xi}_d(t)$ . Quindi, per inseguimento di traiettorie con  $\dot{\xi}_d(t) \neq 0$ , questa dinamica è tempo variante.

Nelle coordinate  $(e, \tilde{\pi})$  sia  $V$  che  $\dot{V}$  sono tempo invarianti. Applicando pertanto il teorema di LaSalle nel caso di controllo di postura, ovvero il teorema di Barbalat nel caso di inseguimento di traiettorie, si conclude che  $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{V} = 0$ , che implica  $\lim_{t \rightarrow \infty} e = 0$ , ottenendo quindi l'obiettivo di convergenza asintotica alla traiettoria desiderata.

Per quanto riguarda le stime dei parametri cinematici, possiamo certamente affermare che  $\hat{\pi}(t)$  tende ad un valore costante  $\tilde{\pi}$  (infatti la sua derivata (6.103) si annulla per  $e = 0$ ). Non si può peraltro concludere in generale sulla convergenza delle stime al vero valore  $\pi$ . Dalla (6.101) si ha che, raggiunta la convergenza ad  $e = 0$ , l'errore di stima può non essere nullo se vale

$$Y(q_d(t), \dot{q}_d(t))(\pi - \tilde{\pi}) \equiv 0,$$

dove  $q_d$  è la soluzione della cinematica inversa  $\xi_d = Q(q_d)$ . Da questa relazione si deduce che la particolare scelta della traiettoria da inseguire influenza direttamente la possibilità per l'algoritmo di stima di convergere o meno ai veri valori dei parametri. Se si desidera arrivare ad una stima corretta dei parametri, è pensabile di conseguenza di scegliere una traiettoria desiderata  $\xi_d(t)$  per la quale non esista alcun valore non banale di  $\tilde{\pi}$  che la possa annullare identicamente nel tempo (cioè non esista una intersezione degli spazi nulli di  $Y(q_d(t), \dot{q}_d(t))$  al variare di  $t$ ). Traiettorie desiderate che permettono la convergenza delle stime ai parametri sono dette *sufficientemente ricche*, o *persistentemente eccitanti*.

Quando si arrivasse a stimare correttamente  $\pi$ , per trovare i parametri originali  $p$  rimangono da invertire le funzioni  $\pi(p)$ . Si noti che a volte, per poter scrivere la forma lineare (6.100), può essere utile sovrapparametrizzare  $\pi(p)$  (che di conseguenza non sarebbe invertibile) rinunciando così alla possibilità di stimare  $p$  ma garantendo comunque l'inseguimento della traiettoria.

**Esempio:** Sia dato il manipolatore seriale planare a due gradi di libertà, mostrato in Figura 6.20. Sia  $\xi = [x \ y]^T$  la posizione dell'end-effector rispetto ad un sistema di riferimento centrato nella base del robot e  $q = [q_1 \ q_2]^T$  il vettore delle variabili di giunto. Siano  $a_1$  ed  $a_2$  le lunghezze dei due links del manipolatore.

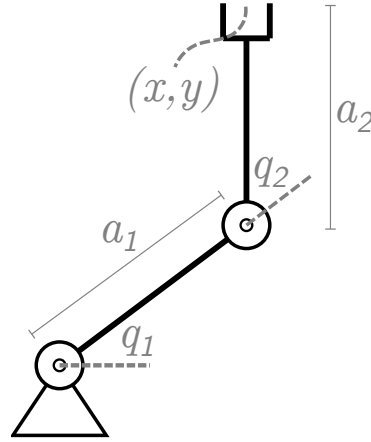


Figura 6.20: Manipolatore seriale planare con due giunti rotoidali.

La cinematica diretta del punto  $\xi$  è data da

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{\xi} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 C_1 + a_2 C_{12} \\ a_1 S_1 + a_2 S_{12} \end{bmatrix}}_{Q(q)}, \quad (6.104)$$

dove è stata usata la consueta notazione  $C_{ij} = \cos(q_i + q_j)$  etc.. Il Jacobiano vale

$$J = \begin{bmatrix} -a_2 S_{12} - a_1 S_1 & -a_2 S_{12} \\ a_2 C_{12} + a_1 C_1 & a_2 C_{12} \end{bmatrix}. \quad (6.105)$$

Scegliendo  $\pi = [a_1 \ a_2]^T$ , si può riscrivere la cinematica differenziale nella forma  $J(q)\dot{q} = Y(q, \dot{q})\pi$  con

$$Y = \begin{bmatrix} -S_1 \dot{q}_1 & -S_{12} \dot{q}_1 - S_{12} \dot{q}_2 \\ C_1 \dot{q}_1 & C_{12} \dot{q}_1 + C_{12} \dot{q}_2 \end{bmatrix}. \quad (6.106)$$

Si consideri adesso il problema di controllo di traiettoria dell' end-effector del manipolatore nel caso in cui si conosca solo una stima iniziale  $\hat{\pi}_0$  dei parametri geometrici del robot. Si supponga inoltre che siano date due traiettorie  $\xi_d^1(t)$  e  $\xi_d^2(t)$  su cui controllare l'end-effector:

$$\xi_d^1(t) = \begin{bmatrix} A \cos(\omega t) + x_0 \\ A \sin(\omega t) + y_0 \end{bmatrix}; \quad (6.107)$$

$$\xi_d^2(t) = \begin{bmatrix} A \sin(at + \delta) + x_0 \\ B \sin(bt) + y_0 \end{bmatrix}. \quad (6.108)$$

La prima rappresenta una traiettoria circolare centrata in  $p_0 = [x_0 \ y_0]^T$ , di ampiezza  $A$  e velocità angolare di percorrenza  $\omega$ . La seconda, invece, è una

più complessa traiettoria di Lissajous. I parametri  $A$  e  $B$  variano l'ampiezza della curva nelle direzioni  $x$  e  $y$  rispettivamente. Invece,  $a$ ,  $b$  e  $\delta$  rappresentano le pulsazioni e lo sfasamento delle due componenti sinusoidali della curva.

Usando la tecnica del controllo adattivo cinematico, risulta possibile ottenere l'inseguimento di tali traiettorie anche in presenza di incertezza sul valore dei parametri geometrici. Si utilizza infatti la legge di controllo  $u = \hat{J}^{-1}(\dot{\xi}_d + K_e e)$ , dove  $\hat{J}$  è il Jacobiano analitico calcolato usando la stima dei parametri. I risultati dell'inseguimento delle traiettorie per il robot RR planare e i rispettivi grafici sull'errore di inseguimento e la convergenza della stima dei parametri sono riportati nelle Figure 6.21, 6.22, 6.23 e 6.24. I valori reali delle lunghezze dei links sono  $a_1 = 1$  e  $a_2 = 1$ . La traiettoria  $\xi_d^1$  è a forma di cerchio con centro in  $(x_0, y_0) = (0.75, 0.75)$  e ampiezza  $A = 0.25$ . La velocità angolare è  $\omega = 0.5$ . La traiettoria  $\xi_d^2$  è di Lissajous con centro in  $(x_0, y_0) = (0.75, 0.75)$  e i parametri  $A = 0.5$ ,  $B = 0.5$ ,  $a = 1$ ,  $b = 2$  e  $\delta = \pi/2$ .

Si noti che la velocità di convergenza dell'errore di inseguimento dipende fortemente dal guadagno  $K_e$ . Un valore alto di tale guadagno assicura un veloce raggiungimento della traiettoria (Figure 6.22 e 6.23). D'altronde, la stima dei parametri dipende dalla presenza dell'errore di inseguimento, dato che  $\dot{\hat{\pi}} = -Y^T e$ . Quindi, una convergenza troppo veloce dell'errore, influenza negativamente la convergenza dell'errore di stima dei parametri geometrici (Figure 6.22 e 6.23). Inoltre, è possibile notare che una traiettoria più *ricca* ed *eccitante* come quella di Lissajous permette la convergenza della stima dei parametri (Figure 6.24) al contrario di una traiettoria più semplice come un cerchio (Figure 6.21).

---

◇

### 6.7.2 Controllo Dinamico con Parametri Inerziali Incerti

Passiamo adesso a considerare il controllo dinamico di manipolatori con parametri incerti. La dinamica dei sistemi lagrangiani non vincolati dipende da un certo numero di parametri noti  $p_k$  (ad esempio, i parametri geometrici di Denavit-Hartenberg) e da un certo numero di parametri incogniti  $p_u$  (ad esempio masse, posizioni dei baricentri, momenti di inerzia dei corpi, etc.), e può essere scritta esplicitando il ruolo di questi parametri nella forma

$$M(q, p_k, p_u)\ddot{q} + C(q, \dot{q}, p_k, p_u)\dot{q} + G(q, p_k, p_u) = D(q, \dot{q}, \ddot{q}, p_k, p_u) = \tau$$

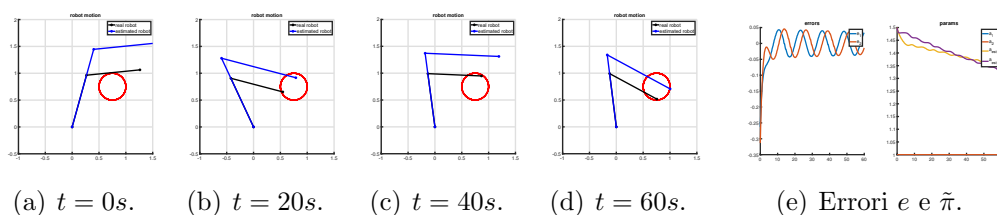


Figura 6.21: Controllo adattivo del RR su  $\xi_d^1$  con  $K_e = I$ .

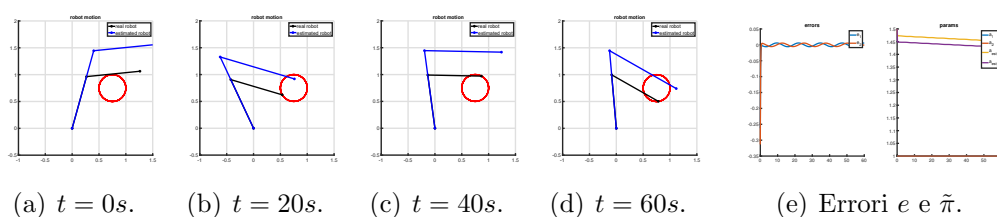


Figura 6.22: Controllo adattivo del RR su  $\xi_d^1$  con  $K_e = 10I$ .

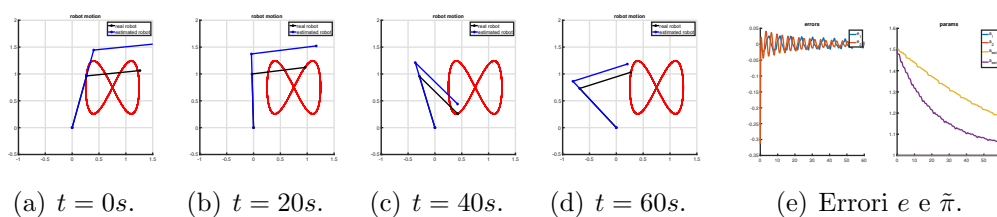


Figura 6.23: Controllo adattivo del RR su  $\xi_d^2$  con  $K_e = 10I$ .

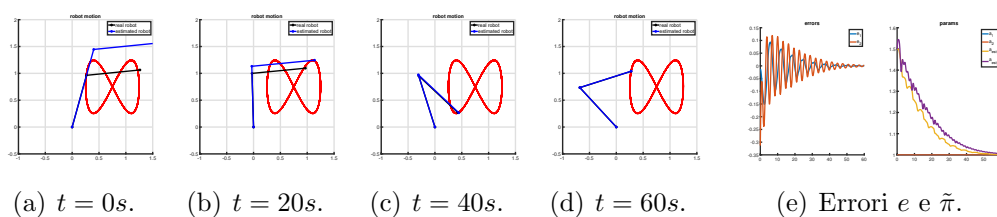


Figura 6.24: Controllo adattivo del RR su  $\xi_d^2$  con  $K_e = I$ .

Supponiamo adesso che sia possibile raggruppare i parametri non noti  $p_u$  in un vettore  $\pi_u(p_u)$  i cui elementi sono funzioni anche non lineari dei parametri non noti, e rispetto ai quali la dinamica può essere scritta in modo lineare. In altre parole, supponiamo che si possano separare completamente i parametri

non noti da tutte le altre variabili coinvolte nella dinamica e raccolte nella matrice di regressione  $Y(\cdot)$ , cioè

$$D(q, \dot{q}, \ddot{q}, p_k, p_u) = Y(q, \dot{q}, \ddot{q}, p_k) \pi_u(p_u).$$

In questo caso, potremo anche scrivere

$$D(q, \dot{q}, \ddot{q}, p_k, \hat{p}_u) = Y(q, \dot{q}, \ddot{q}, p_k) \pi_u(\hat{p}_u)$$

dove  $\hat{p}_u$  è il valore stimato dei parametri incogniti. Per semplicità di notazione, scriveremo d'ora in poi  $\pi$  per  $\pi_u(p_u)$ ,  $\pi_u(\hat{p}_u) = \hat{\pi}$  e  $\tilde{\pi} = \pi - \hat{\pi}$ . Ipotizzeremo anche che il valore vero di  $\pi_u = \pi$  sia incognito, ma costante (o lentamente variabile), ovvero  $\dot{\pi}_u = 0$ .

L'aggiornamento della stima dei parametri dinamici usati dal controllore durante l'esecuzione del controllo stesso avverrà mediante una legge di aggiornamento, che modelliamo come un processo continuo e rappresentiamo con l'equazione

$$\dot{\hat{\pi}} = u_\pi.$$

### 6.7.3 Controllo a Coppia Calcolata Adattivo

Si consideri ancora il controllo a coppia calcolata basato su modello approssimato nella forma

$$\tau = \widehat{M}(q) (\ddot{q}_d + K_v \dot{e} + K_p e) + \widehat{C}(q, \dot{q}) \dot{q} + \widehat{G}(q) \quad (6.109)$$

e ricordiamo la corrispondente forma (6.40) assunta dalla dinamica

$$\widehat{M} (\ddot{e} + K_v \dot{e} + K_p e) = \widetilde{M} \ddot{q} + \widetilde{C} \dot{q} + \widetilde{G}.$$

Usando il regressore dinamico  $Y(q, \dot{q}, \ddot{q}, p_k)$  nella dinamica con controllo a coppia calcolata reale si ha quindi

$$\ddot{e} + K_v \dot{e} + K_p e = -\widehat{M}(q)^{-1} (Y(q, \dot{q}, \ddot{q}) \hat{\pi}_D - Y(q, \dot{q}, \ddot{q}) \pi_D) = \widehat{M}(q)^{-1} Y(q, \dot{q}, \ddot{q}) \tilde{\pi}_D \quad (6.110)$$

dove si è di nuovo supposta l'invertibilità della stima  $\widehat{M}(q)$  della matrice dinamica (calcolabile a partire da  $\hat{\pi}_D$ )

Il sistema complessivo (dinamica del sistema lagrangiano con controllore a coppia calcolata + dinamica di aggiornamento dello stimatore) può essere descritta da uno stato composto dalle variabili di errore  $(e, \dot{e}, \tilde{\pi}_D)$ , che desidereremmo far convergere a zero. Usando ancora la notazione  $x = (e, \dot{e})^T$ , possiamo scrivere la dinamica complessiva nella forma

$$\begin{cases} \dot{x} &= A_d x + B_d \widehat{M}(q)^{-1} Y(q, \dot{q}, \ddot{q}) \tilde{\pi}_D \\ \dot{\tilde{\pi}}_D &= -u_\pi, \end{cases} \quad (6.111)$$

dove  $A_d, B_d$  sono come in (6.48), e si è usata l'ipotesi che i parametri dinamici reali  $\pi_D$  siano ignoti ma costanti, ovvero  $\dot{\pi}_D = 0$ . Si noti che nel sistema (6.111) i termini in  $q = q_d(t) - e$  introducono una tempo-varianza della dinamica. Per questo sistema scegliamo la candidata di Lyapunov di controllo

$$V(x, \tilde{\pi}_D) = \frac{1}{2}x^T P x + \frac{1}{2}\tilde{\pi}_D^T R \tilde{\pi}_D,$$

che è positiva definita nello stato  $(e, \dot{e}, \tilde{\pi}_D)$ . Sappiamo che la matrice  $A_d$  nel sistema (6.111) è asintoticamente stabile, e possiamo risolvere quindi l'equazione di Lyapunov  $A_d^T P + P A_d = -Q$  per qualsiasi  $Q > 0$ . Derivando quindi la candidata di Lyapunov lungo le traiettorie del sistema si ha

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \frac{1}{2}\dot{x}^T P x + \frac{1}{2}x^T P \dot{x} - \tilde{\pi}_D^T R u_\pi \\ &= \frac{1}{2}x^T (A_d^T P + P A_d) x + \tilde{\pi}_D^T \left( Y^T(q, \dot{q}, \ddot{q}) \widehat{M}^{-T}(q) B_d^T P x - R u_\pi \right) \\ &= -\frac{1}{2}x^T Q x + \tilde{\pi}_D^T \left( Y^T(q, \dot{q}, \ddot{q}) \widehat{M}^{-T}(q) B_d^T P x - R u_\pi \right). \end{aligned} \quad (6.112)$$

A questo punto si nota che scegliendo per le stime dei parametri la legge di aggiornamento

$$u_\pi = \dot{\tilde{\pi}}_D = R^{-1} Y^T(q, \dot{q}, \ddot{q}) \widehat{M}^{-T}(q) B_d^T P x \quad (6.113)$$

la (6.112) diventa

$$\dot{V}(t) = -\frac{1}{2}x^T Q x,$$

che è semidefinita negativa uniformemente. La tempo-invarianza di  $\dot{V}$  permette di applicare direttamente il teorema di Lasalle-Yoshizawa<sup>12</sup>), dal quale si ottiene che il sistema tende all'insieme in cui  $\dot{V}$  si annulla, ovvero a  $e = 0$  e  $\dot{e} = 0$ . Nulla peraltro è garantito riguardo la convergenza a zero dell'errore di stima  $\tilde{\pi}_D$ .

Il controllo descritto in questa sezione, introdotto da John Craig<sup>13</sup> nella sua tesi di dottorato, ha grande valore storico in quanto è stato il primo metodo adattivo applicato alla robotica, e perché ha introdotto alcune tecniche usate in tutte le versioni successive. Il metodo peraltro è affetto da alcuni importanti problemi:

<sup>12</sup>si veda ad es. J. T. Spooner, M. Maggiore, R. Ordonez, and K. M. Passino. *Stable Adaptive Control and Estimation for Nonlinear Systems- Neural and Fuzzy Approximator Techniques*. John Wiley & Sons, New York, NY, 2002. Una versione didattica nel capitolo dedicato alla Stabilità delle dispense dell'autore per *Fondamenti di Automatica - II Parte*

<sup>13</sup>John J. Craig. *Adaptive Control of Mechanical Manipulators*. Addison Wesley, 1988

- nella legge di aggiornamento delle stime dei parametri (6.113) si utilizza l'inversa della matrice di inerzia stimata  $\widehat{M}(q)$ , che — a differenza della reale matrice di inerzia  $M(q)$  — non è sempre garantito che sia invertibile o che lo sia con condizionamento sufficiente;
- Nella stessa legge (6.113), per il calcolo del regressore  $Y(q, \dot{q}, \ddot{q})$  è necessario disporre di una misura o di una buona stima della accelerazione dei giunti  $\ddot{q}$ , il che non è spesso possibile.

#### 6.7.4 Adaptive Backstepping Control

The “best effort” approximation of the backstepping control law (6.57) is

$$\tau = \widehat{M}(q)\ddot{q}_r + \widehat{C}(q, \dot{q})\dot{q}_r + \widehat{G}(q) + K_d s + J^T e. \quad (6.114)$$

It can be noticed that the control law can be rewritten in terms of the dynamic regressor as

$$\tau = Y(q, \dot{q}, \dot{q}_r, \ddot{q}_r)\widehat{\pi} + K_d s + J^T e, \quad (6.115)$$

where the different roles of  $\dot{q}$  and  $\dot{q}_r$  are explicited.

The dynamics of the Lagrangian system becomes connected to the parameter update dynamics, so that stability and convergence must be studied in a larger state space, comprised of configurations  $q$ , velocities  $\dot{q}$ , and estimates  $\widehat{\pi}$ .

Letting  $\widetilde{\pi} = \pi - \widehat{\pi}$  denote the estimate error, let us choose  $(e, s, \widetilde{\pi})$  as coordinates for this state space, and propose a candidate Lyapunov function

$$\begin{aligned} W_\pi(e, s, \widetilde{\pi}, t) &= W(e, s, t) + \frac{1}{2}\widetilde{\pi}^T R \widetilde{\pi} \\ &= \frac{1}{2}e^T e + \frac{1}{2}s^T M s + \frac{1}{2}\widetilde{\pi}^T R \widetilde{\pi}, \end{aligned} \quad (6.116)$$

where  $R$  is a symmetric positive definite design matrix. For constant unknown parameters one has  $\dot{\widetilde{\pi}} = -u_\pi$  and, following a similar derivation as in section 6.6.13, we get

$$\begin{aligned} \dot{W}_\pi &= -e^T \Lambda e - s^T K_d s + s^T \left( \widetilde{M}\ddot{q}_r + \widetilde{C}\dot{q}_r + \widetilde{G} \right) - \widetilde{\pi}^T R u_\pi \\ &= -e^T \Lambda e - s^T K_d s + s^T Y(q, \dot{q}, \dot{q}_r, \ddot{q}_r)\widetilde{\pi} - \widetilde{\pi}^T R u_\pi. \end{aligned}$$

Hence, choosing the update law as

$$\dot{\widehat{\pi}} = u_\pi = R^{-1} Y^T(q, \dot{q}, \dot{q}_r, \ddot{q}_r) s, \quad (6.117)$$

it holds

$$\dot{W}_\pi = -s^T K_d s - e^T \Lambda e. \quad (6.118)$$

Being  $W_\pi$  again bounded by two functions in class  $\mathcal{K}_\infty$ , and  $\dot{W}_\pi$  being only negative semi-definite in the  $(e, s, \tilde{\pi})$  state space, from Lyapunov theorem we can only infer uniform stability of the origin.

