

# Progetto di un controllore dinamico

Regolazione e controllo dei sistemi meccanici

Ingegneria Meccanica

Versione Provvisoria del 12 Dicembre 2003.

## 1 Progetto del controllore

Il progetto di un controllore prevede la verifica contemporanea, da parte di un sistema chiuso in retroazione, di tutte le specifiche richieste. Presa singolarmente ogni specifica richiede che la funzione di trasferimento del guadagno d'anello abbia determinate caratteristiche.

Descriveremo in modo generale le tecniche di progetto di un controllore per soddisfare le specifiche tipicamente richieste ad un sistema dinamico, e applicheremo alcune di queste tecniche al caso specifico del compito del 30/10/2002 di cui diamo una breve descrizione. Il sistema meccanico è riportato in fig.1 e la funzione di trasferimento tra la posizione  $x_1(t)$  della massa  $m$  e l'ingresso  $u(t)$  risulta

$$\begin{aligned} P(s) &= \frac{Ms^2 + Cs + (K_1 + K_2)}{Mms^4 + Cms^3 + (MK + (K_1 + K_2)m)s^2 + CK_1s + K_1K_2} = \\ &= \frac{s^2 + s + 75}{s^4 + s^3 + 1075s + 1000s + 25000}, \end{aligned} \quad (1)$$

ed è asintoticamente stabile con poli in  $[-0.02 \pm j32.42, -0.47 \pm j4.85]$ .

Nelle considerazioni che seguono faremo riferimento ad un controllore dinamico descritto tramite la sua funzione di trasferimento espressa nella forma di Bode:

$$C(s) = \frac{K}{s^q} \hat{C}(s), \quad (2)$$

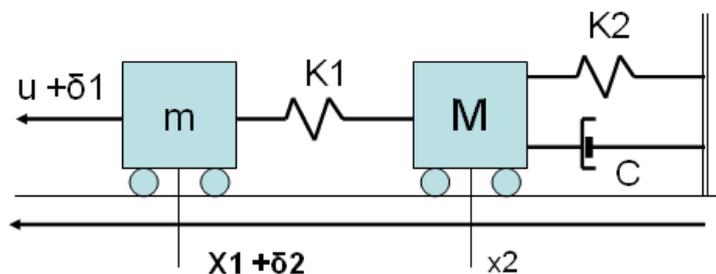


Figure 1: Sistema meccanico assegnato al compito del 30/10/2002.

dove  $\hat{C}(0) = 1$ , ovvero

$$\hat{C}(s) = \frac{\prod_{i=1}^{zs} (1 + \tau_i s) \prod_{j=1}^{zd} (1 + 2\frac{\delta_j}{\omega_j} s + \frac{s^2}{\omega_j^2})}{\prod_{h=0}^{ps} (1 + \tau_h s) \prod_{k=0}^{pd} (1 + 2\frac{\delta_k}{\omega_k} s + \frac{s^2}{\omega_k^2})},$$

dove  $q \geq 0$  e  $ps + pd + q \geq zs + zd$  affinché sia verificata la condizione di causalità; supporremo inoltre che tale controllore sia posto a monte dell'impianto nella catena di azione del sistema complessivo chiuso in retroazione unitaria e negativa, vedi fig.2.

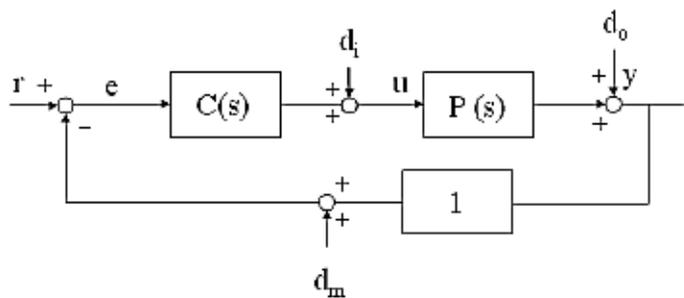


Figure 2: Schema a blocchi di un sistema  $P$  chiuso in retroazione negativa ed unitaria.

Di seguito riportiamo le specifiche tipicamente richieste ad un sistema meccanico distinguendo tra **Specifiche Statiche** e **Dinamiche**.

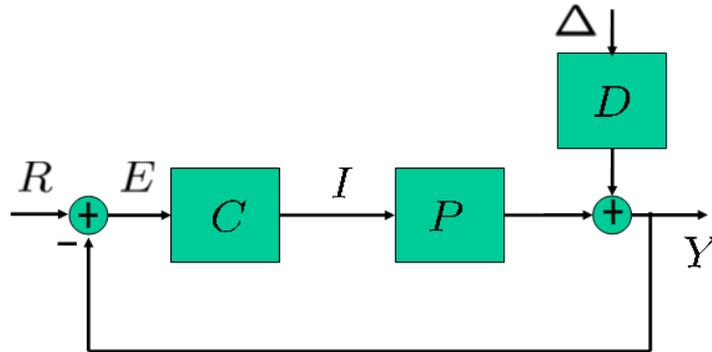


Figure 3: Schema a blocchi di un sistema  $P$  chiuso in retroazione negativa ed unitaria in presenza di un disturbo sull'uscita con funzione di trasferimento  $D(s)$ .

