

Fondamenti di Automatica - I Parte
Metodologia di approccio al controllo per
sistemi instabili ad anello aperto.

Antonio Bicchi, Nicola Sgambelluri

Università di Pisa

11 Aprile 2005.

Indice

1	Introduzione	3
2	Metodologia di studio di Sistemi Instabili	3
2.1	Esempio 1	3
2.1.1	Esempio 1: Controllo in retroazione	3
2.1.2	Esempio 1: Controllo in cascata	7
2.2	Esempio 2	9
2.2.1	Esempio 2: Controllo in retroazione	9
2.2.2	Esempio 2: Controllo in cascata	10
2.3	Osservazioni finali	11
2.4	Studio analitico	13

1 Introduzione

Lo studio e in particolare la progettazione di un controllore destinato a sistemi instabili in anello aperto presenta comunemente problematiche maggiori rispetto a impianti stabili, non esistendo nel suddetto caso tecniche o procedure standard per la progettazione di un controllo in grado di finalizzare specifiche statiche e/o dinamiche assegnate.

2 Metodologia di studio di Sistemi Instabili

In questa sede ci proponiamo di illustrare alcune difficoltà che si incontrano nella progettazione di un controllo in anello chiuso considerando alcuni semplici esempi ed avvalendosi come ausilio di alcuni comandi e tools di Matlab. È noto che un impianto seppur di ordine elevato, per rispettare alcune specifiche richieste, può essere controllato con un opportuno sistema in retroazione utilizzando le tecniche classiche di analisi (Luogo delle Radici, Diagrammi di Bode, Diagrammi di Nyquist), assumendo comportamenti dinamici simili a quelli di sistemi del primo o del secondo ordine. La funzione di trasferimento in anello chiuso che lo rappresenta in tal caso può essere approssimata rispettivamente da una f.d.t. con un polo reale o con due poli complessi coniugati.

Tuttavia nel caso particolare di sistemi instabili è necessario procedere con cautela dal momento che non è possibile in linea di principio utilizzare i diagrammi di Bode per la progettazione del controllo, in particolare prendendo in considerazione i concetti di margine di ampiezza e di fase. La progettazione di un candidato controllore in tal caso non risulta sistematica e può indurre in errore.

2.1 Esempio 1

Consideriamo ad esempio la seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{1}{(s - 0.5)} \quad (1)$$

che è evidentemente instabile vista la presenza di un polo reale positivo.

2.1.1 Esempio 1: Controllo in retroazione

Per stabilizzare il sistema (1) è possibile chiudere il sistema in retroazione ottenendo un sistema stabile ad anello chiuso con una semplice azione proporzionale ($C(s) = k$ con $k \geq 0.5$). Utilizzando a tale scopo il comando

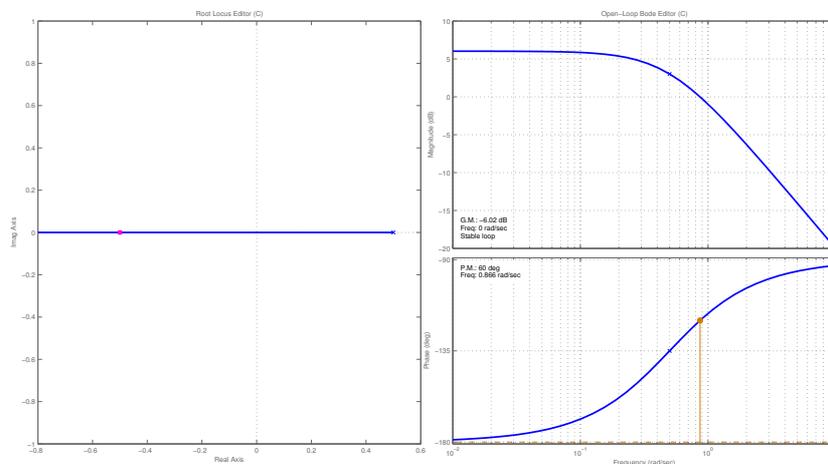


Figura 1: Luogo delle radici e diagrammi di Bode della fdt $G(s) = \frac{1}{(s-0.5)}$

