Esercitazioni di Controlli Automatici sulla stabilità dei sistemi non lineari

Lucia Pallottino

050-553639, l.pallottino@ing.unipi.it
Università di Pisa

December 9, 2003

Esempio 1 Dato il seguenta sistema dinamico tempo discreto non lineare, studiare la stabilità dell'equilibrio nell'origine.

$$x(t+1) = x(t) + ax(t)^3$$

La matrice del linearizzato calcolato nell'origine è $A = 1$. Sia $V = x(t)^2$ si ha $\Delta V = x(t+1)^2 - x(t)^2 = (x(t) + ax(t)^3)^2 - x(t)^2$ da cui

$$\Delta V = a^2x(t)^6 + 2ax(t)^4$$

Se $a > 0$ si ha instabilità, se $a = 0$ l'equilibrio è marginalmente stabile, infine se $a < 0$ l'equilibrio è asintoticamente stabile.

Esempio 2 Stabilizzazione sulla retta $y = 0$.
Dato il sistema dinamico

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \omega \tag{1}$$

nel caso in cui $u(t) = \bar{u}$ assegnato si determini ω che stabilizzazi il veicolo lungo la retta $y = 0$. La traiettoria di equilibrio è quindi $y(t) = 0$ e $\theta(t) = 0$.

Si consideri $V = y^2 + \theta^2$ si ha $\dot{V} 2y \sin\theta\bar{u} + 2\theta\omega$ scelto $\omega = -\frac{y\sin\theta\bar{u}}{\theta} - \theta$ (si noti che ω è definita anche nell'origine). Con questa scelta si ha $\dot{V} = -2\theta^2$ che risulta semidefinita negativa.

Sia $N = \{(y,\theta)|\dot{V} = 0\} = \{(a,0)|a \in \mathbf{R}\}$ se si vuole applicare il criterio di Krasowskii è necessario verificare se le traiettorie del sistema che partono dentro N non fuoriescano da N: in N $\theta = 0$ e quindi anche $\dot{\theta} = 0$ da cui segue $\omega = 0$. Dalla scelta di ω si ottiene che anche $y = 0$ e quindi il criterio di Krasowskii è verificato e la traiettoria di equilibrio, con il controllo ω scelto, è asintoticamente stabile.

Esempio 3 Dato il sistema dinamico tempo continuo non lineare si calcolino gli equilibri e se ne studi la stabilità.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2^3 \\ \dot{x}_2 = (-x_1 + a)^3 \end{cases} \tag{2}$$

Il punto di equilibrio è $(a, 0)$. La matrice del linearizzato è

$$\begin{bmatrix} 0 & -3x_2^2 \\ -3(-x_1 + a)^2 & 0 \end{bmatrix} \tag{3}$$

che calcolata nel punto di equilibrio vale

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4}$$

per la presenza di due autovalori a parte reale nulla non si può conludere niente sulla stabilità dell'equilibrio del sistema non lineare.

Si sceglie un nuovo sistema di riferimento che ha l'origine nel punto di equilibrio con la seguente trasformazione:

$$\begin{cases} z_1 = -x_1 + a \\ z_2 = x_2 \end{cases} \tag{5}$$

il sistema nel nuovo sistema di riferimento risulta

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2^3 \\ \dot{z}_2 = z_1^3 \end{cases} \tag{6}$$

Si consideri la funzione $V = z_1 z_2$ si ha

$$\dot{V} = z_1^4 + z_2^4$$

che risulta definita positiva.

Vorremmo applicare il teorema di instabilità di Cetaev. Sia W un intorno dell'origine nel piano $(z_1,\, z_2)$, ad esempio una circonferenza di raggio unitario. Sia A l'insieme aperto formato dal primo quadrante esclusi gli assi cartesiani. È vero che $(0,\,0) \in \partial A \cup A$ (in particolare $(0,\,0) \in \partial A$). Si ha inoltre che $\forall z (\neq (0,\,0)) \in A \cap W$ la V e $\dot{V}$ assumono valori strettamente positivi. Infine sia per $z = (0,\,0)$ che per $\forall z \in \partial A \cap W$ la funzione V è nulla. Le ipotesi del teorema di Cetaev sono tutte verificate e quindi l'equilibrio risulta instabile.

Esempio 4 Data l'equazione differenziale non lineare

$$\ddot{y}(t) + y^3(t) = u(t)$$

Determinare una rappresentazione in forma di stato, studiare i punti di equilibrio e verificare che l'origine è un punto di equilibrio almeno marginalmente stabile per $u = 0$. Determinare infine un ingresso $u(t)$ che renda l'origine un punto di equilibrio asintoticamente stabile.

Definendo $x_1(t) = y(t)$ $x_2(t) = \dot{y}(t)$, si ottiene il sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1^3 + u \end{cases}$$

È immediato verificare che l'unico punto di equilibrio è l'origine. Il linearizzato calcolato nell'origine risulta

$$A(0,\,0)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

che ha due autovalori nulli e quindi non è possibile concludere niente sulla stabilità dell'equilibrio per il sistema non lineare.