### 1.1 Errore a Gradino, Rampa e Parabola in presenza di disturbi costanti (Statiche)

Il segnale errore  $e(t)$  a valle del sottrattore in fig.2 è funzione di tutti gli ingressi del sistema, siano essi riferimenti o disturbi. Supponendo per ora che sia nullo il disturbo di misura  $d_m(t)$  (il contributo di tale segnale verrà considerato in seguito), la trasformata di Laplace di  $e(t)$  risulta

$$E(s) = \frac{1}{1 + C(s)P(s)}R(s) - \frac{P(s)}{1 + C(s)P(s)}D_i(s) - \frac{1}{1 + C(s)P(s)}D_o(s). \quad (3)$$

Si richiede tipicamente che tale errore sia nullo a regime, nonostante la presenza di disturbi (dei quali si conosce il solo contenuto frequenziale) solo in corrispondenza di particolari segnali di ingresso (permanenti e di tipo polinomiale nel tempo). Nel caso particolare del compito,  $D_o = 0$  e la massa  $m$  deve raggiungere in modo esatto un riferimento di posizione assegnato, nonostante un disturbo  $\delta_1$  costante. Inoltre, quando sia richiesto l'inseguimento di un profilo di moto lineare del tipo  $x_{rif} = At$ , si deve garantire un errore di posizione a regime inferiore a  $0.1 A$ . Da notare come in questo caso specifico il disturbo non è completamente conosciuto ma comunque costante.

Nel dominio della variabile  $s$ , qualora fossero verificate le ipotesi del teo-

rema del valore finale, le specifiche del compito si traducono nella seguente condizione

$$0 = e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s E(s).$$

Consideriamo separatamente il contributo del disturbo e del riferimento.

### 1.1.1 Contributo del disturbo sull'errore

Nel caso del solo disturbo (costante)

$$0 = \lim_{s \rightarrow 0} s E(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{-P(s)}{1 + \frac{K}{s^q} \hat{C}(s) P(s)} \frac{\gamma}{s},$$

dove  $\gamma$  indica l'ampiezza del gradino che supponiamo essere non conosciuta. A prescindere dal numero di poli nell'origine dell'impianto  $P(s)$ , per avere errore nullo a regime è necessario inserirne uno nel controllore poichè

$$\lim_{s \rightarrow 0} \gamma \frac{-P(s)}{1 + \frac{K}{s^q} \hat{C}(s) P(s)} \approx \lim_{s \rightarrow 0} \gamma \frac{-P(s)}{\frac{K}{s^q} \hat{C}(s) P(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \gamma \frac{-s^q}{K} = 0,$$

solo se  $q \geq 1$ .

Non è infrequente che l'impianto sia descritto tramite due funzioni di trasferimento, la  $P(s)$ , relativa all'ingresso di controllo  $I$ , e la  $D(s)$ , quando sia presente un disturbo  $\Delta$ , ovvero

$$Y(s) = P(s)I(s) + D(s)\Delta(s).$$

In questo caso lo schema a blocchi è fornito in fig.3 mentre la trasformata dell'errore del sistema complessivo risulta

$$E(s) = \frac{1}{1 + C(s)P(s)} R(s) + \frac{D(s)}{1 + C(s)P(s)} \Delta(s). \quad (4)$$

Riapplicando il teorema del valore finale al contributo del disturbo otteniamo

$$\lim_{s \rightarrow 0} E(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \gamma \frac{D(s)}{1 + \frac{K}{s^q} \hat{C}(s) P(s)}.$$

In questo caso particolare l'azzeramento dell'effetto a regime del disturbo costante e quindi il numero di poli nell'origine da inserire nel controllore dipendono da quelli già presenti in  $D(s)$  e  $P(s)$  in anello aperto. Le due funzioni di trasferimento condividono parte dei poli (quelli osservabili e raggiungibili in entrambe) tra i quali quelli nell'origine; la scelta del tipo del controllore dipende dalla differenza di numero di quest'ultimi.

### 1.1.2 Contributo del riferimento sull'errore

Consideriamo il caso in cui il riferimento sia una combinazione di funzioni polinomiali nel tempo ovvero

$$r(t) = \sum_{i=0}^{n_r} \alpha_i \frac{t^i}{i!} \rightarrow R(s) = \sum_{i=0}^{n_r} \frac{\alpha_i}{s^{(i+1)}} = \frac{\sum_{i=0}^{n_r} \alpha_i s^{n_r-i}}{s^{n_r+1}},$$

da cui segue che l'errore a regime è pari a

$$\lim_{s \rightarrow 0} s E(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + \frac{K}{s^q} \hat{C}(s) P(s)} \frac{\sum_{i=0}^{n_r} \alpha_i s^{n_r-i}}{s^{n_r+1}},$$

ovvero

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=0}^{n_r} \alpha_i s^{n_r-i}}{s^{n_r} + s^{n_r-q-n_p} K \hat{C}(s) P_0 \hat{P}(s)}, \quad (5)$$

avendo posto  $P(s) = \frac{P_0}{s^{n_p}} \hat{P}(s)$ . Possiamo distinguere i seguenti casi:

- $n_r = 1$  (5) risulta essere  $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\alpha_0}{1 + s^{-q-n_p} K P_0 \hat{C}(s) \hat{P}(s)}$ ;
- $n_r > 1$  il limite (5) è approssimabile con  $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\alpha_{n_r} s^{q-n_r+n_p}}{K P_0}$ .

Dalla precedenti espressioni si deduce che se il valore finale deve essere nullo allora la scelta di  $q$  è legata a  $n_r$  ed al numero  $n_p$  di poli nell'origine di  $P(s)$  dalla seguente relazione:

$$q \geq n_r - n_p.$$

Nel caso del compito la funzione di trasferimento dell'impianto non ha poli nell'origine ( $n_p = 0$ ); pertanto per annullare l'errore al gradino ( $U(s) = \frac{1}{s}$  quindi  $n_r = 1$ ) è necessario inserire un polo nell'origine nel controllore ( $q = 1$ ). Da notare che il polo nell'origine era stato già inserito nel controllore per annullare gli effetti del disturbo (vedi 1.1.1).