sisotool di Matlab, si ottengono i diagrammi di Bode e il luogo delle radici riportati in figura 1. In particolare il sistema risulta ora stabile in anello chiuso (*Stable Loop*) e ciò è di facile deduzione visto che l'unico polo del sistema ad anello chiuso è localizzato nel semipiano a parte reale negativa come evidenziato dal luogo delle radici (figura 1). Sui diagrammi di Bode associati è possibile leggere un margine di ampiezza (G.M.) approssimativo di $-6db$ (si osservi che è negativo), un margine di fase (P.M.) di 60^0 e una pulsazione di taglio $\omega_N \approx 0.866rad/sec$.

A tal proposito si osservi che valori negativi del margine di ampiezza espresso in db o del margine di fase corrispondono ad instabilità.

Per apprezzare l'effetto della stabilizzazione mediante controllo proporzionale, a titolo esemplificativo, in figura 2 vengono riportati diagrammi di Nyquist completi dell'impianto $G(s)$ al variare della costante di guadagno (a sinistra) e con i margini di stabilità per $k = 1$ (destra).

Dal criterio di Nyquist, per la stabilità di sistemi ad anello chiuso si ricordi che partendo da un impianto $G(s)$, condizione necessaria e sufficiente affinché il sistema $G_c(s)$ in retroazione negativa unitaria sia stabile, è che il diagramma polare completo della $G(s)$ circonda in senso antiorario il punto $(-1 + j0)$ tanti giri quanti sono i poli a parte reale positiva della $G(s)$ e tanti mezzi giri in senso antiorario quanti sono i poli immaginari puri.

Dalla figura 2 si osservi che non appena il guadagno del controllore supera positivamente il valore di 0.5, il diagramma completo della funzione $G(s)$ (avente un polo reale positivo) avvolge il punto $(-1 + j0)$ in senso antiorario

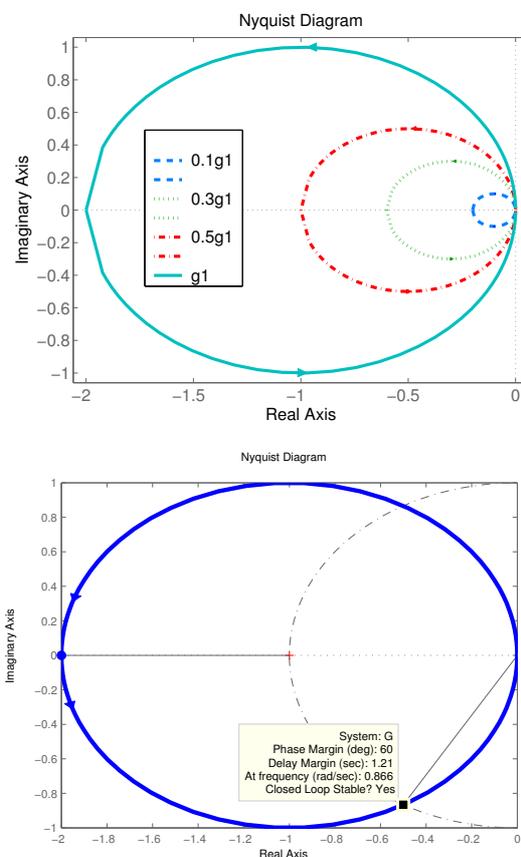


Figura 2: Diagrammi di Nyquist della fdt $G(s) = \frac{1}{(s-0.5)}$

una volta e il sistema ad anello chiuso risulta stabile.

Bisogna prestare una certa attenzione dal momento che chiuso il sistema in retroazione riferendosi ai soli diagrammi di Bode non sono più evidenti i problemi di instabilità dell'impianto originario se non per il fatto che la fase ha un andamento crescente in tutto il range di frequenze (ed il margine di ampiezza sia negativo).

In questo caso in linea di principio non avrebbe senso utilizzare i margini di fase e di ampiezza per imporre le specifiche dinamiche desiderate.