To have a stronger result of convergence, some further analysis is necessary. Indeed, straightforward application of LaSalle's invariance principle is not warranted, because the system and  $W_\pi$  are time-varying. However,  $\dot{W}_\pi$  is time-invariant in our case, hence the LaSalle-Yoshizawa theorem allows us to conclude in this case that  $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{W}_\pi(e, s, \tilde{\pi}) = 0$ . From this and (6.118) we get  $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$ , hence  $\lim_{t \rightarrow \infty} \xi(t) = \xi_d(t)$ , as wished.

A few remarks are in order.

- No conclusion can be drawn on the convergence of parameter estimates, as it was to be expected. Indeed, we only know that  $\lim_{t \rightarrow \infty} s = 0$ , hence  $\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{\pi} = 0$ , and  $\hat{\pi}$  converges to a constant value  $\bar{\pi}$ ;
- The update law (6.117) can be computed based only on the knowledge of the structure (and known parameters  $\delta$ ) of the dynamic regressor  $Y(\cdot, \cdot, \cdot, \delta)$ , of the reference  $\xi_d(t)$  with its derivatives, and on the real-time measurement of the configuration  $q$  and of its velocity  $\dot{q}$ , but *not* of the acceleration  $\ddot{q}$ . Indeed, it should be observed that  $\ddot{q}_r = J^{-1}(\ddot{\xi}_d + \Lambda \dot{e}) + \dot{J}^{-1}(\dot{\xi}_d + \Lambda e)$
- The adaptive backstepping method for Lagrangian systems does not require the computation of the inverse of the estimated dynamics matrix  $\hat{M}$ , which was instead used in the adaptive computed-torque control, with problems ensuing from the matrix not being guaranteed to exist;
- An example of a vector  $\pi$  for which the regressor form of the Lagrangian dynamics can be written, is the set of inertial parameters (masses, first and second moments of inertia) of a serial linkage robot arm. The method applies however in more general cases as well.
- as an instance of a generalized form of regressor, consider a simple model of Coulomb friction at the joint as

$$\tau_f = \mu_s \text{sign}(\dot{q}) + \mu_v \dot{q}$$

to be added to the dynamics. By adding two columns in the regressor for the two functions of  $\dot{q}$ , and the two coefficients of friction  $\mu_s, \mu_v$  in the unknown parameter vector, the friction can be approximately compensated;



- wherever both kinematic and dynamic parameters are uncertain, the kinematic and dynamic adaptive controllers can be merged in a single architecture, relying on the backstepping method of systematically extending the control Lyapunov function (this is left for exercise).

### 6.7.5 Li-Slotine Adaptive Controller

The adaptive controller derived from back-stepping described in section 6.7.4 can be regarded as a generalization of a method originally proposed in 1987 by Li and Slotine, who did not use backstepping but reached similar results.

Considering the case that  $q_d(t)$  is directly given, Li and Slotine introduced the definitions of *reference velocity*  $\dot{q}_r = \dot{q}_d + \Lambda e$  and of  $s = \dot{q}_r - \dot{q} = \dot{e} + \Lambda e$ , and based their derivations on the non-negative function

$$W_{LS}(s, \tilde{\pi}, t) = \frac{1}{2} s^T M(q) s + \frac{1}{2} \tilde{\pi}^T R \tilde{\pi}.$$

which differs from  $W_p$  in (6.116) only for the term  $\frac{1}{2} e^T e$ .

By computing  $\dot{W}_{LS}$  and through similar derivations as reported in section 6.7.4, it is shown that, with the choice of the parameter update law

$$\dot{\hat{\pi}} = R^{-1} Y^T(q, \dot{q}, \dot{q}_r, \ddot{q}_r) s$$

and of the control law

$$\tau = \widehat{M}(q) \ddot{q}_r + \widehat{C}(q, \dot{q}) \dot{q}_r + \widehat{G}(q) + K_d s = Y(q, \dot{q}, \ddot{q}_r, \dot{q}_r) \hat{\pi} + K_d s$$

(which differs from (6.114) only for the lack of a term for the error  $e$ ), it is obtained

$$\dot{W}_{LS}(t) = -s^T K_d s.$$

The original proof by Li and Slotine follows using ingenious “Lyapunov-like” arguments. Indeed, it should be observed that  $W_{LS}(s, \tilde{\pi})$  is not only time-varying, but it is not even positive definite in the  $(e, s, \tilde{\pi})$  state space. An argument using Barbalat Lemma is thus necessary to show convergence of  $(e, \dot{e}) \rightarrow (0, 0)$ :

- **Barbalat Lemma:** For a differentiable scalar function  $V(t)$  which satisfies

$$\begin{cases} V(t) \geq 0 \\ \dot{V}(t) \leq 0 \\ |\dot{V}(t)| \leq M \end{cases} \quad (6.119)$$

it holds  $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{V}(t) = 0$ .

Notice that the third condition in Barbalat Lemma ensures uniform continuity of  $\dot{V}(t)$ .

For Li-Slotine's function,  $\ddot{W}_{LS}(t)$  is lower bounded. Indeed

$$\ddot{W}_{LS}(t) = -2s^T K_d \dot{s} = -2(\dot{e} + \Lambda e)^T K_d (\ddot{e} + \Lambda \dot{e}),$$

and it can be shown that  $(e, \dot{e}, \ddot{e})$  are bounded. Hence,  $\dot{W}_{LS} \rightarrow 0$ , hence  $s(t) \rightarrow 0$  as  $t \rightarrow \infty$ , which implies that  $\dot{e} + \Lambda e \rightarrow 0$  and eventually  $e(t) \rightarrow 0$ .

The Li-Slotine method thus guarantees asymptotic trajectory tracking. The discussion of the possible convergence of the parameter estimates to the real values is the same as that reported above.

In conclusion, the backstepping-based adaptive controller presented in section 6.7.4 is very close to the adaptive controller originally proposed by Li and Slotine. The backstepping method however enjoys a more systematic derivation, and a straightforward proof of global asymptotic convergence to the desired trajectory.

### 6.7.6 Convergenza della stima dei parametri

Si è visto che nessuno degli schemi adattivi studiati garantisce la convergenza dei parametri stimati a quelli veri. In tutti i casi, il valore della stima converge ad un valore costante, che è raggiunto quando l'errore di inseguimento della traiettoria desiderata è annullato, e quando di conseguenza si ha che le leggi di aggiornamento dei parametri si annullano  $u_\pi = 0$ .

Supponendo che, dopo un tempo  $T$  sufficientemente lungo, la condizione  $e = \dot{e} = 0$  sia raggiunta, si ha  $q(t) \equiv q_d(t)$ . Sostituendo queste relazioni nelle equazioni della dinamica del manipolatore con i diversi controllori adattivi visti, si ottiene in ogni caso la relazione

$$Y(q_d(t), \dot{q}_d(t), \ddot{q}_d) \widetilde{\pi}_d = 0. \quad (6.120)$$

Questa relazione non è sufficiente a costringere l'errore di stima a regime  $\widetilde{\pi}_d$  ad assumere valore nullo, perché in effetti consente all'errore di assumere qualsiasi valore costante purché appartenga al kernel del regressore  $Y(q_d(t), \dot{q}_d(t), \ddot{q}_d(t))$  per ogni  $t$ . Si ricordi che il regressore ha tante righe ( $n$ ) quanti sono i giunti, e tante colonne ( $p$ ) quanti sono i valori incogniti in  $\pi_d$ , tipicamente con un kernel di grandi dimensioni ( $p \gg n$ ). D'altronde, ad ogni istante  $t$  il kernel del regressore può cambiare, se  $q_d(t)$  non è banale, e la soluzione di regime deve appartenere alla intersezione di tutti gli infiniti kernel del regressore nel tempo. È quindi possibile che tale intersezione possa ridursi nel tempo a sottospazi di dimensione sempre più piccola: se

l'intersezione raggiungesse dimensione zero, e la mantenesse sufficientemente a lungo, la convergenza di  $\tilde{\pi}_d$  a 0 verrebbe assicurata.

Per caratterizzare i casi in cui questa convergenza può verificarsi, è utile procedere come segue. Consideriamo un tempo  $T$  sufficientemente lungo dopo il quale la convergenza dell'errore a zero possa considerarsi conclusa, ed un orizzonte temporale di stima pari a  $\Delta$ . Moltiplicando la (6.120) per  $Y^T(q_d, \dot{q}_d, \ddot{q}_d)$  e integrandola nell'intervallo  $[T, T + \Delta]$  si ottiene

$$\int_T^{T+\Delta} Y^T(q_d, \dot{q}_d, \ddot{q}_d) Y(q_d, \dot{q}_d, \ddot{q}_d) dt \tilde{\pi}_d = 0$$

che ha come unica soluzione  $\tilde{\pi}_d = 0$  se e solo se la matrice quadrata

$$\Sigma = \int_T^{T+\Delta} Y^T(q_d, \dot{q}_d, \ddot{q}_d) Y(q_d, \dot{q}_d, \ddot{q}_d) dt \quad (6.121)$$

ha rango pieno. In questo caso si dice che la traiettoria  $q_d(t)$  sull'intervallo considerato  $t \in [T, T + \Delta]$  "eccita sufficientemente" la dinamica dell'errore di stima tanto da permettere la convergenza della stima al valore corretto in un tempo  $\Delta$  dopo che la traiettoria desiderata è stata raggiunta.

Così come la mancata invertibilità della matrice  $\Sigma$  indica la impossibilità di identificare qualche parametro in  $\pi_d$ , un suo piccolo valore singolare implica una cattiva identificabilità. Poiché la matrice  $\Sigma$  dipende dalla traiettoria  $q_d(t)$ , è quindi pensabile di scegliere traiettorie desiderate che massimizzino la capacità identificativa dell'algoritmo, ad esempio massimizzandone il minimo valore singolare<sup>14</sup>.

### 6.7.7 Adaptive Backstepping Control for Dynamic Path Tracking with a Unicycle

Suppose now that the value of the inertial parameter  $I_z$  is not known, and only an estimate is available. Consider the dynamics of the unicycle (6.75) reduced to the line tracking problem where the velocity  $\hat{v}(t)$  is considered a given, i.e.

$$\begin{cases} \dot{y} &= \hat{v}(t) \sin(\theta) \\ \dot{\theta} &= \omega \\ \dot{\omega} &= \frac{1}{I_z} \tau_\theta. \end{cases} \quad (6.122)$$

<sup>14</sup>come in tutti i casi in cui si discutono le norme delle applicazioni lineari, si deve tenere conto anche del condizionamento e della possibile scalatura delle variabili in gioco, che è opportuno normalizzare e adimensionalizzare.

It can be observed that the dynamics depend on the unknown parameter  $p = I_z$ , and can be written linearly in  $\pi = 1/I_z$ . We let  $\hat{\pi} = 1/\hat{I}_z$  and  $\tilde{\pi} = \pi - \hat{\pi} = \frac{\hat{I}_z - I_z}{I_z \hat{I}_z}$ <sup>15</sup>.

Introduce the candidate Lyapunov function

$$W_\pi(y, \theta, \omega, \tilde{\pi}) = W(q, \omega) + \frac{1}{2} R \tilde{\pi}^2 \quad (6.123)$$

where  $W(q, \omega)$  as defined in (6.80) is the original candidate Lyapunov function for the backstepping control.

From (6.81), the time derivative of  $W_\pi(y, \theta, \omega, \tilde{\pi})$  is

$$\dot{W}_\pi(y, \theta, \omega, \tilde{\pi}) = y\hat{v}(t) \sin \theta + \theta\omega + (\omega - \Gamma_\omega) \left( \frac{\tau_\theta}{I_z} - \dot{\Gamma}_\omega \right) + R \tilde{\pi} \dot{\tilde{\pi}} \quad (6.124)$$

By adding and subtracting the quantity  $\theta\Gamma_\omega$  and by the equality  $y\hat{v}(t) \sin \theta + \theta\Gamma_\omega = -K_\theta\theta^2$  (see (6.78)) we obtain

$$\begin{aligned} \dot{W}_\pi(y, \theta, \omega, \tilde{\pi}) &= -K_\theta\theta^2 + \theta(\omega - \Gamma_\omega) + (\omega - \Gamma_\omega) \left( \frac{\tau_\theta}{I_z} - \dot{\Gamma}_\omega \right) - R \tilde{\pi} u_\pi = \\ &= -K_\theta\theta^2 + (\omega - \Gamma_\omega) \left( \theta + \frac{\tau_\theta}{I_z} - \dot{\Gamma}_\omega \right) - R \tilde{\pi} u_\pi. \end{aligned}$$

Introducing the best-effort control  $\tau_\theta = \hat{I}_z \left( \dot{\Gamma}_\omega - K_b(\omega - \Gamma_\omega) - \theta \right)$  we have

$$\begin{aligned} \dot{W}_\pi &= -K_\theta\theta^2 + (\omega - \Gamma_\omega) \left( \theta + \frac{\hat{I}_z}{I_z} \left( \dot{\Gamma}_\omega - K_b(\omega - \Gamma_\omega) - \theta \right) - \dot{\Gamma}_\omega \right) - R \tilde{\pi} u_\pi = \\ &= -K_\theta\theta^2 - \frac{\hat{I}_z}{I_z} K_b(\omega - \Gamma_\omega)^2 + (\omega - \Gamma_\omega) (\theta - \dot{\Gamma}_\omega) \left( 1 - \frac{\hat{I}_z}{I_z} \right) - R \tilde{\pi} u_\pi = \\ &= -K_\theta\theta^2 - \frac{\hat{I}_z}{I_z} K_b(\omega - \Gamma_\omega)^2 - (\omega - \Gamma_\omega) (\theta - \dot{\Gamma}_\omega) \tilde{\pi} \hat{I}_z - R \tilde{\pi} u_\pi. \end{aligned}$$

By adding and subtracting  $K_b(\omega - \Gamma_\omega)^2$  we have

$$\dot{W}_\pi = -K_\theta\theta^2 - K_b(\omega - \Gamma_\omega)^2 + K_b(\omega - \Gamma_\omega)^2 \tilde{\pi} \hat{I}_z - (\omega - \Gamma_\omega) (\theta - \dot{\Gamma}_\omega) \tilde{\pi} \hat{I}_z - R \tilde{\pi} u_\pi.$$

Hence, choosing the parameter update law

$$u_\pi = R^{-1} \hat{I}_z \left( K_b(\omega - \Gamma_\omega)^2 - (\omega - \Gamma_\omega) (\theta - \dot{\Gamma}_\omega) \right), \quad (6.125)$$

<sup>15</sup>In this derivation, we assume  $\hat{v}(t)$  to be known. It can be noted that this parameter enters linearly the kinematic equations, hence an adaptive controller could be designed for  $\hat{v}$  constant or slowly varying. This is left as an advanced exercise for the student

we finally obtain

$$\dot{W}_\pi(y, \theta, \omega, \tilde{\pi}) = -K_\theta \theta^2 - K_b (\omega - \Gamma_\omega)^2$$

which is semi negative definite. As in previous cases, the asymptotic convergence to zero path following error can be shown to hold, while  $\hat{I}_z$  will reach a constant value, not necessarily equal to the true value  $I_z$ .



# Capitolo 7

## Osservabilità e Ricostruibilità

Si è in passato già sottolineato il fatto che, nel modello in forma di stato di un sistema, l'uscita (di misura) ha il significato di specificare quelle grandezze di cui, a differenza dello stato, si ha a disposizione una misura ad ogni istante del processo. Essendo la conoscenza degli stati necessaria per effettuare la loro retroazione, è perciò fondamentale determinare se, dalla conoscenza delle uscite (e degli ingressi, che sono ovviamente a nostra disposizione), è possibile conoscere (o più in generale stimare) lo stato attuale del sistema.

La capacità di stimare lo stato di un sistema è d'altronde importante anche in senso diretto in molte applicazioni, dove è importante risalire dalla osservazione di fenomeni misurabili alla situazione "interna" del sistema, di per sé non accessibile.

Se i dati di ingresso/uscita sono misurati in un intervallo  $[0, t]$ , il problema di ricavare informazione sullo stato  $x(0)$  al tempo 0 si dice di *osservazione dello stato*; viceversa, il problema di ricavare lo stato  $x(t)$  al tempo  $t$  si dice di *ricostruzione dello stato*. Si vedrà che i due problemi sono equivalenti per sistemi LTITC, ma non per sistemi LTITD.

Nelle questioni di osservazione/ricostruzione, ci troveremo spesso di fronte a problemi che possono essere ricondotti a sistemi di equazioni lineari sovradeterminati (con meno incognite che equazioni), che in pratica saranno spesso inconsistenti. Per questi problemi si porranno quindi questioni di approssimazione ottima ad una soluzione impossibile.

### 7.1 Insieme indistinguibile per sistemi LTI

Consideriamo un sistema tempo invariante in forma di stato

$$\begin{aligned}\mathbb{D}x(t) &= f(x(t), u(t)), \\ y(t) &= h(x(t), u(t))\end{aligned}$$

con  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $y \in \mathbb{R}^p$  e  $u \in \mathbb{R}^m$ . Sia al solito  $x(\bar{x}, u(\cdot), t)$  il valore della soluzione corrispondente a  $x(0) = \bar{x}$  e controllo  $u(\tau)$ ,  $\tau \in [0, t]$ , al tempo  $t$ ; si indichi poi con  $y(\bar{x}, u(\cdot), t) = h(x(\bar{x}, u(\cdot), t), u(t))$ .

Ci chiediamo se, conoscendo

- il modello del sistema
- l'ingresso  $u(\cdot)$  sull'intervallo  $[0, t]$ ;
- l'uscita  $y(\cdot)$  sull'intervallo  $[0, t]$ ,

è possibile osservare  $x(0) = \bar{x}$  (ricostruire  $x(t)$ ).

È ovvio (almeno in linea teorica) che, se è possibile osservare  $\bar{x}$ , la conoscenza dell'ingresso, del modello e quindi della sua soluzione (che si suppone unica nel futuro per il determinismo del modello) implica che si possa determinare univocamente  $x(t) = x(\bar{x}, u, t)$ . Il viceversa non è detto: per i sistemi TD, in particolare, abbiamo già visto che le traiettorie di un sistema non sono univocamente determinate nel passato (si pensi alla possibile non invertibilità di  $A^t$  per sistemi LTITD).

Poniamo adesso la questione della osservabilità dello stato in termini leggermente diversi. Due stati iniziali  $\bar{x}$  e  $\bar{x}_1$  si dicono *indistinguibili* (nel futuro) nell'intervallo  $[0, t]$  (si scrive  $\bar{x}I_t\bar{x}_1$ ) se, qualsiasi ingresso  $u(\cdot) \in U$  venga applicato al sistema, le uscite corrispondenti alle evoluzioni relative sono uguali, cioè

$$\bar{x}I_t\bar{x}_1 \Leftrightarrow \forall u \in U, y(\bar{x}, u, \tau) = y(\bar{x}_1, u, \tau) \forall \tau \in [0, t]$$

Gli stati sono detti *indistinguibili tout-court* se sono indistinguibili per ogni  $t$  (si scrive  $\bar{x}I\bar{x}_1$ ).

Si definisce insieme dei punti *indistinguibili* nell'intervallo  $[0, t]$  da  $\bar{x}$  l'insieme

$$\mathcal{I}_t(\bar{x}) \stackrel{def}{=} \{\bar{x}_1 \in \mathbb{R}^n \mid y(\bar{x}, u, \tau) = y(\bar{x}_1, u, \tau) \forall \tau \in [0, t], \forall u \in U\}.$$

Ovviamente, se questo insieme contiene altri punti diversi da  $\bar{x}$  stesso, non sarà possibile determinare univocamente lo stato dalle uscite.

### 7.1.1 Sistemi LTITC

Consideriamo l'insieme di indistinguibilità per il sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, \\ y &= Cx + Du \end{aligned} \tag{7.1}$$



con  $x(0) = \bar{x}$ , e la corrispondente soluzione per le uscite:

$$y(\bar{x}, u, \tau) = Ce^{A\tau}\bar{x} + \int_0^\tau Ce^{A(\tau-\sigma)}Bu(\sigma)d\sigma + Du(\tau)$$

Confrontando le uscite per due stati iniziali diversi, si ha

$$\bar{x}_1 I_t \bar{x} \Leftrightarrow Ce^{A\tau}\bar{x}_1 = Ce^{A\tau}\bar{x}, \forall \tau \in [0, t] \Leftrightarrow Ce^{A\tau}(\bar{x}_1 - \bar{x}) = 0, \forall \tau \in [0, t]$$

per cui lo studio della indistinguibilità di  $\bar{x}_1$  da  $\bar{x}$  può essere riformulato come lo studio della indistinguibilità dello stato  $\tilde{x} \stackrel{def}{=} \bar{x}_1 - \bar{x}$  dall'origine. Inoltre è evidente che in questo problema, gli ingressi non giocano alcun ruolo (questo è vero solo perchè il sistema è lineare!)

Uno stato  $\tilde{x}$  indistinguibile dall'origine nell'intervallo  $[0, t]$  viene detto *non osservabile* in  $[0, t]$ . Non si specifica l'intervallo se questo vale per ogni intervallo. Se per un sistema l'insieme dei punti non osservabili contiene solo l'origine, si dice che *il sistema* è (completamente) osservabile.

Dunque, uno stato  $\tilde{x}$  non sarà distinguibile dall'origine se la sua sua evoluzione libera produce un'uscita identicamente nulla su un intervallo di tempo  $[0, t]$ , anche breve ma finito. Sviluppando la funzione della risposta libera in serie rispetto a  $t = 0$ , si ha

$$y(\tilde{x}, 0, t) = Ce^{At}\tilde{x} = \sum_{k=0}^{\infty} y^{(k)}(0) \frac{t^k}{k!} = 0, \forall t$$

da cui, considerando l'espressione della  $k$ -esima derivata

$$\begin{aligned} y(\tilde{x}, 0, 0) &= C e^{At} \Big|_{t=0} \tilde{x} &= C\tilde{x} \\ \dot{y}(\tilde{x}, 0, 0) &= CA e^{At} \Big|_{t=0} \tilde{x} &= CA\tilde{x} \\ &\vdots & \\ y^{(k)}(\tilde{x}, 0, 0) &= CA^k e^{At} \Big|_{t=0} (\tilde{x}) &= CA^k\tilde{x} \end{aligned}$$

Queste equazioni, che definiscono gli stati  $\tilde{x}$  indistinguibili dall'origine, possono essere riscritte in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} \tilde{y}(0) \\ \tilde{y}^{(1)}(0) \\ \tilde{y}^{(2)}(0) \\ \vdots \\ \tilde{y}^{(k)}(0) \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^k \\ \vdots \end{bmatrix} \tilde{x}.$$

Dunque  $\tilde{x}$  è non osservabile (ovvero  $\bar{x}_1$  è indistinguibile da  $\bar{x}$ ) se appartiene allo spazio nullo della matrice composta con infinite righe sopra riportata. In seguito al teorema di Cayley–Hamilton, sappiamo comunque che ogni gruppo di righe  $CA^r$  con  $r \geq n$  è combinazione lineare delle prime  $n$  righe della matrice stessa. Possiamo dunque dire che l'insieme dei punti non osservabili nell'intervallo  $[0, t]$  è in effetti un sottospazio, detto *sottospazio di inosservabilità*, dato da

$$\bar{O} = \ker(O) \stackrel{def}{=} \ker \left( \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \right)$$

La matrice  $O$  viene detta *matrice di osservabilità* del sistema.