Se è richiesto che l'errore a regime sia limitato ma non nullo è necessario che scegliere  $q$  in modo che  $q + n_p = n_r - 1$ . Successivamente, agendo sul guadagno statico  $K$ , è possibile portare l'errore al valore desiderato.

Nel caso del compito veniva richiesto che l'errore in corrispondenza di una rampa  $At$  fosse inferiore a  $0.1 A$ ; questo corrisponde a chiedere

$$\lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + \frac{K}{s} \hat{G}(s) P(s)} \frac{A}{s^2} \approx \frac{A}{K P(0)} \leq 0.1 A,$$

ovvero  $K \geq 0.1 P_0$ .

## 1.2 Specifiche in media e alta frequenza (Dinamiche)

Abbiamo visto come le specifiche riguardanti la risposta a segnali permanenti (di tipo polinomiale nel tempo), siano essi degli ingressi di controllo o di disturbo, si riferiscano al solo tipo del guadagno d'anello e al suo guadagno statico. Nella verifica di queste specifiche sono stati scelti solo  $K$  e  $q$  della 2. Della  $\hat{C}(s)$  abbiamo detto solo che non modifica il guadagno statico del controllore ovvero  $\hat{C}(0) = 1$ .

Le specifiche successive si riferiscono a tutte le restanti frequenze e pertanto vengono dette in media-alta frequenza.

### 1.2.1 Robustezza alle variazioni dei parametri

La funzione di trasferimento di un sistema dinamico dipende da tutti i parametri che compaiono nel modello dell'impianto. L'incertezze sul valore di un parametro intorno al proprio valore nominale comporta un'incertezza sulla conoscenza della f.d.t. .

Supponiamo che la funzione di trasferimento dell'impianto sia funzione di un parametro  $m$ :  $P = P(s, m)$  .

L'incertezza sull'uscita complessiva  $Y(s) = \frac{C(s)P(s,m)}{1+C(s)P(s,m)}R(s)$  dovuta al parametro  $m$  sarà

$$\Delta Y(s) = \left. \frac{\partial Y(s)}{\partial m} \right|_{m=\bar{m}} \Delta m = \frac{\partial Y(s)}{\partial P(s)} \frac{\partial P(s)}{\partial m} \Big|_{m=\bar{m}} \Delta m,$$

ovvero

$$\Delta Y(s) = \frac{C(s)}{(1 + C(s)P(s, \bar{m}))^2} \frac{\partial P(s)}{\partial m} \Big|_{m=\bar{m}} \Delta m R(s).$$

Ne segue che

$$\frac{\Delta Y(s)}{Y(s)} = \frac{1}{P(s, \bar{m}) (1 + C(s)P(s, \bar{m}))} \frac{\partial P(s, m)}{\partial m} \Big|_{m=\bar{m}} \Delta m,$$

dalla quale si ottiene

$$\frac{\frac{\Delta Y(s)}{Y(s)}}{\frac{\Delta m}{\bar{m}}} = \frac{1}{1 + C(s)P(s, \bar{m})} \Sigma_P(s) = \Sigma(s) \Sigma_P(s) = \Sigma_T(s),$$

dove  $\Sigma_P(s) = \left. \frac{\partial P(s,m)}{\partial m} \right|_{m=\bar{m}} \frac{\bar{m}}{P(s,\bar{m})}$  è la Sensibilità dell'impianto ad anello aperto e  $\Sigma(s)$  è il fattore di attenuazione dovuto alla retroazione. Per attenuare il valore complessivo della sensibilità ad anello chiuso  $\Sigma_T(s)$  si deve progettare il controllore in modo che il modulo di  $\Sigma(j\omega)$  sia sufficientemente piccolo nel range di frequenze considerato. A tal proposito si deve scegliere  $C(s)$  in modo che  $|C(j\omega)P(j\omega, \bar{m})|_{db} \gg 0_{db}$ . Con questa scelta si ha  $|\Sigma(j\omega)|_{db} \approx -|C(j\omega)P(j\omega, \bar{m})|_{db}$ . Nei diagrammi di Bode questa specifica si traduce in una zona del piano non permessa al modulo del guadagno d'anello come in fig.4. Qualora il modulo del solo impianto non fosse sufficiente si può agire

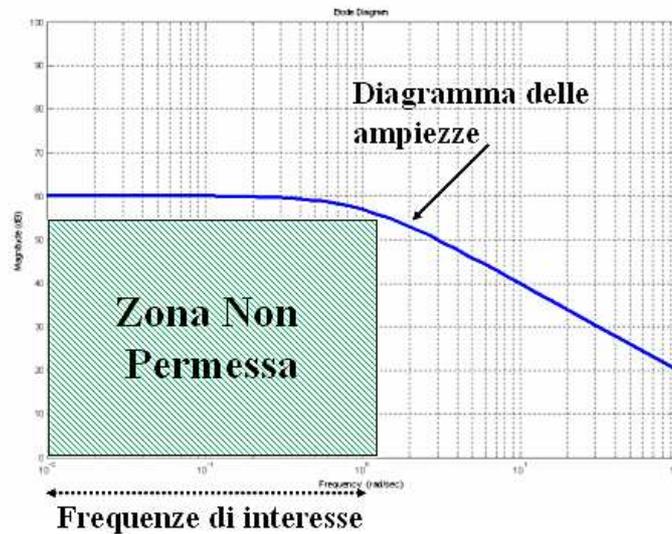


Figure 4: Nella figura viene evidenziata una zona non concessa al diagramma delle ampiezze del guadagno d'anello, dovuta alla specifica sulla Sensibilità.

su quello del controllore in quanto  $|C(j\omega)P(j\omega)|_{db} = |C(j\omega)|_{db} + |P(j\omega)|_{db}$ . Per incrementare il modulo del controllore la soluzione non è unica:

- si può incrementare il guadagno statico del controllore in modo da sommare in decibel un contributo costante;
- si possono aggiungere degli zeri in bassa frequenza in modo da incrementare il modulo del controllore solo dove è necessario.