Come verifica del fatto che tale metodo di progettazione non sia completamente affidabile ed efficace, è sufficiente valutare la risposta al gradino del sistema ad anello chiuso risultante e appurare se il sistema così controllato rispetta le specifiche richieste. In particolare soffermandosi sulla correttezza delle specifiche lette in termini di margini di ampiezza e di fase precedente-

mente riportate per la $G(s)$, si ammetterebbe che il sistema in anello chiuso sia approssimabile con un sistema del secondo ordine i cui poli hanno uno smorzamento pari a 0.6 (e una sovraelongazione $s = e^{-\frac{\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}} \approx 1\%$). Per il caso di sistema in anello chiuso a due poli dominanti, valendo la relazione $\omega_N \geq 3/\delta T_a \approx 0.0866 \text{ rad/sec}$ ci si aspetta un tempo di assestamento T_a di al più 4.3sec. In realtà da *step-response* del sistema ad anello chiuso $G_c(s) = \frac{C(s)G(s)}{1+C(s)G(s)}$, dove $C(s)$ è un semplice controllore unitario, si ottiene il grafico riportato in figura 3. Si può notare come la funzione di trasferimento

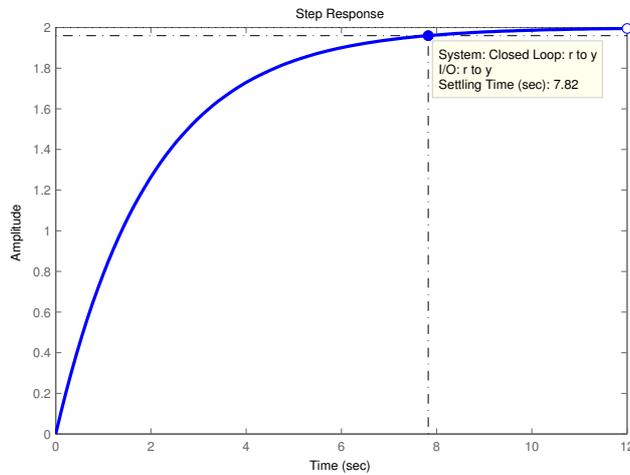


Figura 3: Risposta al gradino della funzione $G_c(s)$.

ad anello chiuso si comporti come un sistema del primo ordine (essendo nulla la sovraelongazione) ed il tempo di assestamento ricavato (T_a) sia pari 8sec, ossia quasi doppio di quello atteso.

Concludendo dunque anche in un semplice caso di sistema instabile in anello aperto, le specifiche dinamiche attese non risultano complessivamente rispettate quando si ricorre erroneamente ai diagrammi di Bode per progettare un controllore. Si osservi inoltre che il valore di regime raggiunto con un riferimento a gradino unitario assume in uscita il valore ricavabile dalla seguente relazione:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{C(s)G(s)}{1+C(s)G(s)} \frac{1}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{C(s)G(s)}{1+C(s)G(s)} = \\ &= \frac{C(0)G(0)}{1+C(0)G(0)} = 2 \end{aligned} \quad (2)$$

Volendo proseguire con quest'approccio, che senz'altro non appare affidabile, sarebbe necessario procedere per tentativi senza essere sicuri di poter trovare una soluzione realmente corretta. Risulta preferibile pertanto utilizzare un metodo più rigoroso e che ci fornisca i risultati attesi.

2.1.2 Esempio 1: Controllo in cascata

Si può utilizzare la tecnica del controllo in cascata, rappresentata schematicamente in figura 4, applicando un doppio anello di retroazione: in tal caso un primo controllore $C_1(s)$ viene impiegato per la stabilizzazione e un secondo controllore $C_2(s)$ viene utilizzato per definire le specifiche di progetto. La

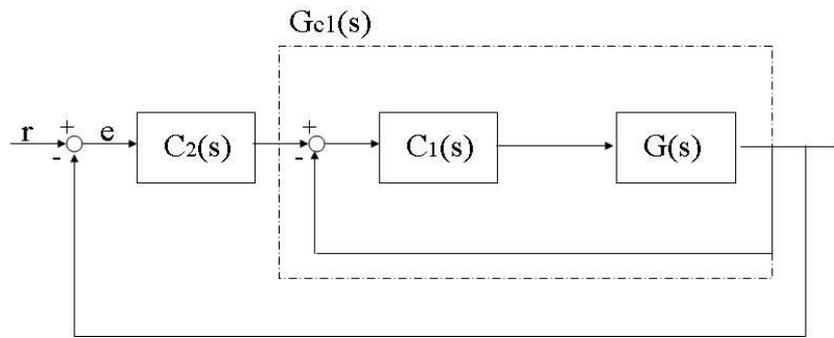


Figura 4: Diagramma a blocchi e controllo in cascata.