Il sottospazio di inosservabilità nell'intervallo  $[0, t]$  non dipende in effetti dalla durata dell'intervallo di osservazione  $t$ : se uno stato è indistinguibile dall'origine in un tempo  $t$ , tale rimarrà per ogni durata della osservazione. Viceversa, se uno stato è osservabile con osservazioni della uscita di una certa durata, lo sarà anche con osservazioni di durata arbitrariamente breve. Quindi, per sistemi in TC, si ometterà di specificare la durata del tempo di osservazione. Un sistema è completamente osservabile se e solo se  $\ker(O) = \{0\}$ .

L'insieme dei punti indistinguibili dal generico punto  $\bar{x}$  è dunque dato da

$$\mathcal{I}_t(\bar{x}) = \{x = \bar{x} + r, \forall r \in \bar{O}\}$$

ed è quindi un iperpiano, parallelo al sottospazio di inosservabilità, passante per  $\bar{x}$  ed anch'esso indipendente da  $t$ . Nessun punto, eccetto  $\bar{x}$ , è indistinguibile da  $\bar{x}$  nel caso che il sistema sia osservabile.

### 7.1.2 Sistemi LTITD

Consideriamo l'insieme di inosservabilità per il sistema

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \tag{7.2}$$

con  $x(0) = \bar{x}$

La soluzione per le uscite della equazione alle differenze (7.2) (che indicheremo con  $y(\bar{x}, u, \tau)$ ) è data da

$$y(\bar{x}, u, \tau) = CA^\tau \bar{x} + \sum_{k=0}^{\tau-1} CA^{\tau-k-1} Bu(k)$$

Consideriamo la differenza tra le uscite corrispondenti a due diversi stati iniziali  $\bar{x}$  e  $\bar{x}_1$ , indicandola con

$$\tilde{y}(\tau) \stackrel{def}{=} y(\bar{x}, u, \tau) - y(\bar{x}_1, u, \tau).$$

Impilando in un solo vettore i vettori di differenze tra le uscite negli istanti  $0, 1, \dots, t$  si può scrivere

$$\begin{bmatrix} \tilde{y}(0) \\ \tilde{y}(1) \\ \vdots \\ \tilde{y}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^t \end{bmatrix} (\bar{x} - \bar{x}_1) \stackrel{def}{=} O_t \tilde{x}$$

Due stati iniziali sono quindi indistinguibili in  $t$  passi se la loro differenza  $\tilde{x}$  appartiene allo spazio nullo della *matrice di osservabilità in  $t$  passi*  $O_t$ , che viene detto *sottospazio di inosservabilità in  $t$  passi*,  $\bar{O}_t \stackrel{def}{=} \ker(O_t)$ .

È evidente che il sottospazio di inosservabilità in  $t$  passi  $\bar{O}_t$  contiene  $\bar{O}_{t+1}$ , e che quindi la successione definita dalle dimensioni dei sottospazi di inosservabilità al crescere del numero di passi è non crescente; per cui la successione si stabilizzerà in un valore finito  $\geq 0$ . Per il teorema di Cayley–Hamilton, il sottospazio di inosservabilità in un numero arbitrariamente grande di passi può essere calcolato arrestandosi all’ $(n-1)$ -esimo passo,

$$\bar{O} = \ker(O) \stackrel{def}{=} \ker \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

che viene detto *sottospazio di inosservabilità* del sistema, mentre la matrice  $O$  viene detta *matrice di osservabilità del sistema*. Ogni stato distinguibile dall’origine in un numero qualsiasi di passi può essere anche distinto in non più di  $n-1$  passi.

L’insieme degli stati indistinguibili dallo stato generico  $\bar{x}$  al passo  $t$  è pertanto dato da

$$\mathcal{I}_t(\bar{x}) = \{x = \bar{x} + r, \forall r \in \bar{O}_t\}$$

ed è quindi ancora un iperpiano, parallelo al sottospazio di inosservabilità in  $t$  passi, passante per  $\bar{x}$ .

L'insieme dei punti indistinguibili da  $\bar{x}$  si riduce al solo punto  $\bar{x}$  se  $\text{rank}(O) = n$ . In tal caso, il sistema stesso si dice *completamente osservabile*.

### 7.1.3 Ricostruibilità

Il problema di ricostruire, a partire dalle misure delle uscite in un intervallo  $[T - t, T]$ , lo stato all'istante  $T$  stesso riveste particolare importanza in relazione alla possibilità di retroazionare lo stato.

Due stati del sistema al tempo  $T$ ,  $x_1(T)$  e  $x_2(T)$ , si dicono *indistinguibili nel passato in  $t$  passi* se entrambi sono possibili soluzioni del sistema a partire da condizioni iniziali compatibili con le misure compiute sull'intervallo  $[T - t, T]$ .

Per la tempo-invarianza del sistema considerato, posso porre  $T = t$ . Scrivendo la soluzione dello stato al tempo  $t$  a partire dallo stato iniziale  $\bar{x}_1$  si ha

$$x_1(t) \stackrel{\text{def}}{=} x(\bar{x}_1, u, t) = A^t \bar{x}_1 + \sum_{k=0}^{t-1} A^{t-k-1} B u(k)$$

Se, in base alle misure delle uscite fatte nei passi da 0 a  $t$ , posso osservare  $\bar{x}_1$ , certamente potrò anche stabilire univocamente  $x_1(t)$ . Nel caso però in cui esista un insieme non banale di indistinguibilità in  $t$  passi, non sarò in grado di distinguere, sulla base delle misure di uscita, lo stato iniziale  $\bar{x}_1$  da uno stato  $\bar{x}_2$  se  $(\bar{x}_2 - \bar{x}_1) = \tilde{x} \in \ker O_t$ . D'altronde, lo stato al passo  $t$  a partire da  $\bar{x}_2$  vale

$$\begin{aligned} x_2(t) \stackrel{\text{def}}{=} x(\bar{x}_2, u, t) &= A^t \bar{x}_2 + \sum_{k=0}^{t-1} A^{t-k-1} B u(k) = \\ &= A^t \tilde{x} + x(\bar{x}_1, u, t) = A^t \tilde{x} + x_1(t) \end{aligned}$$

quindi l'indistinguibilità dello stato iniziale è irrilevante ai fini della determinazione dello stato al tempo  $t$  (l'insieme dei punti indistinguibili nel passato da  $x_1$  in  $t$  passi contiene solo  $x_1$ ) se  $\tilde{x} \in \ker(A^t)$ .

Questo vale in generale per qualsiasi stato iniziale indistinguibile (nel futuro) se e solo se

$$\ker(O)_t \subseteq \ker(A^t)$$

Se questa condizione è verificata, si dice che il sistema è *ricostruibile in  $t$  passi*.

Il sistema si dice *ricostruibile* se è ricostruibile per qualche  $t$ . Per il teorema di Cayley–Hamilton, questo equivale alla condizione  $\ker(O) \subseteq \ker(A^n)$

Naturalmente, la osservabilità implica la ricostruibilità, ma non viceversa. Ad esempio, un sistema con matrice  $A$  nulla è certamente ricostruibile (lo stato al passo  $n$  essendo certamente 0 a meno della evoluzione forzata che è nota) mentre non è osservabile a meno che vi siano almeno tante uscite quante stati e  $\text{rank}(C) = n$ . Ricostruibilità e osservabilità nei sistemi LTITD sono sinonimi se  $A$  è nonsingolare.

Nei sistemi LTITC, l'insieme ricostruibile in tempo  $t$  è definito in modo analogo. Per la invertibilità di  $e^{At}$ , comunque, nei sistemi tempo-continui i concetti di ricostruibilità e osservabilità sono coincidenti.

### 7.1.4 Cambiamenti di Coordinate

Le proprietà di osservabilità e ricostruibilità non sono alterate da cambiamenti di coordinate (sono proprietà *strutturali*). Si consideri infatti il cambiamento di coordinate  $x = Tz$ , e il sistema

$$\begin{aligned} \mathbb{D}z &= T^{-1}ATz + T^{-1}Bu \\ y &= CTz + Du, \end{aligned}$$

per il quale si ha

$$\hat{O} = \begin{bmatrix} CT \\ CTT^{-1}AT \\ \vdots \\ CTT^{-1}A^{n-1}T \end{bmatrix} = OT$$

che ha lo stesso spazio nullo di  $O$ , descritto nella nuova base  $T$ . Per la ricostruibilità, basta poi osservare che anche  $(T^{-1}AT)^t = T^{-1}A^tT$ .

Date due rappresentazioni in coordinate diverse dello stesso sistema osservabile, e note le matrici di osservabilità nei due casi, è possibile trovare la matrice che trasforma la prima nella seconda. Infatti avendosi  $\hat{O} = OT$ , si ha  $O^T\hat{O} = O^TOT$ , da cui (essendo  $O$  a pieno rango colonne)  $T = (O^TO)^{-1}O^T\hat{O}$ ; nel caso SISO,  $O$  e  $\hat{O}$  sono quadrate e invertibili, per cui si ha semplicemente

$$T = O^{-1}\hat{O}$$

## 7.2 Stima ottima

Torniamo a considerare il problema di stimare lo stato iniziale  $\bar{x}$  di un sistema conoscendone esattamente il modello e gli ingressi nell'intervallo  $[0, t]$ , oltretutto le uscite nello stesso intervallo. Nel caso LTITD la conoscenza esatta del valore delle uscite su  $n$  campioni determina esattamente lo stato: se il

numero di misure  $N$  è maggiore, se ne possono in linea di principio trascurare  $N - n$ . Nel caso LTITC ci troviamo davanti ad una serie continua di misure su  $[0, t]$ : anche in questo caso è concepibile utilizzare solo il numero strettamente necessario di misure prese ad istanti discreti nell'intervallo, trascurando le altre infinite misure disponibili che non possono che essere linearmente dipendenti da quelle considerate.

Naturalmente questo approccio alla stima dello stato è molto riduttivo, e non ci dice nulla né sul come scegliere le misure da utilizzare, né sul perché si debbano scartare misure che comunque contengono informazione sul sistema. Per una migliore comprensione del problema, è necessario considerare che la conoscenza delle uscite ad un dato istante non può che essere pensata, nella grande maggioranza delle applicazioni, come affetta da errori di misura. Questi ultimi possono essere introdotti nel modello del sistema aggiungendo un termine non noto di errore  $\delta y$ , cioè

$$\begin{aligned} \mathbb{D}x(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx + Du + \delta y(t) \end{aligned}$$

Non si faranno in questa sede considerazioni sulla caratterizzazione del termine di errore di misura, che potrebbe essere fatta in termini probabilistici (media, varianza etc.) o deterministici (massimo valore dell'errore nel peggior caso), lasciandole a corsi specialistici. Ci limiteremo qui a supporre che  $\delta y$  sia piccolo rispetto alle misure  $y$ .

### 7.2.1 Stima ottima LTITD

Considerando la funzione di uscita in dipendenza dal punto iniziale, si ha per un sistema LTITD

$$y(\bar{x}, u(\cdot), \tau) = CA^\tau \bar{x} + y_f(\tau) + \delta y(\tau)$$

che rappresenta, ad ogni istante  $\tau$ , un sistema di  $p$  equazioni lineari nelle  $n$  incognite  $\bar{x}$ . Il termine forzato  $y_f(\tau)$  è noto se si suppone noto l'ingresso ed il modello: pertanto possiamo pensare di inglobarlo nelle misure, e lo trascureremo d'ora innanzi. L'insieme delle misure su un intervallo  $[0, t]$  può dunque essere scritto

$$Y = O_t \bar{x} + \delta Y.$$

Essendo il vettore dei termini di rumore  $dY \in \mathbb{R}^{pt}$  ignoto, la stima dello stato deve essere fatta cercando una soluzione al sistema di  $pt$  equazioni lineari in  $n$  incognite

$$Y = O_t \bar{x},$$

il quale, assumendo di avere misure sufficienti a rendere determinato il problema, quindi  $pt > n$ , risulterà inconsistente (non esisterà cioè alcuna soluzione esatta). Avrà senso quindi porsi il problema di trovare la stima migliore di  $\bar{x}$  nel senso di minimizzare una norma degli errori residui, cioè

$$\hat{\bar{x}} = \arg \min_{\bar{x}} \|Y - O_t \bar{x}\|$$

Scegliendo in particolare la norma due pesata, o meglio il suo quadrato, si ottiene un problema di minimi quadrati

$$\bar{x}_{LS} = \arg \min_{\bar{x}} (Y - O_t \bar{x})^T W_y (Y - O_t \bar{x})$$

che è risolto, derivando la funzione da minimizzare rispetto a  $\bar{x}$  e uguagliando a zero la derivata

$$2(Y - O_t \bar{x})^T W_y O_t = 0$$

da

$$\hat{\bar{x}} = (O_t^T W_y O_t)^{-1} O_t^T W_y Y$$

Il significato che può essere dato alla matrice di pesi  $W_y$  è quello di affidabilità delle misure (per un sistema SISO, l'elemento diagonale  $i$ -esimo è tanto maggiore quanto maggiore è l'affidabilità della misura al passo  $i$ -esimo); questo concetto si formalizza meglio, in presenza di una caratterizzazione statistica degli errori di misura, con la inversa della covarianza degli stessi. Altra importante funzione di  $W_y$  è quella di normalizzare le dimensioni fisiche delle equazioni, e di rendere quindi la soluzione invariante al variare dei sistemi di riferimento e di unità di misura.

### 7.2.2 Stima ottima LTITC

Nel caso LTITC, si procede in modo analogo a scrivere una equazione di misura (in cui si tenga già conto della risposta forzata)  $y(\tau) = Ce^{A\tau} \bar{x} + \delta y(\tau)$ , in ognuno degli (infiniti) istanti dell'intervallo continuo  $[0, t]$ . Ci troviamo quindi anche qui di fronte ad un sistema di equazioni inconsistente (infinite equazioni in  $n$  incognite con errori), e al problema di stimare

$$\hat{\bar{x}} = \arg \min_{\bar{x}} \|y(t) - Ce^{At} \bar{x}\|$$

dove la norma della funzione residuo è da intendersi come una norma su uno spazio di funzioni definite su  $[0, t]$ .

Considerando in particolare la norma due pesata, o meglio il suo quadrato, si ha

$$\hat{\bar{x}} = \arg \min_{\bar{x}} \int_0^t (y(\tau) - Ce^{A\tau}\bar{x})^T W_y(\tau) (y(\tau) - Ce^{A\tau}\bar{x}) d\tau$$

e, ancora ponendo uguale a zero la derivata rispetto a  $\bar{x}$ , si ottiene

$$\int_0^t e^{A^T\tau} C^T W_y(\tau) y(\tau) d\tau = \int_0^t e^{A^T\tau} C^T W_y(\tau) C e^{A\tau} \bar{x} d\tau \stackrel{def}{=} \mathcal{G}_{Ot} \bar{x}$$

Se il sistema è osservabile, la matrice di integrali che moltiplica  $\bar{x}$  nel termine a destra (detta *Gramiano di Osservabilità*) è invertibile. Sappiamo infatti che se il sistema è osservabile, è osservabile per qualsiasi  $t$ : se quindi la matrice è invertibile, lo deve essere per qualsiasi intervallo di integrazione. Inoltre, dal fatto che il Gramiano è perlomeno semi-definito positivo (integrale di prodotti di matrici una trasposta dell'altra, con  $W_y$  definita positiva), e dal consueto sviluppo dell'esponenziale di matrice, segue che il Gramiano è non-invertibile se e solo se esiste un vettore  $\bar{x}$  che annulla tutti i prodotti del tipo  $C\bar{x}$ ,  $CA\bar{x}$ ,  $CA^2\bar{x}$ , ..., quindi se e solo se il sistema è non-osservabile.

Per un sistema osservabile, si ha dunque

$$\hat{\bar{x}} = \mathcal{G}_{Ot}^{-1} \int_0^t e^{A\tau} C^T W_y y(\tau) d\tau$$

La matrice  $p \times p$   $W_y(\tau)$ , eventualmente funzione del tempo, ha ancora il significato di pesare la affidabilità delle  $p$  misure prese all'istante  $\tau$  tra di loro, e rispetto a quelle prese in altri istanti.

### 7.3 Dualità

Come si è potuto osservare, molte delle considerazioni svolte con riguardo alle proprietà di osservabilità di sistemi sono in stretta relazione con quelle fatte per le proprietà di raggiungibilità. In effetti questa "simmetria" di trattamento è formalizzabile nel concetto di *dualità* di sistemi. Dato il sistema LTI

$$\Sigma : \begin{cases} \mathbb{D}x &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du, \end{cases}$$

si definisce come suo *sistema duale* il sistema

$$\Sigma' : \begin{cases} \mathbb{D}x &= A^T x + C^T u \\ y &= B^T x + Du \end{cases}$$



Ovviamente, il duale del duale è il sistema stesso, detto talvolta *primale*:  $(\Sigma')' = \Sigma$ .

Per le matrici di raggiungibilità e osservabilità tra sistemi duali valgono le relazioni

$$\begin{aligned} R^T &= O' \\ O^T &= R'. \end{aligned}$$

Le proprietà (nonché gli algoritmi) studiati a riguardo della raggiungibilità di un sistema possono quindi dare luogo ad analoghi per la osservabilità, se applicate al sistema duale.

## 7.4 Osservabilità di sistemi non LTI

Come è logico attendersi, l'analisi della osservabilità per sistemi tempo-varianti e nonlineari in generale è più complessa che nei casi LTI. Osserviamo solamente che vale il seguente

**Teorema.** Se per il sistema  $\dot{x} = f(x, u)$  con uscita  $y = h(x)$ , il sistema linearizzato approssimato attorno a  $\bar{x}, \bar{u}$  ( $f(\bar{x}, \bar{u}) = 0$ ),  $\dot{z} = Az + Bu$ ,  $\tilde{y} = Cz$  è osservabile, allora l'insieme indistinguibile da  $\bar{x}$  contiene, in un intorno di  $\bar{x}$ , il solo punto  $\bar{x}$ .

Quindi, la osservabilità (globale) del linearizzato approssimato implica la osservabilità (locale) del sistema effettivo. Questa condizione è solo sufficiente: ad esempio, il sistema che rappresenta la localizzazione di un veicolo su ruote mediante triangolazione di due traguardi ottici in posizione  $(0, 0)$  e  $(0, d)$ , che si scrive

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} v \cos \theta \\ v \sin \theta \\ w \end{bmatrix} \\ y_1 &= \pi - \theta + \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \\ y_2 &= \pi - \theta + \arctan\left(\frac{y-d}{x}\right) \end{aligned}$$

ha un linearizzato (in un equilibrio qualsiasi) con  $A = 0$  e  $C \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$ , quindi non è osservabile. Comunque, il vero sistema è certamente osservabile.

## 7.5 Forma Standard di Osservabilità

Il sottospazio di inosservabilità, sia nel caso LTITC che LTITD, ha anch'esso una caratterizzazione geometrica: esso è il più grande sottospazio

$A$ -invariante contenuto in  $\ker(C)$ . È ovvio infatti che

$$\ker \begin{bmatrix} C \\ \hline CA \\ \hline \vdots \\ \hline CA^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

è contenuto in  $\ker(C)$ , e che è  $A$ -invariante. Inoltre, se  $\mathcal{S}$  è contenuto in  $\ker(C)$  ed è  $A$ -invariante, esso è contenuto anche in  $\ker(CA^k)$ ,  $\forall k$ , e quindi  $\mathcal{S} \subseteq \bar{\mathcal{O}}$ .

Sia  $T_{\bar{\mathcal{O}}} \in \mathbb{R}^{n \times \bar{o}}$  una matrice di base per il sottospazio di inosservabilità  $\bar{\mathcal{O}} = \ker(O)$  del sistema LTI

$$\begin{aligned} \mathbb{D}x &= Ax + Bu, \\ y &= Cx + Du \end{aligned}$$

e  $T_O \in \mathbb{R}^{n \times (n-\bar{o})}$  una matrice di base complementare. Nelle nuove coordinate descritte da

$$x = Tz \stackrel{def}{=} [ T_O \mid T_{\bar{\mathcal{O}}} ] \begin{bmatrix} z_O \\ z_{\bar{\mathcal{O}}} \end{bmatrix}$$

il sistema diviene

$$\begin{aligned} \mathbb{D}z &= T^{-1}ATz + T^{-1}B \\ y &= CTz + Du \end{aligned}$$

ovvero

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbb{D}z_O \\ \mathbb{D}z_{\bar{\mathcal{O}}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_O & 0 \\ A_{O\bar{\mathcal{O}}} & A_{\bar{\mathcal{O}}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_O \\ z_{\bar{\mathcal{O}}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_O \\ B_{\bar{\mathcal{O}}} \end{bmatrix} u \\ y &= [ C_O \mid 0 ] \begin{bmatrix} z_O \\ z_{\bar{\mathcal{O}}} \end{bmatrix} + Du \end{aligned}$$

dove  $z_O \in \mathbb{R}^{n-\bar{o}}$  e  $z_{\bar{\mathcal{O}}} \in \mathbb{R}^{\bar{o}}$ .