Nonostante le due soluzioni siano identiche in termini di Sensibilità complessiva, la seconda risulterà tipicamente piú conveniente per le specifiche successive (vedi 1.2.2).

Nel compito si assume che la massa  $m$  possa essere variabile nel tempo in modo non noto, ma che il suo valore possa differire dal valore sopra assegnato di una quantità non superiore a  $\delta m$  con  $|\delta m|/|m| \leq 20\%$ , e che queste variazioni della massa avvengano con frequenze non superiori a  $\frac{10}{2\pi} Hz$ . In queste condizioni, si deve garantire che il sistema alteri il proprio funzionamento nominale  $y$  corrispondente ad un qualsiasi ingresso di una quantità  $\delta y$  che sia limitata da  $|\delta y| \leq 0.01|y|$ .

Nel caso specifico del compito la specifica si traduce in

$$\left| \frac{\delta y(s)}{y(s)} \right| = \left| \Sigma(s) \frac{\partial P(s)}{\partial m} \frac{m}{P(s)} \frac{\delta m}{m} \right| \leq 0.01.$$

Valutiamo adesso il termine  $\frac{\partial P(s)}{\partial m} \frac{m}{P(s)} = \Sigma_P(s)$  di sensibilità relativa dell'impianto in anello aperto che appare nella formula precedente, avendo preventivamente posto  $P(s) = \frac{n(s)}{d(s)}$ :

$$\Sigma_P(s) = \frac{\partial P(s)}{\partial m} \frac{m}{P(s)} = \frac{\partial}{\partial m} \left( \frac{n(s)}{d(s)} \right) \frac{md(s)}{n(s)} = -\frac{m}{d(s)} \frac{\partial d(s)}{\partial m}$$

e, trovando con semplici calcoli

$$\frac{\partial d(s)}{\partial m} = Ms^4 + Cs^3 + (K_1 + K_2)s^2$$

otteniamo

$$\Sigma_P(s) = m \frac{Ms^4 + Cs^3 + (K_1 + K_2)s^2}{Mms^4 + Cms^3 + (MK + (K_1 + K_2)m)s^2 + CKs + K_1K_2}$$

In conclusione abbiamo

$$\left| \frac{\delta y(s)}{y(s)} \right| = \left| \Sigma(s) \Sigma_P(s) \frac{\delta m}{m} \right| \leq 0.01$$

andiamo a valutare il massimo valore che il modulo di  $\Sigma_P(s)$  assume per pulsazioni tra 0 e  $10 rad/sec$ , facendo il relativo diagramma di Bode:

Si ottiene che  $\max_{0 < \omega \leq 10 rad/sec} |\Sigma_P(j\omega)| \approx -12db \approx 1/4$ . Si ha finalmente che la specifica sarà garantita se, nello stesso range di pulsazioni, si garantisce che

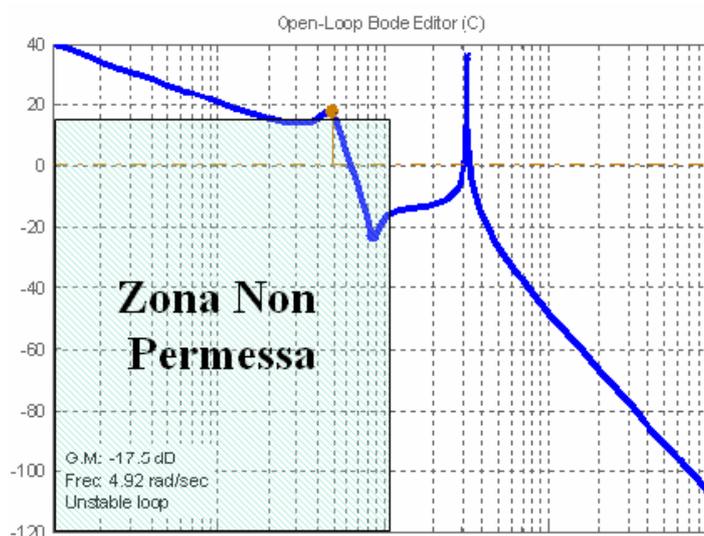


Figure 5: Diagramma di Bode delle ampiezze di  $\frac{K}{s^q}P(s)$ . La specifica sulla Sensibilità non è verificata.

la funzione di sensibilità dell'anello chiuso  $\Sigma(s)$  sia sempre in modulo inferiore o uguale a 0.2. Ciò a sua volta è ottenuto se si realizza un controllore tale che, nello stesso campo di pulsazioni, si abbia

$$|C(j\omega)P(j\omega)| > 6$$

specifiche che è riportata nella fig.5. Nella stessa figura possiamo notare come la specifica non sia rispettata in quanto il modulo del guadagno d'anello attraversa la zona non permessa.

Per soddisfare la specifica si può procedere in due modi:

- aumentare di un fattore 200, pari a  $46_{db}$ , il precedente guadagno statico del controllore;
- introdurre due zeri in bassa frequenza in modo da decrementare la pendenza del diagramma per evitare la zona non permessa.