funzione ad anello chiuso equivalente è espressa dalla seguente equazione:

$$G_{c2}(s) = \frac{C_2(s)G_{c1}(s)}{1 + C_2(s)G_{c1}(s)} = \frac{C_2(s) \frac{C_1(s)G(s)}{1+C_1(s)G(s)}}{1 + C_2(s) \frac{C_1(s)G(s)}{1+C_1(s)G(s)}} = \frac{C_2(s)C_1(s)G(s)}{[1 + C_1(s) + C_2(s)C_1(s)]G(s)}. \quad (3)$$

Per la funzione di trasferimento considerata $G(s)$, utilizzando un primo controllore $C_1(s)$ scelto unitario si ottiene la seguente funzione ad anello chiuso (ricavabile peraltro da *sisotool*: *File* → *Export* → *ClosedLoop*)

$$G_{c1} = \frac{1}{s + 0.5}. \quad (4)$$

Con un secondo controllore $C_2(s)$ anch'esso unitario si ottengono luogo delle radici e diagrammi di Bode riportati in figura 5. Da tali diagrammi è possibile leggere un margine di ampiezza infinito (G.M. → ∞), un margine di fase

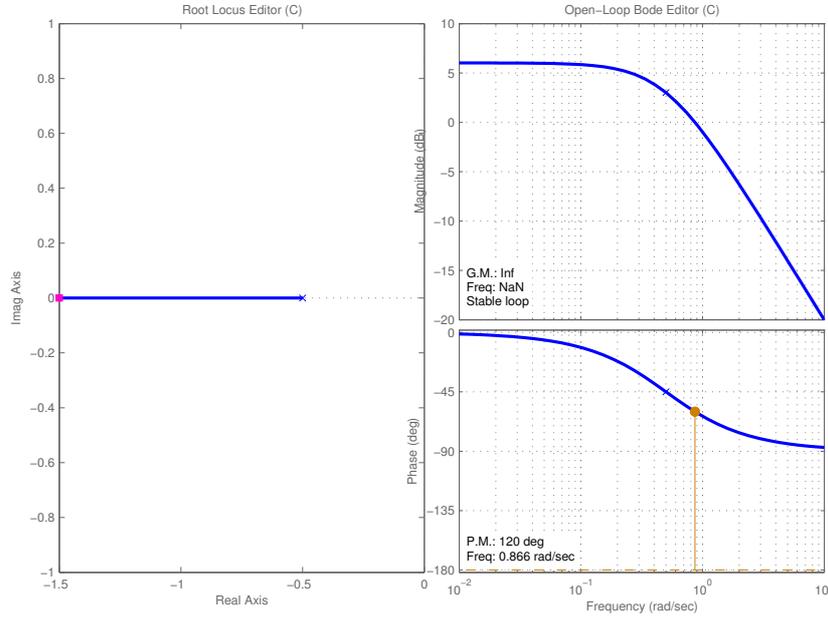


Figura 5: Luogo delle radici e diagrammi di Bode per la fdt $G_{c2}(s)$

(P.M.) di 120° e una pulsazione di taglio $\omega_N \approx 0.866 \text{ rad/sec}$. Ci aspettiamo dunque che G_{c2} abbia un comportamento come un sistema del primo ordine con un tempo di assestamento al massimo a 4.3 sec. Dalla risposta al gradino, si ottiene il risultato riportato in figura 6. In questo caso, come era prevedibile, essendosi riferiti all'interpretazione dei diagrammi di Bode di un sistema stabile in partenza, le specifiche sono pienamente rispettate presentando il sistema sovralongazione nulla e tempo di assestamento $T_a \approx 1.6 \text{ sec}$. Si osservi inoltre come in questo caso il valore di regime dell'uscita al gradino unitario, risulta:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{C_1(s)C_2(s)G(s)}{1 + C_1(s)G(s) + C_1(s)C_2(s)G(s)} \frac{1}{s} = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{C_2(s)C_1(s)G(s)}{1 + C_1(s)G_1(s)G(s)} = \frac{C_2(0)C_1(0)G(0)}{1 + C_1(0)G(0) + C_2(0)C_1(0)G(0)} = 2/3 \quad (5) \end{aligned}$$