In queste coordinate, il sistema è dunque riscritto nella forma

$$\begin{aligned} \mathbb{D}z_O &= A_O z_O + B_O u \\ \mathbb{D}z_{\bar{\mathcal{O}}} &= A_{O\bar{\mathcal{O}}} z_O + A_{\bar{\mathcal{O}}} z_{\bar{\mathcal{O}}} + B_{\bar{\mathcal{O}}} u \\ y &= C_O z_O + Du \end{aligned} \tag{7.3}$$

cioè scomposto in due sottosistemi, dei quali il secondo è completamente inosservabile: infatti, lo stato  $z_{\bar{\mathcal{O}}}$  non influenza l'uscita né direttamente, né attraverso lo stato  $z_O$  (il contributo di  $z_O$  alla evoluzione del secondo sottosistema si può guardare come un ulteriore ingresso, che mostreremo ora essere noto).

Per quanto riguarda il sottosistema con stato  $z_O$  e matrici  $(A_O, B_O, C_O, D)$ , esso è completamente osservabile: infatti, la matrice di osservabilità dell'intero sistema nelle nuove coordinate è

$$O' = \left[ \begin{array}{c|c} C_O & 0 \\ \hline C_O A_O & 0 \\ \hline \vdots & \vdots \\ \hline C_O A_O^{n-1} & 0 \end{array} \right] = OT$$

quindi, avendo  $O'$  rango  $n - \bar{o}$  come  $O$ , le sue prime  $n - \bar{o}$  colonne, le sole non nulle, sono indipendenti.

La forma (7.3) viene detta *forma standard di osservabilità* del sistema. Il sottosistema  $(A_O, B_O, C_O, D)$  è detto *sottosistema osservabile*; il sottosistema  $(A_{\bar{O}}, B_{\bar{O}}, C_{\bar{O}} = 0, D)$  è detto *sottosistema non osservabile*.

La scelta delle matrici di base  $T_{\bar{O}}$  e complementare  $T_O$  è arbitraria: qualsiasi altra scelta porterebbe ad una forma analoga, con blocchi diagonali diversi ma simili (algebricamente equivalenti) a quelli ottenuti in altra base. Gli autovalori di  $A_{\bar{O}}$  e quelli di  $A_O$  sono quindi invarianti in numero e in posizione con i cambiamenti di coordinate, e sono quindi proprietà strutturali del sistema. I primi vengono detti *autovalori interni al sottospazio di inosservabilità*, i secondi *esterni*.

La parte non osservabile di un sistema non influenza la sua funzione di trasferimento. Infatti,

$$\begin{aligned} G(s) &= C(sI - A)^{-1} B + D = \\ &= [C_O \mid 0] \left[ \begin{array}{c|c} sI_{(n-\bar{o})} - A_O & 0 \\ \hline -A_{O\bar{O}} & sI_{\bar{o}} - A_{\bar{O}} \end{array} \right]^{-1} \begin{bmatrix} B_O \\ B_{\bar{O}} \end{bmatrix} + D = \\ &= [C_O \mid 0] \left[ \begin{array}{c|c} (sI_{(n-\bar{o})} - A_O)^{-1} & 0 \\ \hline M & (sI_{\bar{o}} - A_{\bar{O}})^{-1} \end{array} \right] \begin{bmatrix} B_O \\ B_{\bar{O}} \end{bmatrix} + D = \\ &= C_O (sI_{n-\bar{o}} - A_O)^{-1} B_O + D \end{aligned}$$

(dove  $M$  indica una matrice il cui calcolo esplicito è superfluo).

Il fatto che la f.d.t di un sistema non dipenda dal sottosistema non osservabile, e che quindi il sottosistema non osservabile non influenzi il rapporto ingresso-uscita, implica che tra i poli della  $G(s)$  non appariranno gli autovalori di  $A_{\bar{O}}$ : ciò significa che questi ultimi vengono sistematicamente cancellati

da zeri coincidenti nella espressione

$$G(s) = \frac{C \operatorname{adj}(sI - A) B}{\det(sI - A)} + D$$

## 7.6 Lemma P.B.H.

La verifica di osservabilità può essere fatta anche ricorrendo al *Lemma P.B.H.* (Popov, Belevitch, Hautus):

**Teorema** Il sistema LTI con matrici  $(A, C)$  è osservabile se e solo se la matrice

$$P_o(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda I - A \\ C \end{bmatrix} \quad (7.4)$$

ha rango pieno per ogni  $\lambda \in \mathbb{C}$ .

*Dimostrazione.* La dimostrazione verte sulla possibilità di trovare un vettore  $q$  tale che  $P_o(\lambda)q = 0$ . Si riconduce direttamente a quella del lemma PBH per la raggiungibilità considerando l'equazione  $q^T P_o^T(\lambda) = 0$ .

Applichiamo il lemma PBH al caso di una coppia  $(A, C)$  con  $A$  in forma di Jordan, con  $p$  miniblocchi:

$$A = \left[ \begin{array}{cccc|ccc} \lambda_1 & 1 & \cdots & 0 & & & \\ 0 & \lambda_1 & \cdots & 0 & & & \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_1 & & & \\ \hline & & & 0 & \ddots & & \\ \hline & & & & & \lambda_p & 1 & \cdots & 0 \\ & & & & & 0 & \lambda_p & \cdots & 0 \\ & & & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ & & & & & & 0 & 0 & \cdots & \lambda_p \end{array} \right];$$

$$C = [ C_{11} \ C_{21} \ \cdots \ C_{m_1,1} \ | \ \cdots \ | \ C_{p,1} \ C_{2,p} \ \cdots \ C_{m_p,p} ]$$

Risulta che, per essere osservabile, le prime colonne per ogni miniblocco corrispondente ad autovalori coincidenti, devono essere linearmente indipendenti. In particolare, per un sistema SISO, è necessario che la molteplicità geometrica di tutti gli autovalori sia pari a uno, e che  $C$  abbia almeno tanti elementi diversi da zero quanti gli autovalori distinti di  $A$ . Un sistema con  $\mu_i$  miniblocchi associati ad un unico autovalore  $\lambda_i$  può essere osservabile solo se ha almeno  $\mu_i$  uscite indipendenti.

## 7.7 Forma canonica di osservazione

Per un sistema SISO con matrici dinamica e di uscita nella particolare forma

$$A_o = \left[ \begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{array} \right];$$

$$C_o = \left[ \begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array} \right]$$

(la forma di  $A_o$  si dice *compagna verticale destra*), la matrice di osservabilità ha la stessa forma della matrice di raggiungibilità della forma canonica di controllo. Infatti

$$O_o = \left[ \begin{array}{c|c|c|c|c} 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \star \\ 0 & 0 & 1 & \star & \star \\ 0 & 1 & -a_{n-1} & \star & \star \\ 1 & -a_{n-1} & -a_{n-2} + a_{n-1}^2 & \star & \star \end{array} \right]$$

quindi è osservabile. Un qualsiasi altro sistema SISO  $(A, B, C, D)$  con matrice di osservabilità  $O$  può essere posto per cambiamento di coordinate in questa forma (canonica di osservazione) se e solo se è completamente osservabile.

La matrice dinamica in forma compagna verticale destra è la trasposta della forma compagna orizzontale inferiore usata nella forma canonica di controllo, così come la matrice  $C_o = B_c^T$ . I coefficienti dell'ultima colonna della forma compagna verticale destra sono quindi i coefficienti del polinomio caratteristico della matrice stessa, ordinati secondo le potenze crescenti di  $s$  dall'alto in basso. Per porre un sistema SISO osservabile in forma canonica di osservazione, basterà dunque

1. Calcolare il polinomio caratteristico di  $A$ ,  $\det(sI - A) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0$ ;

2. costruire la matrice di osservabilità  $O$  e verificarne il rango;
3. costruire  $A_o, C_o$ ;
4. calcolare  $T^{-1} = O_o^{-1}O$ ;
5. trovare  $B_o = T^{-1}B$

Se il sistema è strettamente proprio,  $b_n = 0$  quindi  $D = 0$  e  $B = [b_0 \ b_1 \ \cdots \ b_{n-1}]$ .

Dato un sistema LTI SISO in forma normale, è dunque sempre possibile scrivere un sistema in forma di stato con matrici  $(A_o, B_o, C_o, D_o)$  in forma canonica di osservazione (quindi osservabile) che ha lo stesso rapporto ingresso/uscita.

La funzione di trasferimento per un sistema SISO strettamente proprio in forma canonica di osservazione vale  $G(s) = C_o(sI - A_o)^{-1}B_o$ . Si verifica facilmente che

$$G(s) = \frac{b_m s^m + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

In altre parole, nella forma canonica di osservazione di un sistema strettamente proprio si trovano i coefficienti del polinomio caratteristico nell'ultima colonna della matrice dinamica  $A_o$ , e i coefficienti del polinomio degli zeri nella matrice degli ingressi  $B_o$ .

Per un sistema proprio non strettamente, operando una opportuna divisione tra i polinomi a numeratore e denominatore, cioè scrivendo  $G(s) = G'(s) + b_n$  con  $G'(s)$  strettamente proprio, si hanno in  $B_o$  i primi  $n$  coefficienti del polinomio degli zeri di  $G'(s)$ , ed in  $D_o$  il coefficiente del termine di grado  $n$ ,  $b_n$ .

## 7.8 Iniezione delle Uscite

L'operazione *duale* della reazione degli stati sugli ingressi è una operazione mediante la quale l'uscita di un sistema viene riportata a influenzare direttamente l'evoluzione degli stati, e si dice *iniezione delle uscite*. Anche se questa operazione può apparire fisicamente impossibile in questi termini, ne troveremo più avanti una spiegazione ed una specifica utilità. L'iniezione lineare delle uscite sugli stati avviene attraverso una matrice  $L \in \mathbb{R}^{n \times p}$ :

$$\begin{aligned} Dx &= Ax + Bu + Ly = (A + LC)x + (B + LD)u \\ y &= Cx + Du \end{aligned}$$

Così come la retroazione degli stati non altera la raggiungibilità di un sistema, la iniezione delle uscite non ne altera la osservabilità (la dimostrazione è analoga, e può essere fatta ad esempio per dualità).

Come conseguenza, una retroazione delle uscite, ovvero la particolare scelta  $u(x) = KLy$ , non altera né raggiungibilità né osservabilità di un sistema, essendo essa equivalente sia ad una particolare retroazione dello stato  $u = \bar{K}x$ , con  $\bar{K} = KLC$ , che ad una particolare iniezione delle uscite  $\bar{L}y$ , con  $\bar{L} = BKL$ <sup>1</sup>.

È infine evidente, ricorrendo ancora alla dualità, che in un sistema completamente osservabile, una scelta opportuna della matrice  $L$  può allocare gli autovalori della matrice  $A + LC$  dove desiderato.

---

<sup>1</sup>Di questo risultato è possibile dare una interpretazione in termini di luogo delle radici per la f.d.t. del sistema con retroazione proporzionale dell'uscita e guadagno  $k = KL \in \mathbb{R}$ : i poli sono tutti spostati dalla reazione lungo i rami del luogo, ma non raggiungono gli zeri per nessun  $k$  finito





# Capitolo 8

## Realizzazioni e Connessioni di Sistemi

### 8.1 Scomposizione canonica (o di Kalman)

Si è visto in precedenza che un sistema LTI può essere scritto in due forme standard, che riflettono le sue proprietà di raggiungibilità e osservabilità. Combinando questi due risultati, si giunge ad una forma più articolata, che li contiene entrambe.

Siano dunque per il sistema LTI con matrici  $(A, B, C, D)$  rispettivamente  $\mathcal{R}$  e  $\bar{\mathcal{O}}$  i sottospazi di raggiungibilità e inosservabilità. Essendo entrambe  $A$ -invarianti, lo sarà anche la loro intersezione  $\mathcal{R} \cap \bar{\mathcal{O}}$ .

**Esempio:** Siano  $T_{\mathcal{R}}$  e  $T_{\bar{\mathcal{O}}}$  due matrici di base rispettivamente per  $\mathcal{R}$  e  $\bar{\mathcal{O}}$ . Una base  $T_{\mathcal{R}\bar{\mathcal{O}}}$  per la intersezione si trova risolvendo l'equazione  $T_{\mathcal{R}}\xi_1 = T_{\bar{\mathcal{O}}}\xi_2$ . Se

$$N = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix}$$

è una base di  $\ker [T_{\mathcal{R}}|T_{\bar{\mathcal{O}}}]$ , allora  $T_{\mathcal{R}\bar{\mathcal{O}}} = T_{\mathcal{R}}N_1 = -T_{\bar{\mathcal{O}}}N_2$  è una base del sottospazio cercato. Un'algoritmo è realizzato ad esempio in linguaggio Matlab come segue:

```
function [C]=intersect(A,B);
% C: Basis Matrix for Intersection
%   of Im(A) with Im(B)
[ra,ca]=size(A);
[rb,cb]=size(B);
C=null([A B]);
if length(C) > 0
```

```

    C=orth(A*C(1:ca,:));
else
    C=[];
end

```

Le funzioni Matlab `null.m` e `orth.m` sono usate per calcolare rispettivamente lo spazio nullo di una matrice, e per operare una ortogonalizzazione di Gram-Schmidt sulle colonne di una matrice (l'uso della ortogonalizzazione non è necessario, ma migliora il condizionamento numerico della base ottenuta). ◇

Si consideri inoltre una matrice di base  $T_{RO}$  complementare a  $T_{R\bar{O}}$  per  $\mathcal{R}$ .

**Esempio:** Anche questa operazione si può effettuare con un semplice algoritmo, espresso in linguaggio Matlab come segue:

```

function [D] = base_compl(A,B)
% D : base complementare a Im(B) per Im(A)
D = orth([B A]);
[rd,cd] = size(D);
D = D(:,rank(B)+1:cd);

```

---

 ◇

Si proceda allo stesso modo a costruire una matrice di base  $T_{\bar{R}\bar{O}}$  complementare a  $T_{R\bar{O}}$  per  $\bar{\mathcal{O}}$ . Infine, si costruisca una matrice di base  $T_{\bar{R}O}$  complementare a  $[T_{RO}|T_{R\bar{O}}|T_{\bar{R}\bar{O}}]$  per l'intero spazio  $\mathbb{R}^n$ .

La matrice  $[T_{RO}|T_{R\bar{O}}|T_{\bar{R}O}|T_{\bar{R}\bar{O}}]$  è quadrata e invertibile. Se usata per cambiare le coordinate del sistema, si ottiene

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{bmatrix} A_{RO} & 0 & A_{\bar{R}O,RO} & 0 \\ A_{RO,R\bar{O}} & A_{R\bar{O}} & A_{\bar{R}O,R\bar{O}} & A_{\bar{R}\bar{O},R\bar{O}} \\ 0 & 0 & A_{\bar{R},O} & 0 \\ 0 & 0 & A_{\bar{R}O,\bar{R}\bar{O}} & A_{\bar{R}\bar{O}} \end{bmatrix}; & B &= \begin{bmatrix} B_{RO} \\ B_{R\bar{O}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \\
 C &= \begin{bmatrix} C_{RO} & 0 & C_{\bar{R}O} & 0 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Dalla interpretazione di questa forma, risulta evidente che solo la parte raggiungibile e osservabile del sistema partecipa al rapporto ingresso-uscita. I poli di  $G(s)$  saranno pertanto tutti e soli gli autovalori di  $A_{RO}$ :

$$G(s) = C (sI - A)^{-1} B + D = C_{RO} (sI - A_{RO})^{-1} B_{RO} + D$$

## 8.2 Realizzazione di sistemi

Il problema della trasformazione di un modello ingresso-uscita di un sistema in forma di stato è stato già affrontato alcune volte in passato, in relazione alla trasformazione delle forme normali in forma di stato. Il problema è importante perchè, nonostante le tecniche di regolazione, di identificazione, e di controllo ottimo siano risolte nel modo più semplice nello spazio di stato, spesso il modello del sistema a nostra disposizione è dato da una relazione ingresso-uscita. Inoltre, la questione è rilevante ai fini della scrittura di algoritmi numerici e programmi che implementino su un computer date f.d.t. ottenute ad esempio come risultato di un progetto classico di controllore, algoritmi che usano naturalmente la scrittura nello spazio di stato. A questo problema si dà il nome di problema della realizzazione.

Si è visto in particolare come per i sistemi SISO LTI sia possibile facilmente, a partire da una funzione di trasferimento, ottenere due realizzazioni che garantiscono rispettivamente la raggiungibilità e la osservabilità. Si è anche già visto che, dato un sistema nello spazio di stato, solo gli autovalori del sottosistema raggiungibile ed osservabile sono poli della f.d.t. corrispondente.

Ci chiediamo ora quale sia il più piccolo numero di stati che possa essere utilizzato per realizzare una data f.d.t. SISO. Iniziamo dal considerare che la f.d.t. che esprime un dato rapporto ingresso/uscita non è unica. Infatti, si consideri ad esempio il sistema in forma normale

$$y(t+2) + 2y(t+1) + y(t) = u(t+1) + u(t)$$

con condizioni iniziali  $y(0) = y(1) = 0$ , cui corrisponde una rappresentazione nell'operatore  $z$  del tipo

$$(z^2 + 2z + 1)Y(z) = (z + 1)U(z)$$

ovvero una f.d.t.  $G(z) = \frac{z+1}{(z+1)^2}$ .

Confrontando il precedente al sistema

$$y(t+1) + y(t) = u(t)$$

con condizioni iniziali  $y(0) = 0$ , si ottiene che le evoluzioni dei due sistemi sono coincidenti per qualsiasi sequenza di ingresso, quindi sono equivalenti.

Al secondo sistema corrisponde la f.d.t.  $G(z) = \frac{1}{z+1}$ , eguale alla precedente eccetto che per la semplificazione tra i fattori comuni a numeratore e denominatore.

Dato un rapporto ingresso–uscita LTI, esiste una e una sola rappresentazione in termini di f.d.t. che abbia grado minimo e coefficiente unitario della potenza più alta della variabile complessa (che indicheremo con  $p$ ) a denominatore. Una tale f.d.t., che può essere ottenuta semplicemente mediante divisione di polinomi, si dirà ridotta ai minimi termini o *coprima*.

Diremo che un sistema LTI descritto dalle sue matrici  $(A, B, C, D)$  è una realizzazione della m.d.t.  $G(p)$  se vale

$$G(p) = C(pI - A)^{-1}B + D.$$

Una realizzazione  $(A, B, C, D)$  nello spazio di stato si dice *minima* se qualsiasi altra realizzazione  $(A', B', C', D')$  che dà luogo alla stessa f.d.t. coprima, ha numero di stati uguale o superiore. Una realizzazione è minima solo se è completamente raggiungibile ed osservabile. Se così non fosse, infatti, il sistema

$$(A_{RO}, B_{RO}, C_{RO}, D),$$

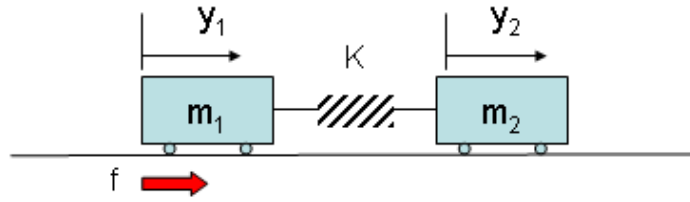
che realizza la stessa f.d.t. a meno di cancellazioni polo–zero, avrebbe numero di stati inferiore.

Una realizzazione di una data f.d.t. non può avere dimensione inferiore al numero di poli della f.d.t. stessa (si ricordi che i poli sono un sottoinsieme degli autovalori). Pertanto, una realizzazione in forma canonica di controllo di un sistema SISO descritto da una f.d.t. coprima, è minimo, quindi anche osservabile. Vale il viceversa per una realizzazione in forma canonica di osservazione.

Se si applica la costruzione delle forme canoniche ad una f.d.t. non coprima, si otterranno invece delle realizzazioni raggiungibili ma non osservabili, ovvero osservabili ma non raggiungibili, quindi non minime.

Ogni realizzazione minima di una f.d.t. è algebricamente equivalente ad ogni altra, cioè esiste una matrice di trasformazione di coordinate che le lega. Le formule esplicite per il calcolo di tale cambiamento di base utilizzano le matrici di raggiungibilità o osservabilità dei due sistemi, e sono già state viste in passato.

**Esempio:** Facendo nuovamente riferimento all'esempio in figura, già visto nel capitolo sulla raggiungibilità, discutiamone adesso la osservabilità e le realizzazioni minime.



Per l'uscita  $y_1$  si ha

$$O_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -k/m_1 & k/m_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k/m_1 & k/m_1 \end{bmatrix}, \det O_1 = -\frac{k^2}{m_1^2},$$

mentre per  $y_2$  vale

$$O_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ k/m_2 & -k/m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k/m_2 & -k/m_2 \end{bmatrix}, \det O_2 = -\frac{k^2}{m_2^2}.$$

È dunque facile osservare che, oltre alla completa raggiungibilità vista in precedenza, si ha completa osservabilità da entrambe le uscite se  $k \neq 0$ . In altri termini, non esiste alcun moto di una delle masse che possa lasciare costantemente indifferente la posizione dell'altra massa.

Se  $k = 0$ , il sottospazio inosservabile dalla prima uscita consiste invece nelle posizioni e velocità della seconda massa, mentre quello inosservabile dalla seconda uscita consiste nella posizione e velocità della prima (il risultato è fisicamente piuttosto ovvio in questo semplice caso).

Guardando nuovamente le trasformate, ricordiamo che nel caso in cui la misura disponibile sia la posizione  $y_1$  della massa  $m_1$  la funzione di trasferimento è

$$Y_1(s) = \frac{m_2 s^2 + k}{s^2 [m_1 m_2 s^2 + (m_1 + m_2)k]} F(s),$$

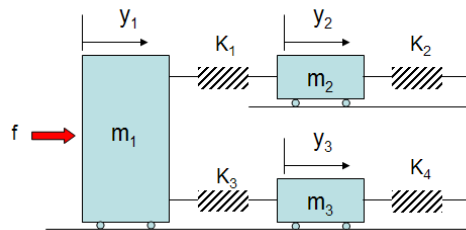
che per  $k = 0$  ha due cancellazioni, riducendosi alla f.d.t. coprima  $Y_1(s) = \frac{1}{m_1 s^2} F(s)$ . Quindi i due stati di una realizzazione minima sono sia raggiungibili che osservabili. Se si sceglie una realizzazione in forma canonica di controllo, si ottiene la dinamica della massa  $m_1$  con stati  $y_1$  e  $\dot{y}_1$ . Gli stati  $y_2$  e  $\dot{y}_2$  sono invece sia non raggiungibili che non osservabili.