### 1.2.2 Stabilità, Margini e Approssimazione a Polo/i Dominante/i

Quando l'impianto dato è stabile (anche se marginalmente) e a fase minima, il progetto può essere condotto operando direttamente sul

diagramma di Bode delle ampiezze del sistema in catena aperta, cioè di  $C(s)P(s)$ . In particolare affinché il sistema sia asintoticamente stabile i margini di fase e di ampiezza devono essere entrambi maggiori di zero.

In realtà non sarà sufficiente che i margini siano solo maggiori di zero ma sarà necessario che siano maggiori di opportuni valori minimi fissati dalle seguenti specifiche.

### 1.2.3 Approssimazione a polo/i dominante/i

Consideriamo il modulo della funzione di trasferimento di un sistema chiuso in retroazione negativa ed unitaria

$$|G_c(j\omega)| = \left| \frac{G(j\omega)}{1 + G(j\omega)} \right| = \frac{|G(j\omega)|}{|1 + G(j\omega)|}$$

In base all'andamento del modulo della  $G(j\omega)$  nel diagramma di Bode è possibile identificare tre zone, vedi fig.6:

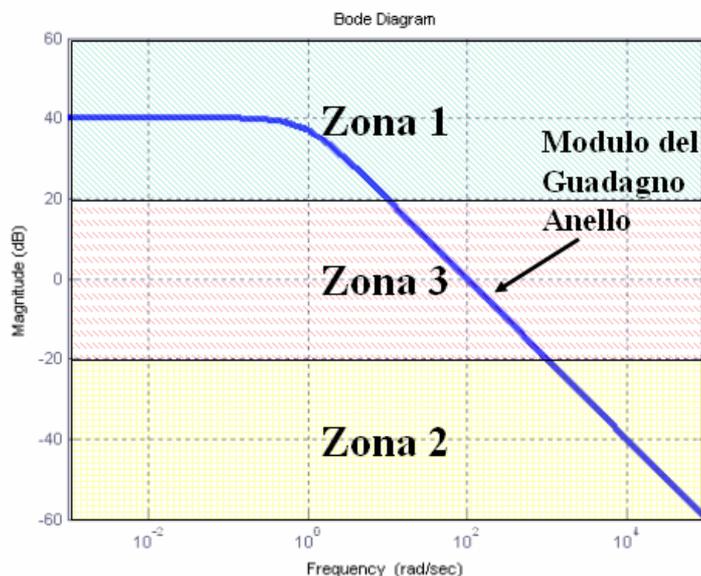


Figure 6: Suddivisione del diagramma delle ampiezze.

1. zona (1) con  $|G(j\omega)|_{db} > 20_{db}$ . In questo caso  $|1 + G(j\omega)| \approx |G(j\omega)|$  per la quale si ottiene  $|G_c(j\omega)| \approx 1$  (in decibel  $|G_c(j\omega)|_{db} \approx 0$ );

2. zona (2) con  $|G(j\omega)|_{db} < -20_{db}$ . In questo caso  $|1 + G(j\omega)| \approx 1$  per la quale si ottiene  $|G_c(j\omega)| \approx |G(j\omega)|$  (in decibel  $|G_c(j\omega)|_{db} \approx |G(j\omega)|_{db}$ );
3. zona (3) con  $-20_{db} < |G(j\omega)|_{db} < 20_{db}$ . In questo caso la  $|1 + G(j\omega)|$  non può essere approssimata con nulla.

In base a quest'ultima ripartizione del diagramma delle ampiezze possiamo approssimare l'andamento del modulo della funzione di trasferimento in anello chiuso come segue:

- Per i punti 1) e 2) dell'elenco precedente l'approssimazione è già indicata. Nella fig.7 l'andamento del modulo di  $G_c(j\omega)$  (in rosso) segue quello di  $G(j\omega)$  (blu) quando quest'ultima è inferiore a  $-20_{db}$  mentre è pari a  $0_{db}$  nel range di frequenze nel quale  $|G(j\omega)|_{db} > 20_{db}$ .
- Nella zona (3) si prolungano gli andamenti del modulo dei punti precedenti fino a farli intersecare in un punto ( $\omega_T$  o **Pulsazione di Taglio**), vedi l'andamento tratteggiato in rosso in fig.7.

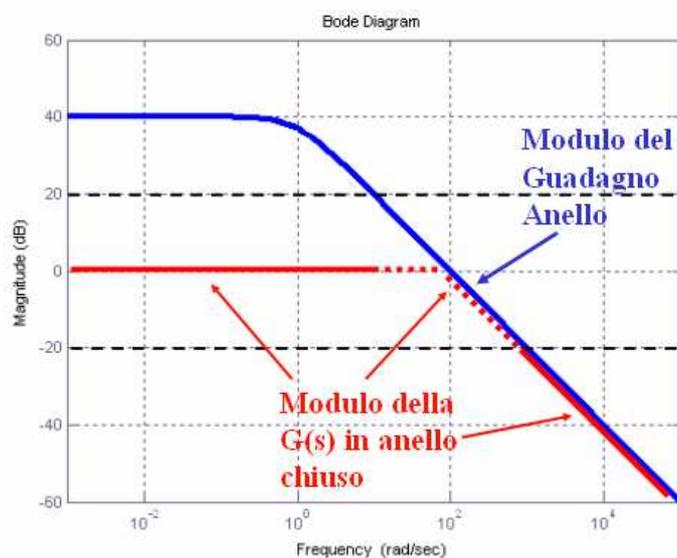


Figure 7: Approssimazione a polo/i dominante/i. Andamento del modulo del guadagno d'anello (blu) e della funzione di trasferimento complessiva (rosso).