Si consideri allora la generica candidata di Lyapunov $V = ax_1^p + bx_2^q$, si ha $\dot{V} = apx_1^{(p-1)}x_2 - bqx_2^{(q-1)}x_1^3$, se si vuole cancellare i termini misti si può porre $q = 2$, $p = 4$, $a = 1$, $b = 2$; con questa scelta si ha $\dot{V} = 0$. L'equilibrio nell'origine è quindi marginalmente stabile.

Con la stessa candidata di Lyapunov del punto precedente ($V = x_1^4 + 2x_2^2$), per $u \neq 0$ si ha $\dot{V} = 4x_2u$. Scelto $u = -x_2$: $\dot{V} = -4x_2^2$ che è semi-definita negativa e si annulla sull'insieme $N = \{(a, 0)|a \in \mathbf{R}\}$, se $x_2 = 0$, per restare nell'insieme N si deve avere anche $\dot{x}_2 = 0$ che implica $-x_1^3 - x_2 = -x_1^3 = 0$ da cui segue che l'insieme N contiene solo l'origine e quindi, per il teorema di Lasalle-Krasowskii, l'equilibrio è asintoticamente stabile.

Esempio 5 Dato il seguenta sistema dinamico tempo continuo non lineare si calcolino gli equilibri e se ne studi la stabilità al variare di α, γ, δ.

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = -(x_1+\alpha)^3 + (x_2+\gamma)^3\\ \dot{x}_2 = -(x_1+\alpha)^3 - (x_2+\gamma)^3\delta\end{cases} \tag{7}$$

Il punto di equilibrio è dato da

$$\begin{array}{l}\dot{x}_1 = 0 \Rightarrow (x_1+\alpha)^3 = (x_2+\gamma)^3 \Rightarrow x_1+\alpha = x_2+\gamma\\ \dot{x}_2 = 0 \Rightarrow -(x_2+\gamma)^3 = (x_2+\gamma)\delta.\end{array} \tag{8}$$

Si hanno due casi: $A)x_2 + \gamma = 0$, $B)x_2 + \gamma \neq 0$.

A) Caso $x_2 + \gamma = 0$.

In questo caso il punto di equilibrio è $(-\alpha, -\gamma)$.

La matrice del linearizzato è

$$\begin{bmatrix}-3(x_1+\alpha)^2 & 3(x_2+\gamma)^2\\ -3(x_1+\alpha)^2 & -\delta\end{bmatrix} \tag{9}$$

che calcolata nel punto di equilibrio vale

$$A=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & -\delta\end{bmatrix} \tag{10}$$

Per cui se $\delta < 0$ l'equilibrio è instabile mentre se $\delta \geq 0$ il linearizzato non ci consente di concludere niente sulla stabilità dellequilibrio per il sistema non lineare.
Se $\delta \geq 0$ si cambia sistema di riferimento in modo che l'equilibrio risulti nell'origine con la seguente trasformazione

$$\left\{ \begin{array}{l} z_1 = x_1 + \alpha \\ z_2 = x_2 + \gamma \end{array} \right. \tag{11}$$

il sistema nel nuovo sistema di riferimento risulta

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{z}_1 = -z_1^3 + z_2^3 \\ \dot{z}_2 = -z_1^3 - z_2\delta \end{array} \right. \tag{12}$$

Si consideri, ad esempio, la funzione $V = z_1^2 + az_2^2$ si ha

$$\dot{V} = -2z_1^4 + 2z_1z_2^3 - 2az_2z_1^3 - 2az_2^2\delta$$

che non risulta definita. Si provi allora con la funzione $V = z_1^4 + az_2^4$ si ha

$$\dot{V} = -4z_1^6 + 4z_1^3z_2^3 - 4az_1^3z_2^3 - 4az_2^4\delta$$

scelto $a = 1$ si ottiene $\dot{V} = -4z_1^6 - 4z_2^4\delta$ che è definita negativa per $\delta > 0$ e quindi l'equilibrio è asintoticamente stabile. Se $\delta = 0$ la $\dot{V}$ è semidefinita negativa e si annulla su tutti i punti di $N = \{(0,k)|k \in \mathbf{R}\}$. Per ogni traiettoria del sistema contenuta in N deve essere $\dot{z}_1 = 0$ da cui $k = 0$, quindi applicando il criterio di Krasowskii si ottiene che l'equilibrio è asintoticamente stabile.

B) Caso $x_2 + \gamma \neq 0$.
Si hanno punti di equilibrio solo se $\delta < 0$ e in questo caso si ha $x_2 + \gamma = \pm\sqrt{-\delta}$. I punti di equilibrio sono $x^1 = (-\alpha + \sqrt{|\delta|}, -\gamma + \sqrt{|\delta|})$ e $x^2 = (-\alpha - \sqrt{|\delta|}, -\gamma - \sqrt{|\delta|})$. per entrambe i punti di equilibrio la matrice del linearizzato risulta

$$A = |\delta| \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \tag{13}$$

che ha autovalori a parte reale negativa e quindi gli equilibri sono asintoticamente stabili.