Quando invece l'uscita è  $y_2$ , la f.d.t. è

$$Y_2(s) = \frac{k}{s^2 [m_1 m_2 s^2 + (m_1 + m_2)k]} F(s),$$

che per  $k = 0$  si annulla completamente. Questa è la conseguenza del fatto che gli stati  $y_1$  e  $\dot{y}_1$  sono raggiungibili ma non osservabili, mentre gli stati  $y_2$  e  $\dot{y}_2$  sono osservabili ma non raggiungibili. Non vi è quindi alcuna connessione tra l'ingresso e l'uscita, il ché è rappresentato da una f.d.t. nulla. —  $\diamond$

**Esempio:** Si riprenda adesso in considerazione l'esempio di figura, anch'esso già visto nel capitolo sulla raggiungibilità.



Ricordiamo per convenienza qui le equazioni del moto del sistema:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{y}_1 + k_1(y_1 - y_2) + k_3(y_1 - y_3) &= f \\ m_2 \ddot{y}_2 + k_1(y_2 - y_1) + k_2 y_2 &= 0 \\ m_3 \ddot{y}_3 + k_3(y_3 - y_1) + k_4 y_3 &= 0 \end{aligned}$$

Applicando la trasformata di Laplace alle equazioni appena scritte, e ponendo  $p_1(s) = m_1 s^2 + k_1 + k_3$ ,  $p_2(s) = m_2 s^2 + k_1 + k_2$ ,  $p_3(s) = m_3 s^2 + k_3 + k_4$ , si ottengono le relazioni:

$$\begin{aligned} p_1(s)Y_1(s) - k_1 Y_2(s) - k_3 Y_3(s) &= F(s) \\ Y_2(s) &= \frac{k_1}{p_2(s)} Y_1(s) \\ Y_3(s) &= \frac{k_3}{p_3(s)} Y_1(s), \end{aligned}$$

da cui

$$\left( p_1(s) - \frac{k_1^2}{p_2(s)} - \frac{k_3^2}{p_3(s)} \right) Y_1(s) = F(s),$$

e infine

$$\frac{Y_1(s)}{F(s)} = \frac{p_2(s)p_3(s)}{p_1(s)p_2(s)p_3(s) - k_1^2 p_3(s) - k_3^2 p_2(s)}.$$

Essendo il denominatore della f.d.t. considerata di ordine 6 (ogni polinomio  $p_i(s)$  è del secondo ordine), il sistema di tre masse è completamente raggiungibile ed osservabile se e solo se non vi sono cancellazioni polo/zero.

Si può avere una cancellazione se  $k_1 = 0$ : in tal caso infatti, le radici (immaginarie) di  $p_2(s) = 0$  sono comuni a numeratore e denominatore. Il modo

oscillante corrispondente è quindi non osservabile, oppure non raggiungibile, o entrambe. Dalla osservazione fisica del sistema, si capisce facilmente che è il terzo il caso che si applica al nostro esempio: infatti il moto della massa  $m_2$  non è influenzato dall'ingresso  $f$ , né influenza l'uscita  $y_1$  quando  $k_1 = 0$ .

Analoghe conclusioni si raggiungono nel caso  $k_3 = 0$ , per quel che riguarda la irraggiungibilità e la inosservabilità dei modi propri della massa  $m_2$ .

Un ultimo caso, meno banale, di cancellazione si può avere con  $k_1$  e  $k_2$  non nulle, quando  $p_2(s)$  e  $p_3(s)$  hanno radici comuni, cioè quando

$$\frac{k_1 + k_2}{m_2} = \frac{k_3 + k_4}{m_3}.$$

Ponendo ad esempio  $p_2(s) = p(s)$  e  $p_3(s) = \alpha p(s)$ , si ha

$$\frac{Y_1(s)}{F(s)} = \frac{\alpha p^2(s)}{p_1(s)p^2(s) - (\alpha k_1^2 + k_3^2)p(s)} = \frac{\alpha p(s)}{p_1(s)p(s) - (\alpha k_1^2 + k_3^2)}$$

In questo caso, la cancellazione è causata dalla uguaglianza dei rapporti tra coefficienti elastici e inerziali dei due sottosistemi oscillanti collegati alla prima massa. La raggiungibilità del sistema è compromessa, in quanto non è possibile far raggiungere al sistema complessivo stati arbitrari a partire da condizioni iniziali arbitrarie: i due sottosistemi interni, se inizializzati con posizioni e velocità uguali, non potranno evidentemente essere mai portati ad avere stati diversi in quanto eccitati dallo stesso moto di  $m_1$ .

Anche la osservabilità è persa: infatti, una oscillazione di pari ampiezza e frequenza delle due masse, ma in opposizione di fase, darebbe effetto risultante nullo sulla massa  $m_1$ , quindi sulla misura.

È naturalmente possibile trovare identici risultati studiando il sistema nello spazio di stato, con le matrici già incontrate

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_1+k_3}{m_1} & \frac{k_1}{m_1} & \frac{k_3}{m_1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{k_1}{m_2} & -\frac{k_1+k_2}{m_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{k_3}{m_3} & 0 & -\frac{k_3+k_4}{m_3} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad B = \frac{1}{m_1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = [ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 ].$$

La matrice di osservabilità è data da

$$O = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k_1+k_3}{m_1} & \frac{k_1}{m_2} & \frac{k_3}{m_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{k_1+k_3}{m_1} & \frac{k_1}{m_2} & \frac{k_3}{m_3} \\ a & b & c & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

con

$$\begin{aligned} a &= \frac{(k_1+k_3)^2}{m_1^2} + \frac{k_1^2}{m_1 m_2} + \frac{k_3^2}{m_1 m_3}, \\ b &= -\frac{k_1}{m_2} \left( \frac{k_1+k_3}{m_1} + \frac{k_1+k_2}{m_2} \right), \\ c &= -\frac{k_3}{m_3} \left( \frac{k_1+k_3}{m_1} + \frac{k_3+k_4}{m_3} \right). \end{aligned}$$

Mediante scambio di righe o colonne (operazioni che non cambiano il rango di una matrice), si può riscrivere

$$O = \begin{bmatrix} M^T & 0 \\ 0 & M^T \end{bmatrix}$$

con

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{k_1+k_3}{m_1} & a \\ 0 & \frac{k_1}{m_2} & b \\ 0 & \frac{k_3}{m_3} & c \end{bmatrix}.$$

Anche  $O$  (come si è già visto per la matrice di raggiungibilità  $R$ ) perde rango esattamente dove perde rango  $M$ . Sulla base della stessa discussione fatta in precedenza, si ottiene quindi

- se  $k_1 \neq 0$ ,  $k_3 \neq 0$ , e  $\frac{k_1+k_2}{m_2} \neq \frac{k_3+k_4}{m_3}$ , il sistema è completamente controllabile con  $f$  e osservabile da  $y_1$ ;
- se  $k_1 = 0$  e  $k_3 \neq 0$ , oppure se  $k_1 \neq 0$  e  $k_3 = 0$ , il sottosistema non raggiungibile e non osservabile ha dimensione due;
- se  $k_1 \neq 0$ ,  $k_3 \neq 0$ , ma  $\frac{k_1+k_2}{m_2} = \frac{k_3+k_4}{m_3}$ , il sottosistema non raggiungibile e non osservabile ha ancora dimensione due.

---

◇

### 8.3 Effetti di Retroazione dello Stato e Iniezione delle Uscite

Abbiamo visto in precedenza che la retroazione degli stati non altera la raggiungibilità di un sistema, e la iniezione delle uscite non ne altera la osservabilità.

Come corollario, una retroazione delle uscite, ovvero la particolare scelta  $u(x) = Gy$ , non altera né raggiungibilità né osservabilità di un sistema, essendo essa equivalente sia ad una particolare retroazione dello stato  $u =$



$\bar{K}x$ , con  $\bar{K} = GC$ , che ad una particolare iniezione delle uscite  $\bar{G}y$ , con  $\bar{G} = BG^1$ .

Al contrario, la retroazione degli stati può alterare la osservabilità, e la iniezione delle uscite può alterare la raggiungibilità. Si noti in particolare che la retroazione degli stati sposta la posizione degli autovalori interni al sottospazio di raggiungibilità, e quindi anche di quelli tra questi esterni al sottospazio di inosservabilità, cioè quelli che coincidono con i poli della f.d.t. corrispondente. Dalla forma canonica di raggiungibilità applicata al sottosistema raggiungibile e osservabile, in cui i coefficienti del polinomio degli zeri appaiono nella matrice  $C$ , si osserva che la retroazione lascia invariati gli zeri della f.d.t.. È quindi possibile che i poli vengano spostati in modo che uno o più tra loro venga a coincidere con uno o più zeri, dando così luogo ad una cancellazione: in tal caso, il sistema realizzato in forma di controllo non sarebbe più di dimensione minima, il che implica che si sia persa la osservabilità.

In modo analogo, si consideri il (sotto)sistema raggiungibile e osservabile in forma canonica di osservazione  $(A_o, B_o, C_o, D_o)$ , e si proceda ad una iniezione delle uscite sugli stati, cioè

$$\dot{x} = A_o x + B_o u + GC_o x = (A_o + GC_o)x + B_o u$$

Anche in questo caso, gli autovalori di  $A_o$ , cioè i poli della f.d.t. corrispondente, sono spostati ad arbitrio dalla retroazione, mentre gli zeri restano fissi (i coefficienti del polinomio degli zeri sono in  $B_o$ ). Se qualche coppia polo/zero si cancella, la realizzazione non è più minima, nel qual caso la proprietà venuta a mancare non può che essere la raggiungibilità.

## 8.4 Grado Relativo

Si dice *grado relativo* di una f.d.t. SISO la differenza tra il grado del denominatore e quello del numeratore, ovvero tra il numero dei poli ( $n$ ) e quello degli zeri ( $m$ ):

$$G(s) = \frac{b_0 + b_1 s + \cdots + b_m s^m}{a_0 + a_1 s + \cdots + s^n}$$

Per il grado relativo  $n - m = r$  di un sistema proprio vale  $r \geq 0$ ; se strettamente proprio,  $r > 0$ .

---

<sup>1</sup>Di questo risultato è possibile dare una interpretazione in termini di luogo delle radici per la f.d.t. di un sistema SISO con retroazione proporzionale dell'uscita e guadagno  $k = G \in \mathbb{R}$ : i poli sono tutti spostati dalla reazione lungo i rami del luogo, ma non raggiungono gli zeri per nessun  $k$  finito

Il grado relativo ha una diretta interpretazione fisica nei sistemi TD: esso rappresenta il tempo (numero di istanti) dopo il quale si manifesta nella uscita l'effetto dell'ingresso. Si ricordi infatti che (per  $D = 0$ ) vale

$$\begin{aligned} y(0) &= Cx(0) \\ y(1) &= CAx(0) + CBu(0) \\ y(2) &= CA^2x(0) + CABu(0) + CBu(1) \\ &\vdots = \vdots \end{aligned}$$

e si consideri per il sistema una realizzazione in forma canonica di controllo: si osserva che

$$\begin{aligned} [CB \quad CAB \quad CA^2B \quad \dots] &= CR = \\ &= [b_0 \quad \dots \quad b_m \quad 0 \quad \dots \quad 0] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \star \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \star \\ 0 & 1 & -a_{n-1} & \dots & \star \\ 1 & -a_{n-1} & -a_{n-2} + a_{n-1}^2 & \dots & \star \end{bmatrix} \end{aligned}$$

quindi che  $CB = CAB = \dots = CA^{n-m-1}B = 0$ , mentre  $CA^{(n-m)}B = b_m \neq 0$ .

Nel caso TC, il grado relativo rappresenta il numero di volte per il quale si deve derivare l'uscita prima che l'ingresso appaia esplicitamente nella sua espressione. Infatti si ha adesso che (per  $D = 0$ ) vale

$$\begin{aligned} y^{(0)} &= Cx \\ y^{(1)} &= CAx + CBu^{(0)} \\ y^{(2)} &= CA^2x + CABu^{(0)} + CBu^{(1)} \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

## 8.5 Raggiungibilità e Osservabilità di Sistemi Connessi

Si supponga adesso che due sistemi LTI  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$ , alternativamente in tempo continuo o in tempo discreto, siano descritti nel rapporto ingresso-uscita da f.d.t.  $G_1(p) = \frac{n_1(p)}{d_1(p)}$  e  $G_2(p) = \frac{n_2(p)}{d_2(p)}$  in cui tutte le eventuali cancellazioni siano state effettuate, cosicché i polinomi  $n_i(p)$  e  $d_i(p)$  sono primi tra loro

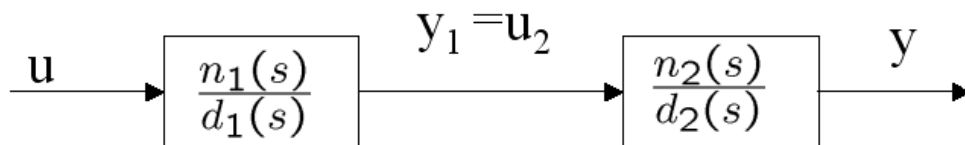


Figura 8.1: Connessione in serie di due sistemi LTI.

per  $i = 1, 2$ . Sia inoltre disponibile per entrambe una realizzazione in forma minima, ovvero

$$\begin{cases} \mathbb{D}x_1 = A_1x_1 + B_1u \\ y_1 = C_1x_1 + D_1u \end{cases}, \quad \begin{cases} \mathbb{D}x_2 = A_2x_2 + B_2u \\ y_2 = C_2x_2 + D_2u \end{cases}. \quad (8.1)$$

Per quanto detto, questi sistemi sono sia raggiungibili che osservabili. Ci chiediamo se tali proprietà possono essere alterate quando i sistemi siano connessi tra loro, in particolare secondo le tre modalità fondamentali della cosiddetta *algebra dei blocchi*, cioè in parallelo, in serie, o in retroazione.

### 8.5.1 Connessione in Serie

Nella connessione in serie l'uscita del primo sistema costituisce l'ingresso del secondo. Ponendo  $u_2 = y_1$ ,  $u = u_1$  e  $y = y_2$  in (8.1), si ha

$$\begin{aligned} \mathbb{D}\bar{x} &= \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ B_2C_1 & A_2 \end{pmatrix} \bar{x} + \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2D_1 \end{pmatrix} u \\ y &= \begin{pmatrix} D_2C_1 & C_2 \end{pmatrix} \bar{x} + D_2D_1u \end{aligned} \quad (8.2)$$

**Proposizione** *Il sistema “serie” (8.2) è raggiungibile se e solo se  $\Sigma_1$  non ha zeri coincidenti con poli di  $\Sigma_2$ ; osservabile se e solo se  $\Sigma_1$  non ha poli coincidenti con zeri di  $\Sigma_2$ .*

Nella rappresentazione con f.d.t. della connessione in serie, si ha

$$G(p) = \frac{n_1(p)}{d_1(p)} \frac{n_2(p)}{d_2(p)} = \frac{n_1(p)n_2(p)}{d_1(p)d_2(p)}$$

si può avere quindi una cancellazione se e solo se  $n_1(p)$  e  $d_2(p)$  hanno una radice in comune, ovvero se la hanno  $n_2(p)$  e  $d_1(p)$ . In entrambe i casi, la f.d.t. risultante può essere semplificata: pertanto, una rappresentazione in forma di stato che usi tutti gli stati di  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$ , non risulta più minima.

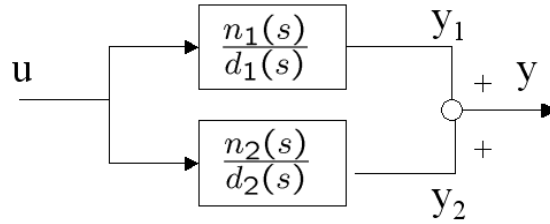


Figura 8.2: Connessione in parallelo di due sistemi LTI.

Il fatto che nel primo caso si perda la raggiungibilità dell'autovalore corrispondente al polo cancellato in  $d_2(p)$  è piuttosto intuitivo: infatti, il rapporto tra gli stati del sistema  $\Sigma_2$  e l'uscita non viene alterato in alcun modo dalla connessione, e pertanto l'autovalore corrispondente al polo cancellato non può aver perso la sua osservabilità.

Viceversa, che nel secondo caso si perda la osservabilità dell'autovalore corrispondente al polo cancellato in  $d_1(p)$  discende dal fatto che il rapporto tra gli ingressi e gli stati del sistema  $\Sigma_1$  non viene alterato dalla connessione, e pertanto l'autovalore corrispondente al polo cancellato non può aver perso la sua raggiungibilità.

### 8.5.2 Connessione in Parallelo

Possiamo facilmente costruire una realizzazione del sistema risultante dalla connessione in parallelo dei sistemi  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$ , costruendo un nuovo stato aggregato  $\bar{x}^T = (x_1^T, x_2^T)$  e ponendo  $u_1 = u_2 = u$  e  $y = y_1 + y_2$  in (8.1):

$$\begin{aligned} \mathbb{D}\bar{x} &= \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \bar{x} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \bar{x} + (D_1 + D_2)u \end{aligned} \quad (8.3)$$

**Proposizione** *Il sistema "parallelo" (8.3) è raggiungibile e osservabile se e soltanto se  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$  non hanno modi comuni.*

Consideriamo la rappresentazione con f.d.t. della connessione. Si ha

$$G(p) = \frac{n_1(p)}{d_1(p)} + \frac{n_2(p)}{d_2(p)} = \frac{n_1(p)d_2(p) + n_2(p)d_1(p)}{d_1(p)d_2(p)}$$

si può avere quindi una cancellazione se e solo se  $d_1(p)$  e  $d_2(p)$  hanno una radice in comune, cioè se i due sistemi hanno un polo in comune. In questo

## 8.5. RAGGIUNGIBILITÀ E OSSERVABILITÀ DI SISTEMI CONNESSI 221

caso, la f.d.t. risultante può essere semplificata: pertanto, la rappresentazione in forma di stato sopra ottenuta, che usa tutti gli stati di  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$ , non risulta più minima: si deve essere persa almeno una delle proprietà strutturali di raggiungibilità e/o di osservabilità.

È possibile stabilire che in realtà la cancellazione polo/zero che interviene per due sistemi in parallelo con un polo a comune implica che l'autovalore corrispondente perde *entrambe* le proprietà.

Infatti, per il lemma PBH la matrice

$$(sI - A|B) = \left[ \begin{array}{cc|c} sI_1 - A_1 & 0 & B_1 \\ 0 & sI_2 - A_2 & B_2 \end{array} \right] \quad (8.4)$$

valutata per  $s$  pari all'autovalore in comune, non può aver rango pieno (il rango del blocco a sinistra diminuisce di due, mentre il blocco a destra è una singola colonna). In modo del tutto analogo si procede per il caso duale della osservabilità:

$$\left[ \begin{array}{c} sI - A \\ C \end{array} \right] \left[ \begin{array}{cc} sI_1 - A_1 & 0 \\ 0 & sI_2 - A_2 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} C_1 \\ C_2 \end{array} \right] \quad (8.5)$$

Una dimostrazione alternativa dello stesso risultato si può dare in termini degli schemi di fig. 8.3. Nello schema superiore, il polo a comune è fattoriz-

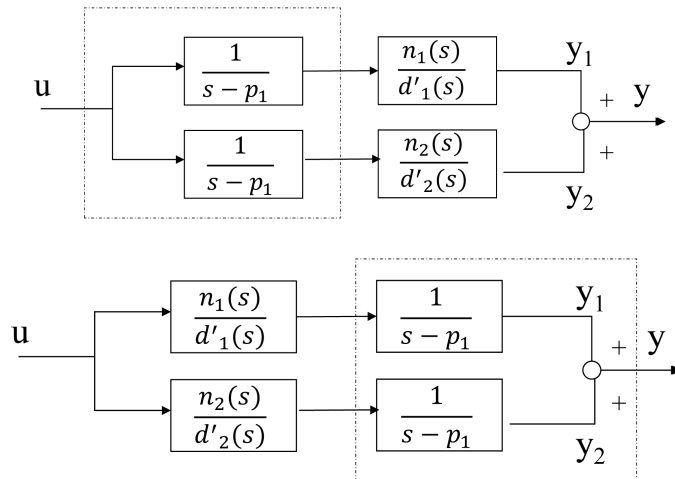


Figura 8.3: Schemi equivalenti di connessione inparallelo di sistemi con un polo a comune

zato a sinistra. Guardando alla realizzazione del sottosistema racchiuso in tratteggio, si ha

$$\begin{cases} \mathbb{D}x_1 \\ \mathbb{D}x_2 \\ y'_1 \\ y'_2 \end{cases} = \begin{cases} \begin{bmatrix} p_1 & 0 \\ 0 & p_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{cases}$$

per il quale la matrice di raggiungibilità vale

$$R = \begin{bmatrix} 1 & p_1 \\ 1 & p_1 \end{bmatrix}$$

il cui rango è uno, dimostrando così che un autovalore in  $p_1$  è esterno al sottospazio di raggiungibilità.

Nello schema inferiore, invece, il polo a comune è fattorizzato a destra, e la realizzazione del sottosistema racchiuso in tratteggio vale

$$\begin{cases} \mathbb{D}x_1 \\ \mathbb{D}x_2 \\ y \end{cases} = \begin{cases} \begin{bmatrix} p_1 & 0 \\ 0 & p_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u'_1 \\ u'_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{cases}$$

per il quale la matrice di osservabilità vale

$$O = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ p_1 & p_1 \end{bmatrix}$$

Si dimostra così che l'autovalore in  $p_1$  è anche interno al sottospazio di inosservabilità.

### 8.5.3 Connessione in Retroazione

Nella connessione in retroazione (fig. 8.4) l'ingresso  $u_2$  del sistema  $\Sigma_2$  in retroazione coincide con l'uscita  $y_1$  del sistema  $\Sigma_1$  in catena diretta. È utile considerare in questo schema anche la presenza di un ulteriore ingresso di riferimento  $r(t)$ , cui l'uscita  $y_2$  del sistema  $\Sigma_2$  in retroazione si sottrae a formare il segnale di errore  $e$  che entra nel sistema  $\Sigma_1$  in catena diretta (si noti che la scelta dei segni al nodo sommatore è puramente convenzionale). Ponendo quindi  $u_2 = y_1$  e  $u_1 = e = r - y_2$  in (8.1), si ottiene

$$\begin{cases} \mathbb{D}x_1 = A_1x_1 - B_1C_2x_2 + B_1r - B_1D_2y \\ \mathbb{D}x_2 = A_2x_2 + B_2y \end{cases}$$

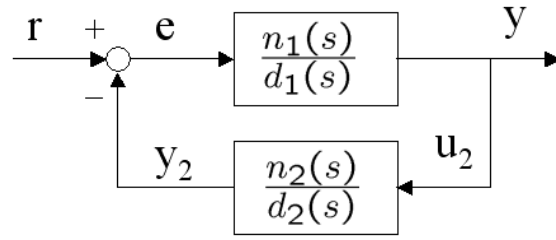


Figura 8.4: Connessione in retroazione di due sistemi LTI.