L'andamento complessivo del modulo della  $G_c(j\omega)$  é detto a **Polo/i Dominante/i** in quanto l'andamento che se ne ottiene é di tipo passa-basso con una singolarit  che "domina" le altre. Se infatti osservassimo l'andamento temporale della risposta libera del sistema complessivo potremmo notare che un modo del sistema permane pi  degli altri.

  importante puntualizzare che l'approssimazione a polo dominante risulta meno valida quando la  $G(s)$  ha delle singolarit  nella zona (3).

Per noi sono di maggiore interesse i seguenti casi:

1. Il modulo della  $G_c(j\omega)$  rimane a zero decibel fino alla pulsazione  $\omega_T$  (**pulsazione di taglio**) per iniziare a scendere con una pendenza di  $-20 \text{ db/dec}$ . In tal caso parliamo di **Polo Dominante** e approssimiamo la  $G_c(s)$  con

$$G_c(s) = \frac{1}{1 + \tau s}, \quad (6)$$

dove  $\tau = \frac{1}{\omega_T}$ . Affinch  questa approssimazione sia maggiormente valida il valore della fase di  $G_c(j\omega_T)$  (punto del taglio) dovrebbe essere prossima a  $-45^\circ$  (quella che si ha in corrispondenza di un polo asintoticamente stabile). In corrispondenza della pulsazione di taglio il modulo della  $|G(j\omega)|_{\omega=\omega_T} = 1$  quindi possiamo scrivere

$$G_c(j\omega_T) = \frac{e^{j\phi}}{1 + e^{j\phi}} = \frac{e^{j\phi}(1 + \cos(\phi) - j \sin(\phi))}{(1 + \cos(\phi))^2 + \sin^2(\phi)}, \quad (7)$$

dove  $\phi$    la fase di  $G(j\omega_T)$ . La fase della (7) pu  esser scritta

$$\angle G_c(j\omega_T) = \phi - \arctan \frac{\sin(\phi)}{1 + \cos(\phi)}. \quad (8)$$

Se la fase di  $G(j\omega_T)$    prossima a  $-90^\circ$  la (8) pu  essere approssimata con

$$\angle G_c(j\omega_T) \approx -90^\circ - \arctan \frac{\sin(-90^\circ)}{1} = -45^\circ.$$

Da questo si deduce che se il margine di fase risulta prossimo a  $90^\circ$  (fase prossima a  $-90^\circ$ ) la fase della  $G_c(j\omega_T) = -45^\circ$ .

Si ricorda che nel caso valga l'approssimazione a polo dominante il sistema a ciclo chiuso ha una risposta al gradino monotona con tempo di assestamento  $T_a = 3\tau = \frac{3}{\omega_T}$ .

2. Il modulo della  $G_c(j\omega)$  rimane a zero decibel fino alla pulsazione  $\omega_T$  per iniziare a scendere con una pendenza di  $-40\text{ db/dec}$ . In tal caso parliamo di **Poli Dominanti** (intendendone una coppia di complessi coniugati) e approssimiamo la  $G_c(s)$  con

$$G_c(s) = \frac{1}{1 + 2\delta\frac{s}{\omega_T} + \frac{s^2}{\omega_T^2}}. \quad (9)$$

L'andamento temporale della risposta al gradino di un sistema con due poli complessi coniugati dipende sia da  $\omega_T$  che da  $\delta$ . Per valutare  $\delta$  consideriamo il modulo di (9) alla pulsazione  $\omega_T$

$$|G_c(j\omega_T)| = \frac{1}{|1 + 2\delta j\frac{\omega_T}{\omega_T} - \frac{\omega_T^2}{\omega_T^2}|} = \frac{1}{2|\delta|}.$$

Dalla (7), valida anche in questo caso, otteniamo

$$|G_c(j\omega_T)| = \frac{1}{\sqrt{(1 + \cos(\phi))^2 + \sin^2(\phi)}} = \frac{1}{\sqrt{2(1 + \cos(\phi))}}.$$

Sostituendo  $\phi = -180^\circ + M_f$ , dove  $M_f$  è il Margine di Fase, nella precedente si ottiene

$$|G_c(j\omega_T)| = \frac{1}{\sqrt{2(1 - \cos(M_f))}} = \frac{1}{2 \sin(\frac{M_f}{2})}.$$

In definitiva  $\delta = \sin(\frac{M_f}{2})$ . Anche in questo caso le proprietà del sistema retroazionato dipendono dal margine di fase. Per rendere la verifica più veloce possiamo notare che  $\sin(x) \approx x$  almeno per  $|x| < 35^\circ = \frac{\pi}{5}$ . Quindi per margini di fase inferiori a  $70^\circ$  possiamo scrivere  $\delta \approx \frac{M_f}{2}$  oppure  $\delta \approx \frac{M_f}{2} \frac{\pi}{180} \approx \frac{M_f}{100}$  se è espresso in gradi.