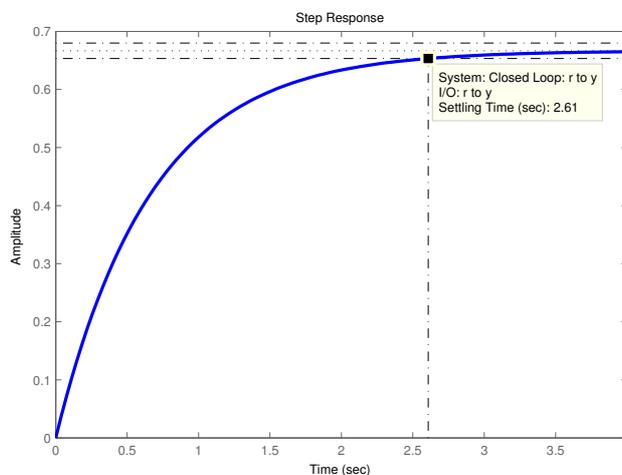


Figura 6: Risposta al gradino di $G_{c2}(s)$.

2.2 Esempio 2

Consideriamo la seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{1}{s(s - 0.1)}. \quad (6)$$

in cui ancora una volta è riportato un sistema instabile ad anello aperto per la presenza di un polo a parte reale positiva.

2.2.1 Esempio 2: Controllo in retroazione

Supponiamo che anche in questo caso, riferendosi ai soli diagrammi di Bode e senza accorgersi che il sistema sia instabile ad anello aperto, si sia progettato un compensatore in grado di stabilizzare il sistema ad anello chiuso. Un possibile controllore che implementa un'azione anticipatrice stabilizzante è il seguente:

$$C(s) = \frac{1 + 20s}{1 + 0.01s} \quad (7)$$

Luogo delle radici e i diagrammi di Bode della $G(s)$ compensata con $C(s)$ sono riportati in figura 8. Il sistema chiuso in retroazione risulta stabile, ma rimane il problema che le specifiche in *closed-loop* non possono essere lette dal diagramma di Bode *open-loop* visto che da questi diagrammi (figura 8), si leggerebbe $P.M. = 75^0$ e una pulsazione di taglio $\omega_N \approx 19.6 \text{ rad/sec}$. Tali

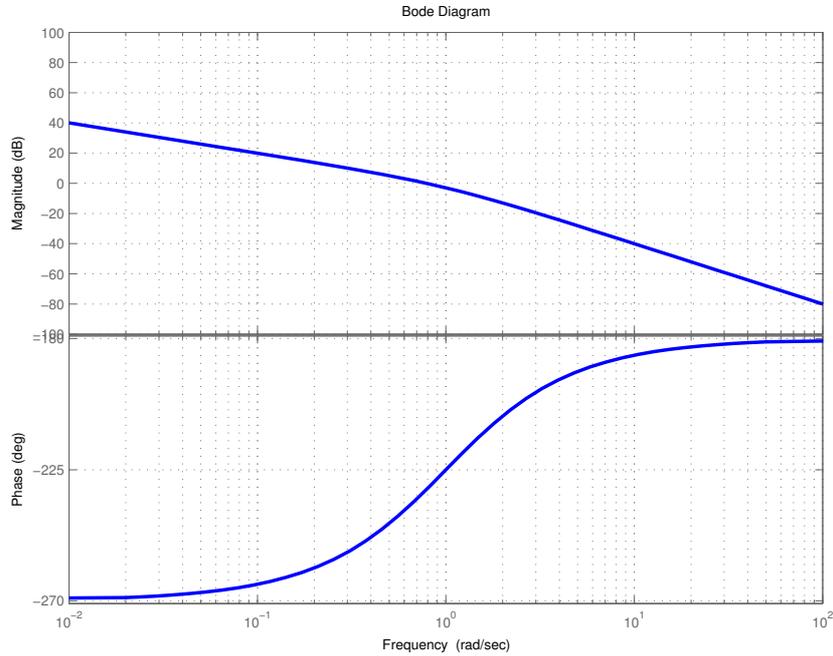


Figura 7: Diagrammi di Bode per la funzione di trasferimento $G(s) = \frac{1}{s(s-0.1)}$