Per quanto riguarda l'uscita, si può poi scrivere

$$y = C_1 x_1 - D_1 C_2 x_2 + D_1 r - D_1 D_2 y$$

ovvero

$$(1 + D_1 D_2) y = C_1 x_1 - D_1 C_2 x_2 + D_1 r$$

da cui risulta che il sistema è ben posto solo se  $D_1 D_2 \neq -1$ . In tale ipotesi si ha

$$\begin{aligned} \mathbb{D}\bar{x} &= \begin{pmatrix} A_1 - \frac{B_1 C_1 D_2}{1 + D_1 D_2} & -B_1 C_2 + \frac{B_1 C_2 D_1 D_2}{1 + D_1 D_2} \\ B_2 C_1 \frac{1}{1 + D_1 D_2} & A_2 - \frac{B_2 C_2 D_1}{1 + D_1 D_2} \end{pmatrix} \bar{x} + \begin{pmatrix} B_1 - \frac{B_1 D_1 D_2}{1 + D_1 D_2} \\ B_2 D_1 \frac{1}{1 + D_1 D_2} \end{pmatrix} r \\ y &= \begin{pmatrix} C_1 \frac{1}{1 + D_1 D_2} & -D_1 C_2 \frac{1}{1 + D_1 D_2} \end{pmatrix} \bar{x} + \frac{D_1}{1 + D_1 D_2} r \end{aligned} \quad (8.6)$$

La situazione sinora descritta in massima generalità, che ammette che entrambe i sistemi siano proprii ma non strettamente (abbiano cioè grado relativo nullo) creando così un cosiddetto “anello algebrico”, è comunque assai rara anche quando ammissibile. Il caso di gran lunga più frequente nelle applicazioni è quello in cui il sistema in catena diretta sia strettamente proprio ( $D_1 = 0$ ), per cui si ha

$$\begin{aligned} \mathbb{D}\bar{x} &= \begin{pmatrix} A_1 - B_1 C_1 D_2 & -B_1 C_2 \\ B_2 C_1 & A_2 \end{pmatrix} \bar{x} + \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix} r \\ y &= \begin{pmatrix} C_1 & 0 \end{pmatrix} \bar{x} . \end{aligned}$$

Se il sistema in catena diretta non è strettamente proprio, il sistema in retroazione viene spesso scelto in modo da esserlo ( $D_2 = 0$ ), per cui si ha

$$\begin{aligned} \mathbb{D}\bar{x} &= \begin{pmatrix} A_1 & -B_1 C_2 \\ B_2 C_1 & A_2 - B_2 C_2 D_1 \end{pmatrix} \bar{x} + \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 D_1 \end{pmatrix} r \\ y &= \begin{pmatrix} C_1 & -D_1 C_2 \end{pmatrix} \bar{x} + D_1 r . \end{aligned}$$

**Proposizione** *Il sistema “retroazionato” (8.6) è raggiungibile e osservabile se e solo se  $\Sigma_1$  non ha zeri coincidenti con poli di  $\Sigma_2$ . Non è completamente raggiungibile né osservabile altrimenti.*

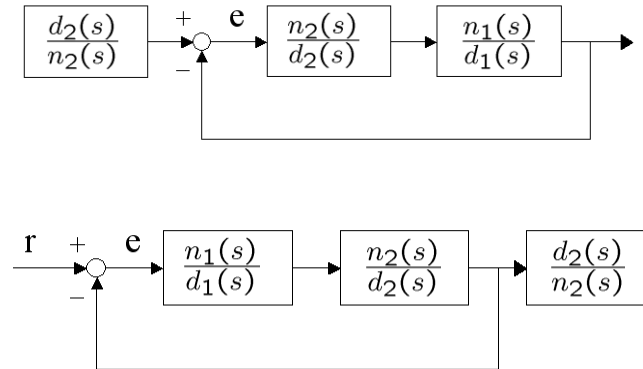


Figura 8.5: Sistemi equivalenti a quello nella figura precedente.

Nella rappresentazione con f.d.t. della connessione in serie, si ha

$$G(p) = \frac{n_1(p)d_2(p)}{d_1(p)d_2(p) - n_1(p)n_2(p)}.$$

Si può avere quindi una cancellazione se e solo se  $n_1(p)$  e  $d_2(p)$  hanno una radice in comune. Il fatto che l’autovalore corrispondente al polo cancellato divenga sia irraggiungibile che inosservabile, può essere spiegata come segue. Si consideri lo schema equivalente a quello di figura (8.4) riportato in alto nella figura (8.5): la cancellazione di un polo in  $d_2$  comporta la perdita di osservabilità del sistema-serie in catena diretta. Sappiamo che peraltro la retroazione della uscita non altera né la raggiungibilità né l’osservabilità di un sistema, quindi l’autovalore corrispondente al polo cancellato resta inosservabile anche nel sistema retroazionato.

Si consideri adesso l’ulteriore schema equivalente riportato nella stessa figura in basso. La cancellazione di un polo in  $d_2$  comporta questa volta la perdita di raggiungibilità del sistema-serie in catena diretta. Per i motivi sopra detti, anche il sistema in retroazione resta irraggiungibile.



# Capitolo 9

## Regolazione dei sistemi

Si è visto in passato che, mentre la retroazione statica delle uscite ha grandi limitazioni, la retroazione degli stati sugli ingressi  $u(t) = Kx(t) + v(t)$  è in grado di allocare arbitrariamente tutti gli autovalori interni al sottospazio raggiungibile. Difficilmente però nei casi pratici lo stato è noto direttamente: l'informazione sullo stato disponibile al progettista del sistema di controllo è infatti contenuta nelle uscite, e in particolare in quelle di misura. Queste, in numero di  $p$  in un sistema MIMO, sono in generale insufficienti a determinare lo stato (che ha dimensione  $n$ ) direttamente, essendo in ogni caso pratico  $p < n$ .

Per ovviare alle limitazioni della retroazione statica delle uscite, si può ricorrere al fatto che, come si è visto, se il sistema è osservabile è possibile ottenere dalle uscite una stima dello stato iniziale, e da questa, per soluzione esplicita del sistema, lo stato attuale al tempo  $t$ , che è quanto serve per calcolare la retroazione.

Questo procedimento non è però spesso praticabile direttamente per due principali motivi:

1. per la complicazione del calcolo numerico necessario a ottenere la stima dello stato iniziale;
2. per la sensibilità che la ricostruzione dello stato finale a partire da quello iniziale e dalla conoscenza degli ingressi mostra agli errori di stima dello stato iniziale, tanto maggiori quanto più è lungo il tempo per il quale si deve integrare il modello.

## 9.1 Osservatore asintotico dello stato (o di Luenberger)

Si procede dunque con un altro approccio, quello di costruire un altro sistema dinamico i cui stati replichino, quanto meglio possibile, quelli del sistema originale. Questo sistema può essere costruito artificialmente, ad esempio con un circuito elettronico analogico o, come nella grande maggioranza dei casi, in un computer. I nuovi stati saranno accessibili alla misura e quindi utilizzabili nella retroazione. Si consideri ad esempio il problema di stimare lo stato  $x$  di un sistema LTI con matrici  $(A, B, C, D)$  mediante il sistema

$$\mathbb{D}\hat{x} = A\hat{x} + Bu$$

Evidentemente, se lo stato iniziale del sistema da osservare fosse noto esattamente, lo stato  $\hat{x}$  dell'osservatore sarebbe una copia esatta dello stato ignoto  $x$ . Altrimenti, l'errore di stima, rappresentato dal vettore  $e = x - \hat{x}$ , è soggetto ad una evoluzione dinamica data da

$$\mathbb{D}e = Ae, \quad e(0) = x(0) - \hat{x}(0)$$

quindi completamente fissata dalla dinamica del sistema da osservare, cosa che in generale non è accettabile.

La dinamica dell'errore di stima può essere modificata utilizzando la conoscenza delle uscite, che non è stata ancora sfruttata. In particolare, si può modificare la dinamica dello stato stimato sommandovi un termine proporzionale alla differenza tra l'uscita effettiva del sistema e quella che si ottiene dallo stato stimato:

$$\mathbb{D}\hat{x} = A\hat{x} + Bu - L(y - C\hat{x})$$

La matrice  $L \in \mathbb{R}^{n \times p}$  è una iniezione delle differenze tra le uscite sugli stati dell'osservatore. La dinamica dell'errore è in questo caso data da

$$\mathbb{D}e = Ae + L(y - C\hat{x}) = (A + LC)e$$

e quindi è influenzata dalla scelta di  $L$ .

Come già visto, la possibilità di allocare arbitrariamente gli autovalori della matrice  $A$  mediante iniezione delle uscite dipende dalla proprietà di osservabilità della coppia  $(A, C)$ . Infatti, avendosi

$$\det(pI - A - LC) = \det(pI - A - LC)^T = \det(pI - A^T - C^T L^T)$$

i coefficienti del polinomio caratteristico di  $(A + LC)$  possono essere scelti

a piacimento se  $(A^T, C^T)$  è raggiungibile, ovvero (per dualità), se  $(A, C)$  è osservabile.

Quando possibile, gli autovalori di  $(A + LC)$  sono allocati ad arbitrio semplicemente seguendo la procedura di allocazione degli autovalori per un sistema  $(A^T, C^T)$  e ponendo  $L = K^T$ . Se invece esiste un sottosistema non osservabile, i suoi autovalori non sono alterati dalla iniezione delle uscite, restando fissi. La possibilità di ottenere quindi un osservatore i cui stati convergano asintoticamente a quelli da stimare dipende dalla stabilità degli autovalori interni al sottospazio di inosservabilità. Un sistema il cui sottosistema inosservabile è asintoticamente stabile si dice *detettabile*. Nel caso TD, se gli autovalori del sottosistema inosservabile sono tutti in zero, è possibile costruire un osservatore dead-beat, per il quale cioè l'errore di stima si annulla in un numero finito di passi (minore o uguale alla dimensione del sistema), a partire da qualsiasi errore iniziale.

La costruzione di un osservatore come quello sopra descritto, detto anche *osservatore identità*, non è l'unica soluzione possibile. In particolare, si consideri che, disponendo direttamente delle  $p$  combinazioni lineari degli stati che formano le uscite, è in effetti necessario solamente stimare altre  $n - p$  combinazioni indipendenti da queste per poter ottenere tutti gli stati. Un tale osservatore si dice *osservatore ridotto*.

## 9.2 Sintesi del regolatore

Avendo da un osservatore una stima  $\hat{x}$  dello stato presente, che asintoticamente converge al valore vero, si può pensare di utilizzarla per il calcolo della retroazione dello stato al posto dello stato inaccessibile  $x$ . Si realizza in questo modo un sistema a  $2n$  stati (se si usa un osservatore identità), con la struttura (nel caso strettamente proprio)

$$\begin{aligned}\mathbb{D}x &= Ax + Bu \\ \mathbb{D}\hat{x} &= A\hat{x} + Bu - L(y - C\hat{x}) \\ y &= Cx \\ u &= K\hat{x} + v\end{aligned}$$

che è rappresentata in fig. 9.1

Sostituendo le espressioni del controllo e della uscita, e calcolando la dinamica dell'errore  $\mathbb{D}e = \mathbb{D}x - \mathbb{D}\hat{x}$ , si ha

$$\begin{aligned}\mathbb{D}x &= Ax + BK\hat{x} + Bv = (A + BK)x - BKe + Bv \\ \mathbb{D}\hat{x} &= (A + BK + LC)\hat{x} - LCx + Bv \\ \mathbb{D}e &= (A + LC)e\end{aligned}$$

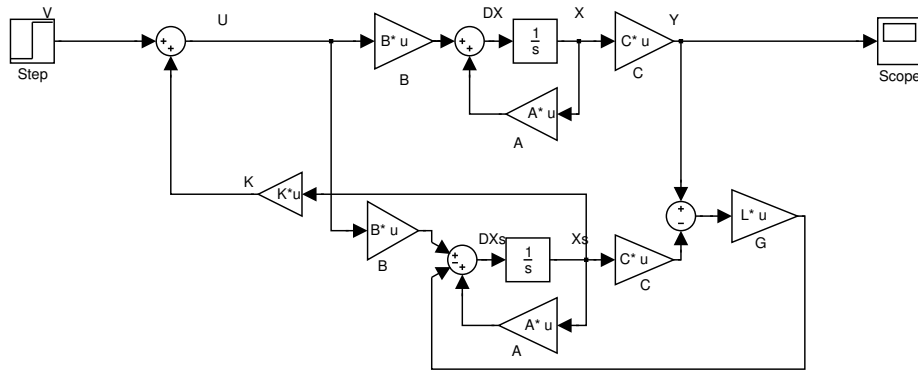


Figura 9.1: Schema di montaggio di un regolatore costituito da un osservatore identità e da una retroazione degli stati stimati.

La dinamica del sistema completo può essere scritta quindi in forma di stato aggregato:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{D}x \\ \mathbf{D}e \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A + BK & -BK \\ 0 & A + LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} v \\ y &= [ C \mid 0 ] \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (9.1)$$

Gli autovalori del sistema con regolatore sono dati dalle radici del polinomio caratteristico

$$\begin{aligned} \det \left( \begin{bmatrix} pI - A - BK & BK \\ 0 & pI - A - LC \end{bmatrix} \right) &= \\ = \det(pI - A - BK) \det(pI - A - LC) & \end{aligned}$$

quindi sono l'unione degli autovalori del sistema regolato (nelle posizioni allocate dalla scelta di  $K$ ) e degli autovalori dell'osservatore (nelle posizioni allocate dalla scelta di  $L$ ): questo risultato, per nulla ovvio a priori, va sotto il nome di *proprietà di separazione*, e garantisce che le allocazioni dei poli dell'osservatore e del sistema retroazionato possono essere fatte indipendentemente l'una dall'altra. Ciò vale anche nel caso in cui si usino osservatori ridotti anziché identità.

Il sistema globale (sistema originale + regolatore) può essere dunque reso asintoticamente stabile se la coppia  $(A, B)$  è stabilizzabile, e la coppia  $(A, C)$  è detettabile. In TD, si può costruire un regolatore dead-beat che porti lo

stato a zero in un numero finito di passi se e solo se tutti gli autovalori esterni al sottospazio di raggiungibilità, ed interni al sottospazio di inosservabilità, sono nulli.

La funzione di trasferimento di questo sistema con  $2n$  stati è data da

$$\begin{aligned} G_c(p) &= \\ &= [ C \mid 0 ] \left[ \begin{array}{c|c} (pI - A - BK)^{-1} & \star \\ \hline 0 & (pI - A - LC)^{-1} \end{array} \right] \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= C (pI - A - BK)^{-1} B \end{aligned}$$

quindi coincide con quella ottenuta dalla retroazione degli stati effettivi: l'utilizzo degli stati stimati non ha effetti da questo punto di vista. Gli autovalori relativi all'errore di osservazione sono irraggiungibili dall'ingresso (come evidente dalla espressione (9.1)).

**Osservazione.** Dalla discussione precedente, risulta che la dinamica assegnata all'errore di osservazione non partecipa al rapporto ingresso/uscita del sistema complessivo. Questo significa che la risposta forzata, ad esempio al gradino, di due sistemi identici ma regolati con differente scelta della matrice di iniezione delle uscite  $L$ , è uguale. Naturalmente, altrettanto non è vero per la evoluzione libera, che dipende dalle condizioni iniziali ed in particolare da quelle dell'errore di stima, che non è ragionevole supporre nulle in pratica. Una  $L$  che renda lenta la convergenza della stima si riflette in un lungo transitorio, che degrada fortemente la prestazione del sistema complessivo. Viceversa, per rendere tale dinamica molto veloce è necessario usare valori elevati nella matrice  $L$ , il che comporta grandi sovraelongazioni nella risposta transitoria, e una forte sensibilità ai possibili disturbi di misura presenti nelle uscite  $y$ , che devono essere misurate da sensori reali. Ne consegue in generale che la scelta della dinamica dell'osservatore è da farsi con attenzione alla presenza di rumore sulle misure di uscita, come si vedrà più avanti nel corso.

### 9.2.1 Esempio

Si consideri la f.d.t. tra la tensione di armatura e la posizione dell'asse meccanico di un comune motore in corrente continua, data da

$$G(s) = \frac{1}{s} \frac{K_m}{(Js + B)(L_a s + R_a) + K_m^2}$$

con  $K_m, J, B, R_a, L_a$  rispettivamente la costante magnetica del motore, il momento di inerzia dell'asse, il coeff. di attrito viscoso, la resistenza e la

induttanza di armatura. Si ponga per semplicità

$$G(s) = \frac{K}{s^3 + \beta s^2 + \alpha s}$$

Possiamo pensare di costruire il regolatore a partire da una retroazione degli stati di una qualsiasi realizzazione raggiungibile di  $G(s)$ , che inizialmente possiamo supporre noti, grazie al principio di separazione.

La scelta della matrice di retroazione  $K$  è fatta semplicemente nel caso che questa realizzazione sia in forma canonica di controllo, cioè

$$\begin{aligned} \dot{x}_c &= A_c x_c + B_c u \\ y &= C_c x_c + D_c u \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} A_c &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\alpha & -\beta \end{bmatrix}; & B_c &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \\ C_c &= [K \ 0 \ 0]; & D &= [0]. \end{aligned}$$

In tal caso infatti, se si desidera allocare gli autovalori ad esempio nelle radici del polinomio  $p_c(s) = s^3 + a_{c2}s^2 + a_{c1}s + a_{c0}$ , basterà porre  $-a_{c0} = k_1$ ,  $-a_{c1} = -\alpha + k_2$ , e  $-a_{c2} = -\beta + k_3$ .

Dobbiamo ora calcolare la matrice di iniezione delle uscite per un osservatore dello stato  $x_c$  tale che gli autovalori propri della dinamica dell'errore di stima  $e_c = x_c - \hat{x}_c$ , che vale

$$\dot{e}_c = (A_c + LC_c)e_c$$

siano allocati dove si desidera. Si noti che questo è possibile perchè la realizzazione data è certamente anche osservabile: infatti, è una realizzazione minima (usa tre stati per una f.d.t. copriva di ordine 3).

Una tipica scelta per la posizione di questi autovalori è quella di averli circa 10 volte più veloci di quelli della dinamica imposta al sistema (con la precedente retroazione). Si desidera dunque scegliere  $L$  tale che il polinomio caratteristico di  $A_c + LC_c$  coincida con uno desiderato, che poniamo sia  $p_o(s) = s^3 + a_{o2}s^2 + a_{o1}s + a_{o0}$ .

Per ottenere questo scopo possiamo procedere direttamente, scrivendo il polinomio caratteristico di  $A_c + LC_c$  in funzione dei parametri incogniti in  $L$ , calcolando il polinomio caratteristico e imponendo l'eguaglianza dei coefficienti. Questa tecnica è in genere conveniente per sistemi di dimensione piccola (2 o 3).

Più in generale, conviene procedere usando un cambiamento di coordinate nello spazio di stato, che posti il sistema in forma canonica di osservazione.

Poniamo dunque  $x_c = T_{co}x_o$  e calcoliamo  $T_{co}$  tale che  $(T_{co}^{-1}A_cT_{co} = A_o, C_cT_{co} = C_o)$  siano in forma canonica di osservazione.

Sappiamo da quanto visto in precedenza che possiamo ottenere la matrice di cambiamento di coordinate dalla relazione tra le matrici di osservabilità nelle due basi: infatti  $\mathbf{O}_o = \mathbf{O}_cT_{co} \Rightarrow T_{co}^{-1} = \mathbf{O}_o^{-1}\mathbf{O}_c$ , e, ricordando che

$$\mathbf{O}_o^{-1} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_2 & a_3 & \cdots & 1 & 0 \\ a_3 & a_4 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

possiamo facilmente ottenere nel nostro caso

$$\mathbf{O}_o^{-1} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & 1 \\ \beta & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Inoltre, direttamente dalla definizione di matrice di osservabilità per il caso specifico,  $\mathbf{O}_c = KI$ .

Nelle coordinate della forma canonica di osservazione, il calcolo di  $L_o$  è immediato: basterà porre  $-a_{o0} = L_{o1}$ ,  $-a_{o1} = -\alpha + L_{o2}$ , e  $-a_{o2} = -\beta + L_{o3}$ . Questa iniezione delle uscite sugli stati  $\hat{x}_o$  assolve il compito: la dinamica

$$\dot{e}_o = (A_o + L_oC_o)e_o$$

ha gli autovalori assegnati. Nello schema da realizzare, comunque, si tratta di iniettare le uscite sulla dinamica degli stati  $\hat{x}_c$ , che sono quelli usati per la retroazione. Si ha in questo caso

$$\dot{e}_c = T_{co}\dot{e}_o = T_{co}(A_o + L_oC_o)T_{co}^{-1}e_c = A_c + T_{co}L_oC_c e_c$$

il che significa che la matrice di iniezione cercata, nelle coordinate scelte per la realizzazione del regolatore, è data da

$$L = T_{co}L_o = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\beta \\ 1 & -\beta & \beta^2 - \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{o1} \\ L_{o2} \\ L_{o3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} L_{o3} \\ L_{o2} - \beta L_{o3} \\ L_{o1} - \beta L_{o2} + (\beta^2 - \alpha)L_{o3} \end{bmatrix}$$

### 9.3 Retroazione delle uscite

Nella sezione precedente abbiamo visto che è possibile costruire un regolatore basato su osservazione degli stati che ci permette di allocare gli autovalori del sistema sistematicamente. Lo schema corrispondente è quello riportato in fig. 9.1

In questa sezione, vogliamo riconciliare questo risultato con le più classiche tecniche di progettazione del controllo basato esclusivamente sulla retroazione delle uscite, come visto nei corsi di base e riportato schematicamente in fig. 9.2

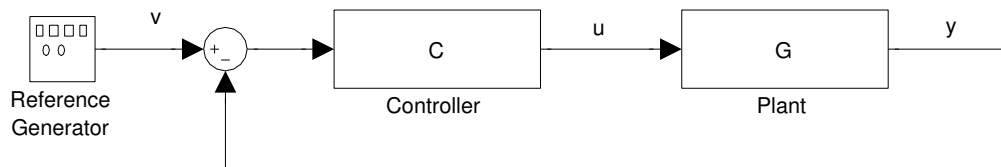


Figura 9.2: Montaggio del regolatore in retroazione in catena diretta

Consideriamo quindi il problema di progettare un controllore per un dato sistema, rappresentato dalla sua f.d.t.  $G(p)$ . Si supponrà per semplicità che il sistema sia strettamente proprio.