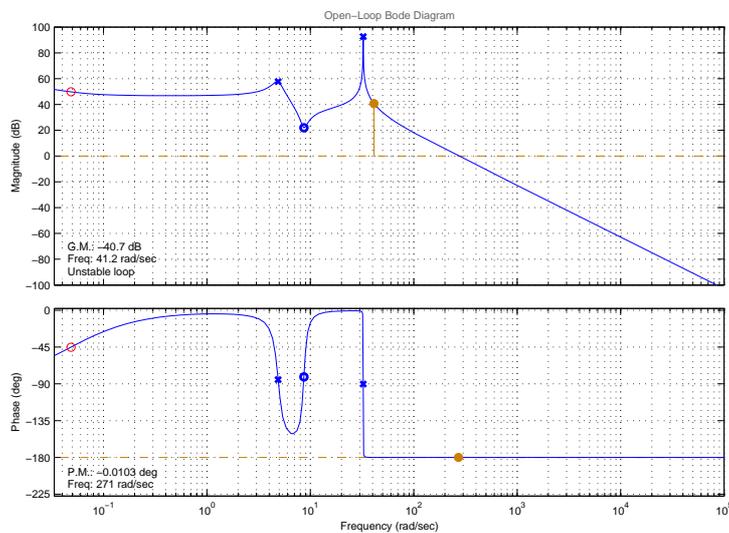
Per un sistema approssimato con una coppia di poli complessi coniugati dominanti le specifiche tipicamente richieste sono una particolare sovraelongazione percentuale o/e un tempo di assestamento assegnato. Ricordando che nel caso di sistema del secondo ordine la sovraelongazione percentuale è legata allo smorzamento ( $S\% = e^{-\frac{\pi\delta}{1-\delta^2}}$ ), una specifica sulla  $S\%$  si traduce nel richiedere un margine di fase minimo. Fissato il valore del Margine di fase, e quindi anche quello del  $\delta$  ( $\delta \approx \frac{M_f}{2}$ ), il tempo di assestamento risulta  $T_a = \frac{3}{\delta\omega_T}$ .

Qualora il margine di fase non fosse sufficiente il controllore deve agire con un'azione anticipatrice sul guadagno d'anello. Quest'azione corrisponde tipicamente all'inserimento di zeri asintoticamente stabili in bassa frequenza. L'azione di uno zero risulta utile sia per il miglioramento del margine di fase sia per l'incremento della pulsazione di taglio e quindi del tempo di assestamento (uno zero comporta il decremento della pendenza del modulo del guadagno d'anello).

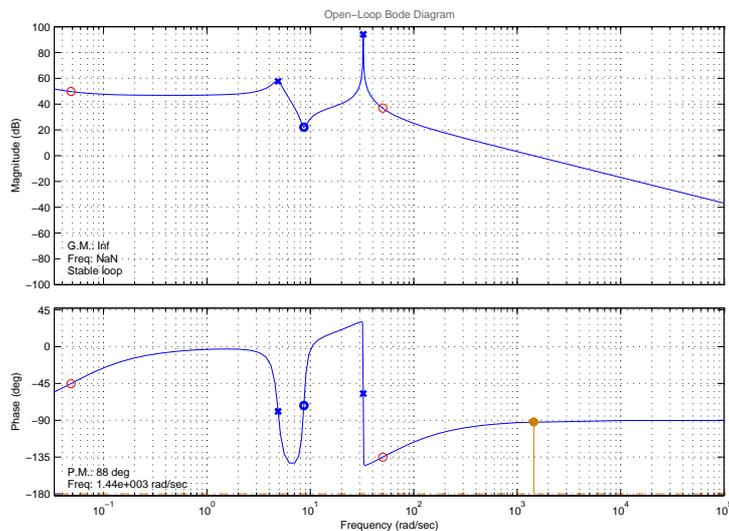
Nel compito, *nella risposta al gradino si chiede una sovraelongazione molto piccola e comunque inferiore al 5%, con un tempo di assestamento inferiore a  $5\text{msec} = 5 \cdot 10^{-3}\text{sec}$* . La specifica sulla piccola sovraelongazione indica che sarebbe indicato ottenere un sistema in anello chiuso con un polo dominante, quindi un margine di fase di circa 90 gradi. In questo caso, il tempo di assestamento richiesto offre indicazioni sulla pulsazione naturale  $\frac{3}{\omega_n} = T_a < 5 \cdot 10^{-3} \rightarrow \omega_n > 6 \cdot 10^2$ . Questa specifica si riflette nel chiedere che il diagramma delle ampiezze di  $C(j\omega)G(j\omega)$  intersechi l'asse a  $0\text{db}$  a pulsazioni superiori a  $6 \cdot 10^2\text{rad/sec}$ .

Iniziamo il progetto della parte dinamica del controllore osservando che, dovendo essere il taglio in una pulsazione nella quale allo stato attuale si ha pendenza -3, avremo evidentemente bisogno di una azione anticipatrice di almeno due zeri a pulsazioni minori per ottenere un margine di fase accettabile. Procediamo dunque a piazzare questi due zeri, prima di eventualmente provvedere ad aumentare il guadagno statico per soddisfare la specifica sulla robustezza alla variazione dei parametri.

Dal grafico sottostante si osserva che uno zero posto circa in  $-1/20$  ottiene la specifica sulla robustezza senza necessità di aumentare il guadagno statico.



Un secondo zero può essere utilmente posto in vicinanza della coppia di poli complessi sottosmorzati, per mitigare il loro effetto risonante. Ponendo ad esempio lo zero in  $-50$ , si ottiene l'andamento seguente



Osserviamo da quest'ultimo diagramma che anche la specifica di banda passante è soddisfatta, ed il margine di fase di 88 gradi è accettabile.