specifiche, ipotizzando valida l'approssimazione con sistemi del primo e secondo ordine si traducono nell'aver un $\delta \approx 0.75$ da cui una sovraelongazione $S \leq 3\%$ ed un tempo di assestamento $T_a \approx 0.2 \text{ sec}$. Osservando la risposta al gradino del sistema ad anello chiuso figura 9 si vede che pur essendo rispettata la specifica sulla sovraelongazione non risulta rispettata quella sul tempo di assestamento (dalla simulazione $T_a = 19.2 \text{ sec}$).

2.2.2 Esempio 2: Controllo in cascata

Ricorrendo al metodo di controllo in cascata (figura 4) si possono fissare i due controllori $C_1(s)$ e $C_2(s)$ necessari rispettivamente alla stabilizzazione e per fissare la specifiche statiche/dinamiche. Ad esempio scegliendo

$$C_1(s) = \frac{1 + 20s}{1 + 0.01s} \quad (8)$$

(scelto come suggerito nel paragrafo precedente) si ottiene un sistema stabilizzato (vedi figura 8). Da *sisotool* o manualmente si ottiene la funzione di trasferimento ad anello chiuso evidentemente stabile:

$$G_{c1}(s) = \frac{2000(s + 0.05)}{(s + 72.99)(s + 25.96)(s + 0.05278)} \quad (9)$$

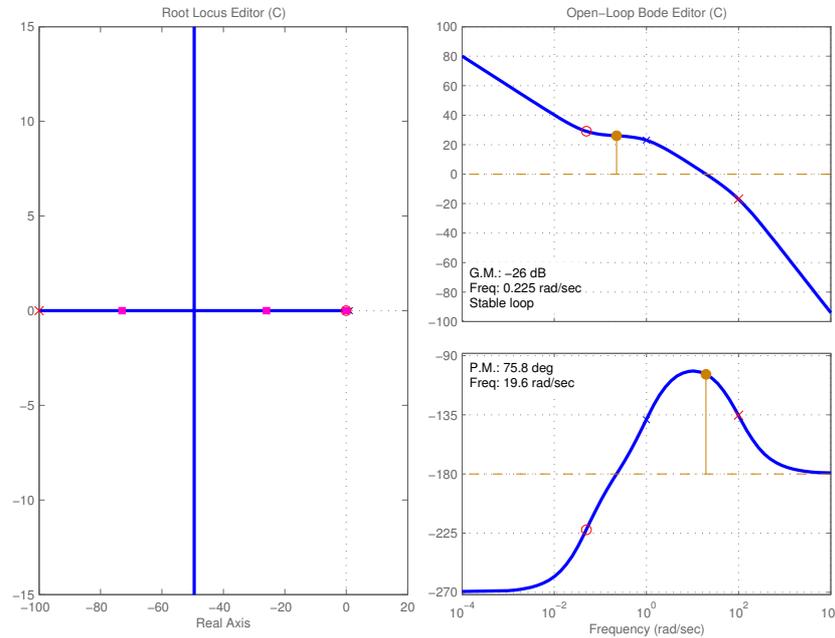


Figura 8: Luogo delle radici e diagrammi di Bode per la funzione di trasferimento $G(s) = \frac{1}{s(s-0.1)}$ compensata da $C(s) = \frac{1+20s}{1+0.01s}$

A questo punto scegliendo un ulteriore controllore $C_2(s) = \frac{20}{s}$ si ottengono i diagrammi di Bode e il luogo delle radici riportati in figura 10. In questo caso si leggono un $P.M. = 43.3^\circ$ e una pulsazione di taglio $\omega_N \approx 17.01 \text{ rad/sec}$. Tali specifiche, in base alle approssimazioni di sistemi del primo e secondo ordine note, si traducono in un $\delta \approx 0.43$ da cui una sovraelongazione $S \leq 22\%$ ed un tempo di assestamento $T_a \approx 0.4 \text{ sec}$. Dalla risposta al gradino riportata in figura 11, si osserva che le specifiche sono perfettamente rispettate.