Abbiamo visto in passato per i sistemi SISO che una reazione statica delle uscite (cioè un controllo calcolato come funzione lineare dell'errore tra uscita e riferimento  $u = K(v - y)$ ) offre possibilità alquanto limitate: gli autovalori del sistema in anello chiuso infatti si muoveranno esclusivamente lungo il luogo delle radici corrispondente. D'altronde, l'utilizzo di un regolatore (osservatore asintotico e retroazione dello stato stimato) permette di allocare tutti gli autovalori raggiungibili e osservabili (ovvero, tutti i poli della f.d.t. ridotta ai minimi termini).

È naturale chiedersi se una retroazione più complessa delle uscite in cui il controllo è calcolato come  $u(p) = C(p)(v(p) - y(p))$  (vedi fig. 9.2) potrebbe essere in grado di offrire gli stessi risultati. Vedremo che la risposta a questa domanda è “ni”, ovvero sostanzialmente sì, anche se non esattamente.

Il significato del controllore  $C(p)$  (dove  $p = s$  in tempo continuo e  $p = z$  in tempo discreto) è che il progettista del sistema di regolazione crea un vero e proprio sistema dinamico per il quale la uscita del sistema da regolare e il riferimento fungono da ingresso, e la cui uscita costituisce l'ingresso al sistema originale. Il nuovo “controllore” con f.d.t.  $C(p)$  può essere pensato



come una realizzazione nello spazio di stato

$$(A_C, B_C, C_C, D_C).$$

Le dimensioni delle matrici sono in parte dettate dal problema:  $B_C$  accetta tanti ingressi quante sono le uscite di misura di  $G(p)$  (ed i riferimenti relativi  $v$ ),  $C_C$  dà luogo a tante uscite regolate quanti sono gli ingressi di  $G(p)$ .

La scelta del numero di stati del controllore (cioè dell'ordine della  $C(p)$ ) è invece compito del progettista. In questa scelta, si dovrà trovare il miglior compromesso tra la versatilità del progetto (ordine minore del controllore implica minor numero di specifiche raggiungibili) e complicazione del controllore (se implementato analogicamente, un controllore di ordine elevato sarà di più difficile realizzazione e più sensibile alle tolleranze dei componenti; se numericamente, l'ordine elevato allunga i tempi di calcolo).

Per dare alcune indicazioni di massima sui criteri della scelta dell'ordine del controllore, si consideri da un lato che i controllori di ordine zero altro non sono che retroazioni statiche dell'uscita ( $A_C = B_C = C_C = 0$ ;  $D_C = K$ ), di cui si conoscono le limitazioni. D'altro lato, possiamo affermare che, se al controllore è concesso ordine  $n$  pari a quello del sistema da regolare, allora si può ottenere da esso la stessa flessibilità di scelta che si ha da un regolatore composto da osservatore identità e retroazione degli stati stimati.

Per dimostrare questa affermazione, si scrivano le equazioni di stato del sistema da regolare in una sua realizzazione minima  $(A, B, C, D)$  ( $G(p) = C(pI - A)^{-1}B + D$ ) e quelle del controllore (con stato  $x_C$ ) collegati in retroazione negativa secondo lo schema di fig. 9.2. Per semplicità assumiamo che il sistema sia strettamente proprio, ovvero  $D = 0$ ). Si ha

$$\begin{aligned} \mathbb{D}x &= Ax + By_C \\ \mathbb{D}x_C &= A_C x_C + B_C(v - y) \\ y &= Cx \\ y_C &= C_C x_C + D_C(v - y) \end{aligned}$$

ovvero, esplicitando e ponendo in forma matriciale,

$$\begin{bmatrix} \mathbb{D}x \\ \mathbb{D}x_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BD_C C & BC_C \\ -B_C C & A_C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} BD_C \\ B_C \end{bmatrix} v$$

Si considerino d'altronde ancora le equazioni del regolatore negli stati  $(x, \hat{x})$  del sistema e dell'osservatore, come ottenute in precedenza:

$$\begin{aligned} \mathbb{D}x &= Ax + BK\hat{x} + Bv \\ \mathbb{D}\hat{x} &= (A + BK + LC)\hat{x} - LCx + Bv \end{aligned}$$

quindi

$$\begin{bmatrix} \mathbb{D}x \\ \mathbb{D}\hat{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & BK \\ -LC & A + BK + LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ B \end{bmatrix} v$$

Si osserva che ponendo  $D_C = 0$ ,  $C_C = K$ ,  $B_C = L$ ,  $A_C = A + BK + LC$ , la matrice dinamica dei sistemi coincide. Pertanto un controllore a  $n$  stati con f.d.t.

$$C(p) = K(pI - A - BK - LC)^{-1}L \quad (9.2)$$

posto in retroazione come in fig. 9.2 ottiene la identica allocazione dei poli ottenuta dal regolatore standard.

Si noti esplicitamente che questo controllore può avere sia poli che zeri a parte reale positiva, non potendosi dire nulla a priori sulla posizione degli autovalori di  $A + BK + LC$ . In taluni casi, quando il sistema da stabilizzare ha esso stesso singolarità a parte reale positiva, un controllore di per sé instabile è strettamente necessario (può essere utile qui ricordare alcuni risultati di stabilizzazione sul luogo delle radici).

Introducendo la variabile  $\tilde{x} = x - x_C$ , le equazioni del sistema con questo controllore sono

$$\begin{bmatrix} Dx \\ D\tilde{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + BK & -BK \\ 0 & A + LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \tilde{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -L \end{bmatrix} v. \quad (9.3)$$

La f.d.t. in anello chiuso tra  $v$  e  $y$  risulta quindi

$$\begin{aligned} G_{cd}(p) &= \\ &= [C \mid 0] \left[ \begin{array}{c|c} (pI - A - BK)^{-1} & M \\ \hline 0 & (pI - A - LC)^{-1} \end{array} \right] \begin{bmatrix} 0 \\ -L \end{bmatrix} v \\ &= -CML, \end{aligned}$$

dove  $M = (pI - A - BK)^{-1}BK(pI - A - LC)^{-1}$ . Con semplici passaggi si ha in definitiva

$$G_{cd}(p) = G_c(p)G_o(p)$$

dove

$$G_o(p) = -K(pI - A - LC)^{-1}L,$$

da cui si vede che la f.d.t. ottenuta dal montaggio con osservatore completo di fig. 9.1 è alterata nel montaggio di fig. 9.2 per aggiunta in serie di un termine con i poli (tipicamente in alta frequenza) scelti per l'osservatore.

Un controllore di questo tipo si dice "basato sul regolatore".

Le differenze tra il controllore (9.2) ed il regolatore standard sono quindi

- gli autovalori relativi alla dinamica di  $\tilde{x} = x - x_C$  non sono più in generale irraggiungibili dall'ingresso  $v$  (la forma (9.3) non è standard di raggiungibilità). Di conseguenza, lo stato del controllore  $x_C$  non insegue asintoticamente lo stato  $x$ , essendo la dinamica della differenza  $\tilde{x}$  eccitata dall'ingresso  $v$ ;
- nella f.d.t. in anello chiuso dell'intero sistema compaiono anche gli autovalori dell'osservatore (cioè di  $A + LC$ ).

Sarebbe possibile eliminare la presenza dei poli dell'osservatore con un precompensatore  $F(p)$  che realizzasse una f.d.t pari alla inversa di  $G_o(p)$ , come mostrato in fig. 9.3 Questo precompensatore non è fisicamente realizzabile

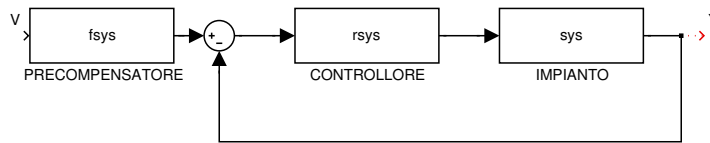


Figura 9.3: Montaggio del compensatore in catena diretta con precompensatore.

perché  $G_o(p)$  è strettamente causale. Posto  $G_o(p) = \frac{n_o(p)}{d_o(p)}$ , si può comunque usare un precompensatore del tipo

$$F(p) = \frac{d_o(p)}{n_o(p)} \frac{1}{d_f(p)},$$

dove  $\frac{1}{d_f(p)}$  ha poli stabili convergenti molto rapidamente a zero, e guadagno statico pari a  $\frac{1}{G_o}$ . Si osservi che  $F(p)$  ha zeri stabili per costruzione, ma può essere instabile. Si ricorda anche che l'uso di precompensatori è soggetto ad una elevata sensibilità alle variazioni parametriche. Nella pratica, l'uso di un prefiltro è limitato ad una costante di proporzionalità per aggiustare il guadagno statico al valore desiderato: ad esempio, per avere l'inseguimento dei riferimenti in  $v$  da parte dell'uscita  $y$ , la costante di precompensazione dovrà essere scelta come  $F = 1/G_{cd}(0)$ .

### 9.3.1 Progetto del Regolatore e Specifiche

Il progetto di un compensatore basato sul regolatore consiste fondamentalmente nella scelta delle due matrici di guadagno  $K$  e  $L$ . Questa scelta, direttamente legata alla posizione dei poli dell'anello chiuso, deve venir fatta sulla base delle specifiche imposte al funzionamento del sistema.

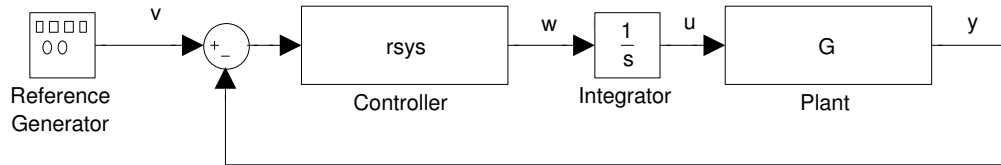


Figura 9.4: Montaggio di un compensatore basato su regolatore per rispondere ad una specifica di errore nullo a regime per ingresso a gradino.

L'allocazione dei poli dell'anello chiuso può essere spesso fatta in modo da avere un comportamento a uno o due poli dominanti, e quindi le specifiche di rapidità di risposta e di sovraelongazione possono essere implementate come vincoli sulle regioni del piano complesso in cui piazzare i poli stessi. Non è questo il caso per sistemi complessi, o con zeri in prossimità della origine, o peggio a fase non minima. In questi casi, le approssimazioni a poli dominanti non valgono ed è necessario procedere con tecniche di progettazione più sofisticate, quali quelle di controllo ottimo (ad es. LQR/LQG) che verranno viste in corsi più avanzati.

È invece opportuno considerare qui una tecnica per ottenere che il sistema in anello chiuso inseguia riferimenti (ovvero reietti disturbi) costanti con errore nullo a regime. Se il sistema non ha di per sé un polo nell'origine, questo dovrà essere presente nel controllore.

Per ottenere questo, una semplice procedura consiste nel predisporre un integratore in serie all'impianto, come illustrato in fig. 9.4, e nel calcolare un compensatore (di dimensione  $n + 1$ ) che allochi dove desiderato gli autovalori in anello chiuso del sistema esteso dato da

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ \dot{u} &= w \\ y &= Cx\end{aligned}$$

ovvero

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} w.$$

Si osservi che il sistema esteso rimane completamente raggiungibile e osservabile, se il sistema originale è tale e non ha zeri nell'origine. Una volta progettate le matrici di retroazione e iniezione per questo sistema esteso, il polo nell'origine sarà poi realizzato nel compensatore stesso (che diviene quindi di dimensione  $n + 2$ ).

### 9.3.2 Montaggio del controllore in catena di retroazione

Un compensatore basato sul regolatore può essere montato alternativamente nella catena di retroazione, come mostrato in fig. 9.5, dove si considera anche l'aggiunta di un precompensatore  $F(p)$ . Le equazioni del sistema in

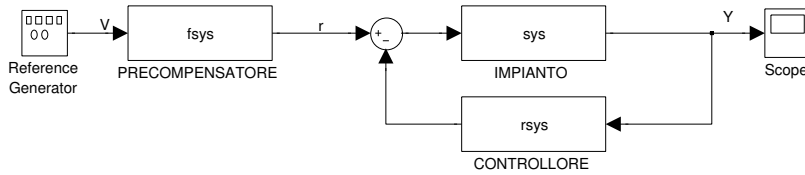


Figura 9.5: Montaggio di un controllore basato su regolatore con azione compensatrice in azione diretta.

retroazione (senza precompensatore) divengono in questo caso

$$\begin{aligned} \mathbb{D}x &= Ax - By_c + Br \\ \mathbb{D}x_c &= A_c x_c + B_c y \\ y &= Cx \\ y_c &= C_c x_c + D_c y \end{aligned} .$$

Procedendo come in precedenza, e scegliendo in questo caso  $B_c = -L$ ,  $C_c = -K$ , e ancora  $D_c = 0$  e  $A_c = A + BK + LC$ , si ottiene

$$\begin{bmatrix} Dx \\ D\tilde{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + BK & -BK \\ 0 & A + LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \tilde{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ B \end{bmatrix} v. \quad (9.4)$$

La f.d.t. in anello chiuso tra  $v$  e  $y$  risulta quindi

$$\begin{aligned} G_{cr}(p) &= \\ &= \left[ C \mid 0 \right] \left[ \begin{array}{c|c} (pI - A - BK)^{-1} & M \\ \hline 0 & (pI - A - LC)^{-1} \end{array} \right] \begin{bmatrix} B \\ B \end{bmatrix} \\ &= C(pI - A - BK)^{-1} B + CMB, \end{aligned}$$

con  $M = (pI - A - BK)^{-1} BK (pI - A - LC)^{-1}$ . Si

$$G_{cr}(p) = G_c(p) (1 + K(pI - A - LC)^{-1} B) = G_c(p) + G_c(p)G'_o(p),$$

dove  $G'_o(p) = K(pI - A - LC)^{-1} B$  è una f.d.t. con i poli scelti per l'osservatore, che differisce dalla  $G_o(s) = K(pI - A - LC)^{-1} L$  incontrata in precedenza nel regolatore in catena diretta solo per il polinomio degli zeri.

Si osservi che, se gli autovalori dell'osservatore sono scelti molto più veloci di quelli del sistema, la matrice  $L$  può avere valori molto grandi, il che può comportare risposte molto accentuate nel montaggio in catena diretta.

Quando le specifiche statiche richiedano la presenza di un polo nell'origine in anello aperto, il montaggio del regolatore in retroazione può essere fatto come riportato in fig. 9.6. In questo caso, il progetto è lievemente di-

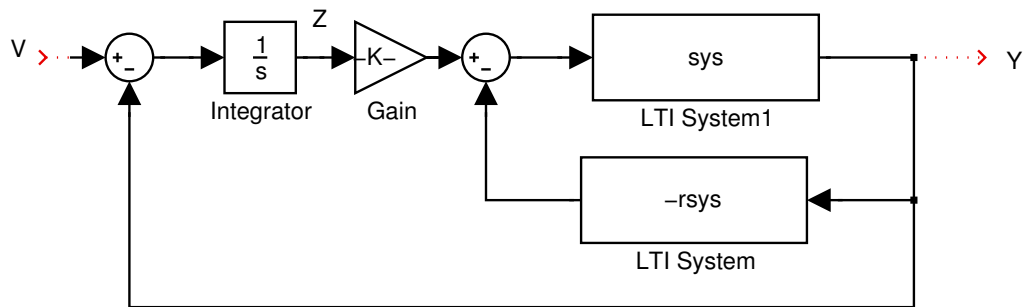


Figura 9.6: Montaggio alternativo di un controllore con specifica statica di errore nullo nell'inseguimento del gradino

verso, ma può essere ricondotto alle tecniche usuali se si considera un sistema complessivo di  $n + 1$  stati (lo stato  $x$  aggregato al nuovo stato scalare  $z$  dell'integratore) con  $n + 1$  guadagni (quelli della matrice di retroazione  $K$  più quello scalare  $K_z$  sull'anello diretto), ovvero

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ \dot{z} &= v - Cx \\ u &= [K \ K_z] \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Riscrivendo in forma matriciale

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u$$

si può ottenere la matrice  $[K \ K_z]$  in modo da piazzare i poli di questo sistema con gli algoritmi consueti. Nella costruzione dell'osservatore, si noti che in questo caso non vi è bisogno di osservare lo stato  $w$ , che è noto per costruzione.

### 9.3.3 Pianificazione e Controllo (Feedback & Feedforward)

La differenza tra il montaggio del controllore basato su regolatore in catena diretta o in retroazione si osserva soprattutto nel transitorio della risposta al gradino. Il montaggio in catena diretta tende a generare in questo caso risposte che hanno un picco di sovraelongazione elevato ed ingressi che assumono valori massimi di intensità maggiore rispetto al montaggio in retroazione.

Si deve ricordare peraltro che il montaggio in retroazione ha come svantaggio la maggior sensibilità alle variazioni parametriche del controllore e ai disturbi del segnale di controllo (come da teoria classica della retroazione).

Il fenomeno di “peaking” nella risposta al gradino rende il montaggio in retroazione più desiderabile nei casi in cui non si disponga di una buona pianificazione dei riferimenti di ingresso. Se infatti al posto di riferimenti discontinui si chiede al sistema di inseguire riferimenti gradualmente variabili, come ad esempio conseguenti ad una pianificazione ottima, le differenze di risposta tra i due montaggi tendono a essere meno importanti.

Il montaggio di un regolatore in presenza di una pianificazione ottima si basa sull’inserimento nello schema del risultato della pianificazione ottima, in termini sia della sequenza ottima degli ingressi  $U_N$  (ottenuta ad esempio dalla soluzione del problema di ottimo vincolato) che delle corrispondenti uscite  $Y_N$  (ottenute dalla applicazione di  $U_N$  al modello nominale).

I montaggi corrispondenti sono riportati in fig. x e fig. y, rispettivamente.

## 9.4 Sintesi analitica

Dalle considerazioni svolte sinora sulla retroazione delle uscite e sulle proprietà dei sistemi connessi, possiamo trarre alcune importanti conclusioni sulle possibilità offerte dalla scelta dei compensatori dinamici per sistemi LTI.

Con riferimento alla figura (9.9), si consideri il compensatore  $C(p) = \frac{n_c(p)}{d_c(p)}$  in catena diretta col sistema  $G(p) = \frac{n(p)}{d(p)}$ , e la f.d.t. in anello chiuso risultante,  $G_c(p) = \frac{n_c(p)n(p)}{n_c(p)n(p)+d_c(p)d(p)}$ . Risulta evidente che la f.d.t. in anello chiuso ha tra i suoi zeri quelli del sistema in anello aperto (come sappiamo per il fatto che gli zeri sono invarianti per retroazione degli stati), oltre a quelli aggiunti dal compensatore. L’unico caso in cui uno zero di  $G(p)$  non appare anche nella  $G_c(p)$  è quello nel quale  $C(p)$  presenta un polo nella stessa posizione, cioè se si ha una cancellazione tra  $d_c(p)$  e  $n(p)$ . In questo caso, l’autovalore corrispondente al polo cancellato diviene sia irraggiungibile che inosservabile (valgono infatti le stesse considerazioni fatte sulla connessione in retroazione), e rimane pertanto fisso con la retroazione. Nel caso in cui

lo zero cancellato (e quindi il polo) fosse al di fuori della regione di stabilità (semipiano sinistro per LTITC o cerchio unitario per LTITD), il risultato è inaccettabile, in quanto il sistema conterrebbe un modo instabile che, per quanto non influenzi il rapporto ingresso-uscita, divergerebbe allontanando irrimediabilmente il sistema dalla zona di funzionamento in cui il modello lineare adottato è valido. La cancellazione di uno zero a parte reale positiva con un polo instabile del compensatore è peraltro inaccettabile anche per altri motivi: si pensi infatti al caso in cui uno zero instabile del sistema  $G(p)$  della forma  $(p - a)$  sia imperfettamente cancellato (come non può che avvenire in pratica) da un polo  $(p - a - \epsilon)$  in  $G_c(p)$ , con  $|\epsilon| > 0$  arbitrariamente piccolo. Nella f.d.t. in anello chiuso, si troverà un polo situato tra  $a$  e  $a + \epsilon$  (si pensi al luogo delle radici corrispondente), quindi ancora certamente instabile (per  $\epsilon$  piccolo), il quale darebbe luogo a divergenza della uscita.

Anche nel caso in cui il compensatore venisse scelto in modo da cancellare con uno zero uno dei poli del sistema, cioè se  $n_c(p)$  avesse fattori comuni a  $d(p)$ , il sistema perderebbe raggiungibilità e osservabilità, e l'autovalore corrispondente resterebbe imm modificabile per retroazione. Per gli stessi motivi esposti sopra, questo comportamento è inaccettabile se il polo in questione è instabile.

Le cancellazioni tra compensatore e impianto sono spesso usate nei più elementari approcci alla regolazione dei sistemi, quali la cosiddetta *sintesi analitica*, che si riassume qui a titolo esemplificativo. La tecnica consiste nella soluzione di una semplice equazione tra la f.d.t. in anello chiuso del sistema compensato  $G_c(p)$  ed una f.d.t. obiettivo  $G_o(p)$  assegnata come desiderabile, nella incognita rappresentata dalla f.d.t. del compensatore  $C(p)$ :

$$G_c(p) = \frac{C(p)G(p)}{1 + C(p)G(p)} = \frac{n_c(p)n(p)}{n_c(p)n(p) + d_c(p)d(p)} = G_o(p) = \frac{n_o(p)}{d_o(p)},$$

che ha per soluzione

$$C(p) = \frac{G_o(p)}{1 - G_o(p)} \frac{1}{G(p)} = \frac{n_o(p)}{d_o(p) - n_o(p)} \frac{d(p)}{n(p)}.$$

Il metodo consiste praticamente nel cancellare tutti i poli e gli zeri del sistema originale, rendendoli inosservabili e irraggiungibili, e nell'introdurre di nuovi; è pertanto da attendersi che il metodo abbia forti limitazioni nella sua pratica applicazione.