### 1.2.4 Insensibilità in alta frequenza ai disturbi di misura

Riconsideriamo ora la funzione di trasferimento tra il disturbo  $D_m(s)$  e l'uscita  $Y(s)$  ovvero

$$G_m(s) = \frac{Y(s)|_{(r=0, d_i=0, d_o=0)}}{D_m(s)} = -\frac{C(s)P(s)}{1 + C(s)P(s)}.$$

Per attenuare l'effetto sull'uscita di un eventuale disturbo di misura dobbiamo ridurre il modulo della  $G_m(j\omega)$  almeno nello spettro di frequenze nella quali ci aspettiamo che sia siano contenute le armoniche del disturbo di misura.

Se il modulo del guadagno d'anello  $|C(j\omega)P(j\omega)|_{db}$  fosse inferiore a  $-20_{db}$  potremmo approssimare  $|1 + C(j\omega)P(j\omega)|$  con 1 ottenendo

$$|G_m(j\omega)|_{db} \approx |C(j\omega)P(j\omega)|_{db},$$

in questo caso la specifica si tradurrebbe in una zona non consentita al diagramma come in fig.8.

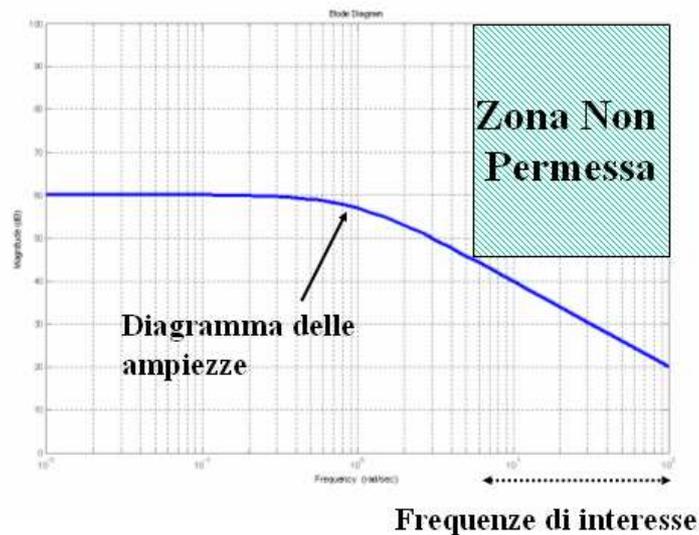
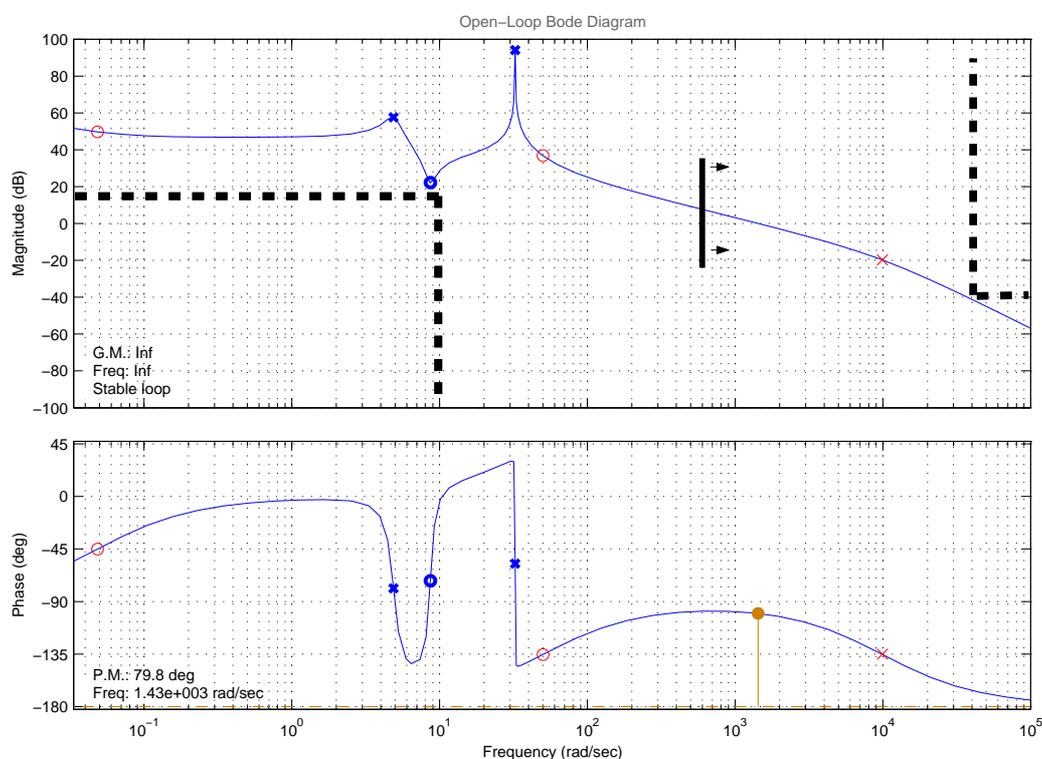


Figure 8: Specifica sulla robustezza ai disturbi di misura tradotta sul diagramma delle ampiezze del guadagno d'anello.

Qualora il guadagno del modulo d'anello non rispettasse tale specifica è necessario inserire dei poli in alta frequenza per incrementare la pendenza del diagramma.

L'ultima specifica del compito richiede che *il rumore di misura a frequenze maggiori o uguali di 64KHz sia reiettato nella misura di almeno lo 1%*. Otterremo questa specifica inserendo nel compensatore un polo, cosa che è peraltro necessaria per la causalità del controllore. Ponendo il polo in  $-10^4$ , si ottiene il diagramma



Il controllore risultante da tutte le considerazioni finora condotte è dato da

$$C(s) = \frac{3500(1 + 20s)(1 + 0.02s)}{s(1 + 10^{-4}s)}$$