2.3 Osservazioni finali

In conclusione nello studio di controllori per sistemi instabili in anello aperto, l'utilizzo limitato ai soli diagrammi Bode può risultare fuorviante in quanto, almeno in parte, alcune specifiche dinamiche ricavate direttamente da margine di ampiezza e di fase, non risultano soddisfatte. La tecnica del controllo in cascata rappresenta un valido metodo di analisi consentendo di affrontare in modo abbastanza sistematico il problema del controllo di sistemi instabili.

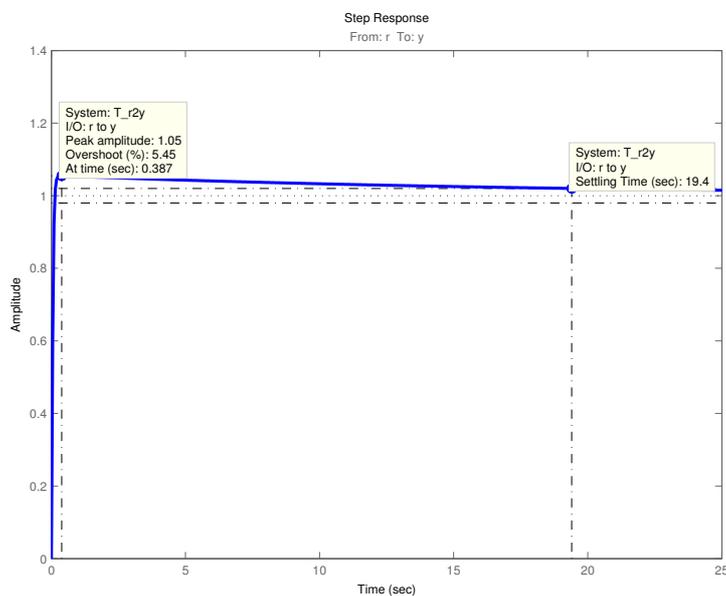


Figura 9: Risposta al gradino della risposta ad anello chiuso della $G(s)$ compensata da $C(s) = \frac{1+20s}{1+0.01s}$

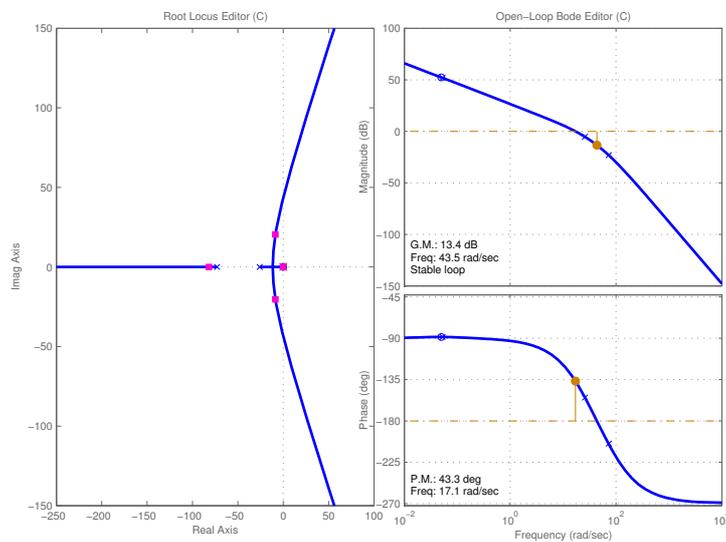


Figura 10: Luogo delle radici e diagrammi di Bode per la funzione di trasferimento $G_{c2}(s) = \frac{C_2(s)G_{c1}(s)}{1+C_2(D)G_{c1}(s)}$