È innanzitutto da notare che la condizione di fisica realizzabilità del compensatore impone che il modello obiettivo debba avere grado relativo non inferiore al grado relativo del sistema di partenza, come risulta evidente dalle espressioni sopra riportate.



Nel caso in cui il sistema abbia zeri a parte reale positiva, la sintesi analitica non può essere impiegata, a meno di specificare che anche il sistema obiettivo contenga quegli stessi zeri (in tal caso infatti  $n_o(p)$  e  $n(p)$  hanno lo zero a fattor comune nella espressione di  $C(p)$ ).

Anche quando il sistema  $G(p)$  ha poli instabili in anello aperto, la sintesi analitica non può essere applicata senza la precauzione di porre una f.d.t. obiettivo tale che eviti la cancellazione dei poli instabili: la contromisura da prendere in questo caso consiste nel fare in modo che il polinomio  $d_o(p) - n_o(p)$  contenga gli stessi poli instabili.

Per il resto del progetto per sintesi analitica, si svolgono considerazioni analoghe a quelle fatte per il progetto basato sul regolatore.



Figura 9.7: Integrazione di una azione di controllo in avanti (eventualmente calcolata mediante pianificazione ottima) con un controllore montato in catena diretta.



Figura 9.8: Schema di controllo in catena di retroazione con integrazione di riferimenti pianificati.

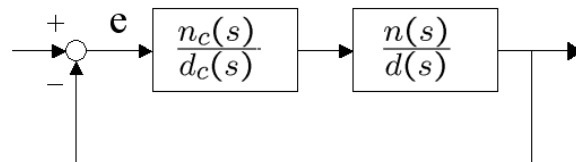


Figura 9.9: Sintesi analitica di un compensatore in catena diretta.



# Appendice A

## Richiami di Algebra Lineare

### A.1 Sistemi lineari di equazioni

Si consideri il sistema di equazioni lineari

$$Ax = b, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

1. Il sistema ha soluzione se e solo se  $b \in \text{Im } A$ ;
2. Il sistema ha soluzione  $\forall b$  se e solo se  $\text{Im } A = \mathbb{R}^n$ , quindi se  $\text{rank } A = n$  (si dice che  $A$  ha pieno rango righe). E' necessario perciò che  $m \geq n$ ;
3. Il sistema ha al più un'unica soluzione se  $\text{ker } A = \{0\}$ ;

Per  $n = m$ , si ha ovviamente una soluzione per ogni  $b$ , che è anche unica, se e solo se  $A$  è invertibile:  $x = A^{-1}b$ .

Consideriamo il caso 2, in cui la soluzione di  $Ax = b$  esiste ma non è unica. Poniamoci il problema di trovare, tra le soluzioni, quella di lunghezza minima. Vogliamo in altri termini risolvere il problema di minimo vincolato

$$\hat{x} = \arg \min_x x^T x \\ Ax = b$$

Questo problema è risolto facilmente col metodo dei moltiplicatori di Lagrange, definendo  $L = x^T x + \lambda^T (Ax - b)$  e imponendo  $\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0$ . Dalla prima condizione si ha

$$x = -\frac{A^T \lambda}{2},$$

quindi

$$-AA^T \lambda = 2b$$

Nella ipotesi che  $A$  abbia pieno rango righe,  $AA^T$  è invertibile: infatti, questa matrice è quadrata, ed essendo le righe di  $A$  indipendenti, tali sono anche le colonne di  $A^T$ , che quindi non ha spazio nullo (cioè, non esiste alcun  $y$  tale che  $A^T y = 0$ ). Inoltre, poichè sappiamo dal teorema fondamentale dell'algebra che  $\text{Im}(A^T) = \ker^\perp(A)$ , nessun vettore nell'immagine di  $A^T$  può appartenere al kernel di  $A$ . Quindi si ha che la soluzione di minima lunghezza è

$$\hat{x} = A^T(AA^T)^{-1}b$$

Si osservi che la matrice  $A^R \stackrel{\text{def}}{=} A^T(AA^T)^{-1}$  è una *inversa destra* di  $A$ :  $AA^R = I_n$ .

Se la lunghezza del vettore  $x$  fosse stata misurata in un'altra metrica,  $\|x\|^2 = x^T W x$  (con  $W$  simmetrica e positiva definita), la soluzione sarebbe risultata  $\hat{x} = W^{-1}A^T(AW^{-1}A)^T b$ . La matrice  $A_W^R \stackrel{\text{def}}{=} W^{-1}A^T(AW^{-1}A)^T$  è anch'essa una inversa destra, *pesata* in  $W$  (quindi, le inverse destre non sono uniche).

È interessante anche osservare come una metrica considerata su uno spazio si trasformi cambiando le coordinate. Siano  $x = Tz$  le nuove coordinate. Si ha:  $x^T W x = z^T T^T W T z$ . La matrice della metrica si trasforma quindi per congruenza. Essendo  $W$  simmetrica e positiva definita (non avrebbe senso altrimenti), esiste sempre un sistema di coordinate nel quale la matrice della metrica è diagonale: basterà prendere per  $T$  la matrice ortogonale diagonalizzante  $Q$  ( $Q^T W Q = \Lambda$ ). Scegliendo poi  $T = Q\Lambda^{-1/2}$ , si ha  $x^T W x = z^T z$ , cioè la matrice metrica è identica.

Si consideri adesso invece il caso (3) in cui una soluzione (in generale) non esista, ma che  $\dim \ker(A) = 0$ . Ha senso in questo caso cercare la miglior approssimazione, cioè la  $x$  che minimizza la norma del residuo

$$\hat{x} = \arg \min \|Ax - b\|^2$$

Ponendo

$$\frac{\partial(Ax - b)^T(Ax - b)}{\partial x} = 2(A^T Ax - A^T b)^T = 0$$

si ha la soluzione ai minimi quadrati

$$\hat{x} = (A^T A)^{-1} A^T b.$$

L'invertibilità è garantita dall'ipotesi che  $A$  non abbia spazio nullo.

La matrice  $A^L = (A^T A)^{-1} A^T$  è una *inversa sinistra*:  $A^L A = I_m$ . Se si considera una metrica  $W_b$  sullo spazio dei residui, si ottiene  $A_{W_b}^L = (A^T W_b A)^{-1} A^T W_b$ .

Chiaramente, inverse destre e sinistre sono diverse in generale (anche nelle dimensioni). Se una inversa destra e una sinistra coincidono, allora questa è l'unica inversa  $A^{-1}$  di una matrice quadrata  $A$ .

Ci chiediamo ora se esiste una espressione unica per una “inversa” di una matrice  $A$  (chiamiamola  $A^+$ ) che fornisca, nei diversi casi, le soluzioni viste. Cioè,  $A^+ = A^{-1}$  se esiste l’inversa;  $A^+ = A^R$  se esiste l’inversa destra sopra definita (cioè se  $A$  ha pieno rango righe);  $A^+ = A^L$  se esiste l’inversa sinistra sopra definita (cioè se  $A$  ha pieno rango colonne).

Desideriamo anche considerare i casi dove non esista né inversa destra né sinistra, cioè dove il sistema  $Ax = b$  non abbia alcuna soluzione in generale, ma per i particolari  $b$  per cui ha soluzione, questa non è unica. In questo caso, vorremmo che  $x = A^+b$  fornisse, tra le soluzioni che approssimano la soluzione con minima norma del residuo, quella che possiede norma minima.

## A.2 Scomposizione ai Valori Singolari e Pseudoinversa

Data una matrice  $A$   $n \times m$ , e  $\text{rank}(A) = r$ , si consideri la diagonalizzazione delle matrici (simmetriche e semi-definite positive) ottenute per prodotto con la trasposta:

$$\begin{aligned} AA^T &= UMU^T \\ A^T A &= NVN^T \end{aligned}$$

dove  $U$  è  $n \times n$ , composta da  $n$  autovettori ortonormali di  $AA^T$  ordinati in modo che in  $M$  si trovino gli autovalori di  $AA^T$  decrescenti in modulo lungo la diagonale; e  $V$  è  $m \times m$ , composta da  $m$  autovettori ortonormali di  $A^T A$  ordinati in modo che in  $N$  si trovino gli autovalori di  $A^T A$  decrescenti in modulo lungo la diagonale.

Naturalmente, si ha che le ultime  $n - r$  colonne di  $U$ , e le ultime  $m - r$  colonne di  $V$ , sono contenute rispettivamente nel  $\ker(AA^T) = \ker A^T$  e nel  $\ker(A^T A) = \ker A$ , e formano una base ortogonale di questi sottospazi. Infatti, gli elementi sulla diagonale di  $M$  e  $N$  sulle righe e colonne di indice superiore a  $r$  sono nulli.

Si osservi che i primi  $r$  valori diagonali (non nulli) di  $M$  e di  $N$  sono eguali e positivi:  $\lambda_i > 0, i = 1, \dots, r$ . Entrambe le matrici hanno poi  $\min(n, m) - r$  autovalori nulli sulla diagonale. Infine, se  $n > m$ , la matrice  $N$  ha  $n - m$  altri autovalori nulli sulla diagonale; se  $n < m$ , è la matrice  $M$  ad avere  $m - n$  altri autovalori nulli sulla diagonale.

Questa è una conseguenza del fatto che gli autovalori di un prodotto quadrato di matrici rettangolari, ad esempio  $BC$ , coincidono con quelli del prodotto commutato,  $CB$ , eccetto che per un numero di autovalori nulli pari alla differenza di dimensioni tra le due matrici quadrate.

Possiamo quindi scrivere  $M = \Sigma \Sigma^T$  e  $N = \Sigma^T \Sigma$ , con  $\Sigma$   $n \times m$ , e

$$\begin{aligned} \Sigma_{ii} &= \sqrt{\lambda_i} \stackrel{def}{=} \sigma_i, & i = 1, \dots, r \\ \Sigma_{jk} &= 0, & \text{altrimenti} \end{aligned}$$

Gli  $r$  numeri positivi  $\sigma_i$  sono detti *valori singolari* di  $A$ .

Le matrici  $U$  e  $V$  sinora considerate rappresentano basi ortonormali arbitrariamente scelte (eccetto per il fatto che le ultime colonne sono una base di  $\ker A^T$  e  $\ker A$ , e le prime colonne sono una base di  $\text{Im } A$  e  $\text{Im } A^T$ , rispettivamente). Possiamo quindi scegliere una base, o meglio una relazione tra le basi dei quattro sottospazi, particolarmente utile. Faremo ora vedere che è possibile fare questo in modo che si possa scrivere

$$A = U \Sigma V^T$$

cioè in modo da ottenere quella che viene chiamata *Decomposizione ai Valori Singolari* (S.V.D.) di  $A$ .

Per far questo, fissiamo ad esempio arbitrariamente una base ortonormale di  $\text{Im } A^T$  nelle prime  $r$  colonne di  $V$ , e cerchiamo le corrispondenti colonne di  $U$  risolvendo  $AV = U\Sigma$ , ovvero

$$U(:, i) = \frac{1}{\sigma_i} AV(:, i), \quad i = 1, \dots, r$$

È facile verificare che queste soluzioni sono effettivamente colonne ortonormali ( $U(:, i)^T U(:, j) = \delta_{ij}$ ) e che formano una base di  $\text{Im } A$ : sono quindi legittime scelte per le prime  $r$  colonne di  $U$ . Per le altre colonne di  $U$  e  $V$ , basterà prendere i complementi ortonormali (usando ad esempio Gram-Schmidt).

Per costruire la SVD di una matrice  $A$   $n \times m$  (qualunque!) basta dunque:

1. Costruire  $A^T A$  e trovarne gli  $r$  autovalori non nulli  $\lambda_i$ . Porre  $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$  e costruire  $\Sigma$   $n \times m$  con  $\sigma_i$  sulla diagonale;
2. Costruire una matrice ortonormale  $m \times m$   $V$  le cui prime  $r$  colonne siano una base di  $\text{Im } A^T$ ;
3. Porre  $U(:, i) = \frac{1}{\sigma_i} AV(:, i)$  per le prime  $r$  colonne di  $U$ ;
4. Estendere queste  $r$  colonne di  $U$  ad una base ortonormale di  $\mathbb{R}^n$ .
5. Scrivere  $A = U \Sigma V$ .

Si noti che quanto sopra si applica sia al caso  $n \geq m$  che  $m \geq n$ . Nel secondo caso però, è più conveniente trovare gli autovalori di  $AA^T$ , in numero di  $n$ , e quindi applicare la procedura alla matrice  $A^T$ . La procedura non è d'altronde numericamente efficiente né stabile: per algoritmi migliori, si vedano testi di analisi numerica.



## A.3 Interpretazioni e applicazioni della SVD

### A.3.1 Pseudoinversa

Mediante la SVD, il problema di ottenere la soluzione di un sistema lineare  $Ax = b$  qualunque, nel senso di trovare la miglior approssimazione di minima norma, ha soluzione immediata. Riscriviamo infatti  $U\Sigma V^T x = b$ , e cambiamo le coordinate in entrambe gli spazi dominio e codominio ponendo  $x = V\bar{x}$  e  $b = U\bar{b}$ . Si ha, nelle nuove coordinate  $\Sigma\bar{x} = \bar{b}$ , cioè

$$\begin{aligned}\sigma_1\bar{x}_1 &= \bar{b}_1 \\ \vdots &= \vdots \\ \sigma_r\bar{x}_r &= \bar{b}_r \\ 0 &= \bar{b}_{r+1} \\ \vdots &= \vdots \\ 0 &= \bar{b}_n\end{aligned}$$

La soluzione che minimizza la somma dei quadrati dei residui è dunque  $x_1 = \frac{\bar{b}_1}{\sigma_1}, \dots, x_r = \frac{\bar{b}_r}{\sigma_r}$ , con le altre  $m - r$  componenti di  $\bar{x}$  che non influenzano il residuo e che quindi sono arbitrarie. D'altronde, per minimizzare  $x^T x = \bar{x}^T V^T V \bar{x} = \bar{x}^T \bar{x}$ , tali componenti si dovranno scegliere nulle. Tornando alle vecchie coordinate, si trova così la soluzione desiderata.

La matrice  $A^+$  che risolve il problema  $Ax = b$  nel senso che  $\hat{x} = A^+b$  è, tra i valori della  $x$  che minimizzano la norma due dei residui, quello a norma due minima, è dunque

$$A^+ = V\Sigma^+U^T$$

dove  $\Sigma^+$  è una matrice  $m \times n$  che ha sulla diagonale gli inversi dei valori singolari di  $A$ , e zeri altrove. Questa matrice è detta *pseudoinversa* (di Moore-Penrose) di  $A$ .

### A.3.2 Norma matriciale

In base alle relazioni sopra viste, il vettore della base canonica  $\bar{x} = e_i$  (le cui componenti sono nulle eccetto che la  $i$ -esima, che vale 1) viene trasformato da  $\Sigma$  in  $\sigma_i e_i$ , quindi la sua lunghezza passa da 1 a  $\sigma_i$ . Le lunghezze (o norme euclidee) dei vettori corrispondenti nelle coordinate originali stanno nello stesso rapporto. Infatti, posto  $x_i = V e_i = V(:, i)$ , si ha

$$\frac{\|Ax_i\|_2}{\|x_i\|_2} = \frac{\sqrt{x_i^T A^T A x_i}}{\sqrt{x_i^T x_i}} = \frac{\sqrt{\bar{x}_i^T \Sigma^T \Sigma \bar{x}_i}}{\sqrt{\bar{x}_i^T \bar{x}_i}} = \frac{\sqrt{\sigma_i^2}}{1} = \sigma_i$$

Se si rappresenta graficamente la immagine di  $Ax$  al variare di  $x$  sulla sfera unitaria in  $\mathbb{R}^m$  (cioè si normalizza  $x^T x = 1$ ), si ottiene quindi un ellissoide in  $\mathbb{R}^n$ , il cui semiasse maggiore vale  $\sigma_1$  ed è allineato con  $U(:, 1)$ ; il secondo semiasse maggiore è lungo  $\sigma_2$  ed è allineato con  $U(:, 2)$ , etc.. Il semiasse minore dell'ellissoide è allineato con  $U(:, r)$  ed è lungo  $\sigma_r$ . Se  $r < n$  (ricorda che  $n$  è la dimensione dello spazio immagine di  $A$ ), l'ellissoide è in effetti degenerare, cioè giace nella intersezione degli  $n - r$  iperpiani generati da  $U(:, r + 1), \dots, U(:, n)$ .

**Esempio:** In un problema di pianificazione di un sistema dinamico del tipo  $\bar{x} = Ru_t$ , l'asse maggiore dell'ellissoide associato alla matrice di raggiungibilità  $R$  rappresenta la direzione nella quale, a parità di costo del controllo, il sistema può essere portato a stati finali più lontani; il semiasse minore viceversa è la direzione "meno raggiungibile". Se si ha perdita di raggiungibilità, cioè di rango di  $R$ , l'ellissoide diviene degenerare, rimanendo contenuto nell'iperpiano  $\text{Im } R$  (quindi con semiasse di lunghezza nulla nella direzione perpendicolare a questo). ◇

Il massimo valor singolare di una matrice è quindi la massima "amplificazione" prodotta da  $A$  su un vettore  $x$ , se i vettori sono misurati in norma euclidea. La definizione di norma euclidea (o *norma due*) indotta su  $A$  dalla norma euclidea vettoriale è proprio data da

$$\|A\|_2 = \max_x \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} = \max_x \frac{\sqrt{x^T A^T A x}}{\sqrt{x^T x}},$$

per cui

$$\|A\|_2 = \sigma_1$$

Si noti che la norma due di una matrice coincide col massimo autovalore solo se  $A$  è simmetrica.

### A.3.3 Condizionamento di un sistema di equazioni

Si consideri un sistema di  $n$  equazioni in  $n$  incognite  $Ax = b$  in cui  $A = U\Sigma V^T$  sia invertibile, per cui si ha  $r = n$  e  $A^{-1} = V\Sigma^{-1}U^T$ .

Si desidera valutare l'effetto  $\delta x$  che una perturbazione  $\delta b$  del termine noto può avere sulla soluzione,

$$A(x + \delta x) = b + \delta b$$

ovvero

$$A\delta x = \delta b.$$

Vale la maggiorazione tra norme

$$\|\delta x\| \leq \|A^{-1}\| \|\delta b\|$$

che, nel caso si scelga la norma due, diviene

$$\|\delta x\|_2 \leq 1/\sigma_n \|\delta b\|_2.$$

Nel peggior caso, quindi, una perturbazione può venire amplificata nella soluzione tanto più quanto più è piccolo il minimo valore singolare della matrice. La sensibilità alla perturbazione tende a infinito quando il minimo valore singolare tende a zero - nel qual caso,  $A$  tende a perdere rango.

**Esempio:** In un problema di stima ottima del tipo  $Y = O\bar{x}$  con  $Y \in \mathbb{R}^t$  e  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $n < t$ , supponendo il sistema osservabile, siano  $\sigma_1, \dots, \sigma_n$  i valori singolari della matrice di osservabilità. La stima ai minimi quadrati risente quindi massimamente degli errori di misura nella direzione associata al valore singolare minimo: quando questo tende a zero (cioè il sistema tende a perdere osservabilità), un errore di misura anche piccolo può provocare grandi errori di stima. \_\_\_\_\_  $\diamond$

Più in generale, una misura di quanto una matrice sia vicina alla perdita di rango (in particolare, vicino alla singolarità nel caso di matrici quadrate  $n = m$ ) è il minimo valore singolare, e non il minimo autovalore: si consideri ad esempio  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1/\epsilon \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ , in cui gli autovalori sono sempre 1, ma i valori singolari sono invece dell'ordine di  $\epsilon$  e  $1/\epsilon$  per  $\epsilon$  piccoli (la matrice tende chiaramente alla singolarità per  $\epsilon \rightarrow 0$ ).

In molti casi, invece della valutazione della massima perturbazione assoluta  $\|\delta x\|$  (che può cambiare semplicemente moltiplicando entrambe i termini dell'equazione per una costante), è interessante valutare quella relativa,  $\|\delta\|/\|x\|$ . Essendo  $\|A\|\|x\| \geq \|b\|$ , si può scrivere

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \|A\| \|A^{-1}\| \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$$

Nel caso in cui si abbia perturbazione dei termini della matrice  $A$ , si può scrivere

$$(A + \delta A)(x + \delta x) = b$$

da cui

$$A\delta x + \delta A(x + \delta x) = 0$$

quindi

$$\delta x = -A^{-1}\delta A(x + \delta x).$$

Passando alle norme, si ha

$$\|\delta x\| \leq \|A^{-1}\| \|\delta A\| \|x + \delta x\|$$

quindi, in termini relativi, si ha

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x + \delta x\|} \leq \|A\| \|A^{-1}\| \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}.$$

La quantità  $\|A\| \|A^{-1}\|$  che determina la sensibilità delle soluzioni sia alle perturbazioni dei dati che a quelle della matrice, è detta *numero di condizione* di  $A$ . Se si usa la norma due, si ha

$$\|A^{-1}\| \|A\| = \frac{\sigma_1}{\sigma_n},$$

cioè il numero di condizione è il rapporto tra minimo e massimo valore singolare, ovviamente sempre maggiore di uno.

### A.3.4 Compressione di dati

Si consideri per esempio una immagine di dimensione  $N \times N$ , con  $N$  grande, e si desideri isolare (per limiti di risorse) i dati di maggior rilievo contenuti nella matrice. Scrivendo la SVD della matrice dei dati,

$$A = U\Sigma V^T = U(:, 1)\sigma_1 V(:, 1)^T + U(:, 2)\sigma_2 V(:, 2)^T + \dots$$

ogni termine della sommatoria contiene solo  $2N$  dati. Troncando la sommatoria quando i valori singolari (ordinati in senso decrescente) diminuiscono al di sotto di un certo valore  $\epsilon$ , si ottengono approssimazioni dell'immagine di crescente risoluzione per  $\epsilon \rightarrow 0$ .