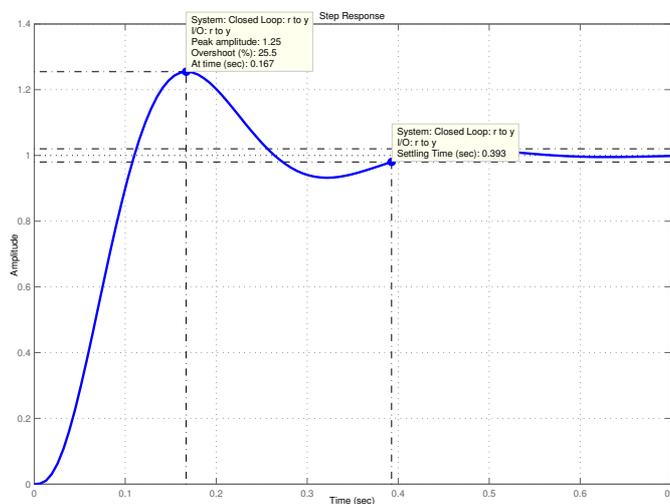


Figura 11: Risposta al gradino per la funzione $G(s)$ con un controllo in cascata.

2.4 Studio analitico

Avendo appurato che la tecnica del controllo in cascata risulta una procedura operativa efficace per l'analisi di sistemi instabili *open-loop* ci chiediamo se è possibile pensare ad una schematizzazione del suddetto controllo in cascata mediante un singolo anello di retroazione. Riferendosi al classico schema a blocchi di un sistema chiuso in retroazione (figura 12) ed analogamente allo

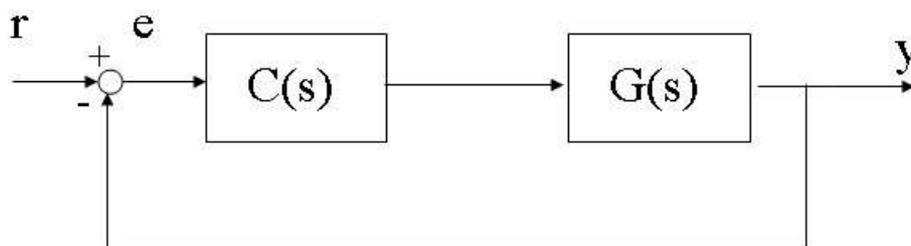


Figura 12: Diagramma a blocchi del controllo in retroazione.

schema di controllo in cascata (figura 4) ragionando analiticamente per un singolo anello si ha che

$$G_c(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)} \quad (10)$$

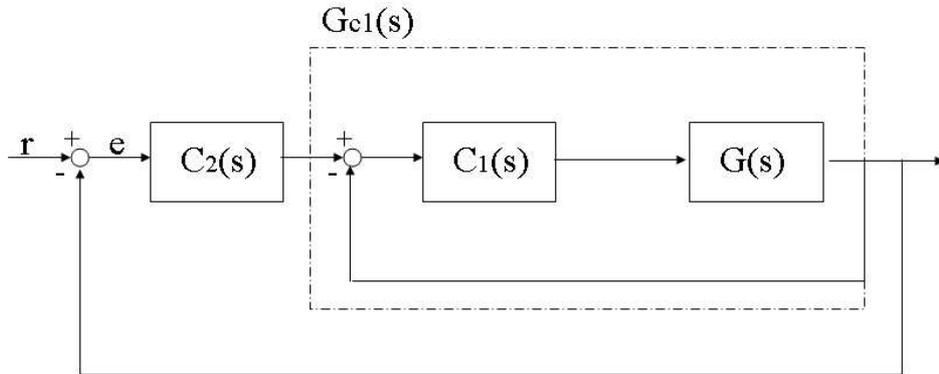


Figura 13: Diagramma a blocchi del controllo in cascata.

mentre per un doppio anello in cascata vale la seguente:

$$G_{c2}(s) = \frac{C_2(s)G_{c1}(s)}{1 + C_2(s)G_{c1}(s)} = \frac{C_2(s) \frac{C_1(s)G(s)}{1 + C_1(s)G(s)}}{1 + C_2(s) \frac{C_1(s)G(s)}{1 + C_1(s)G(s)}} = \frac{C_2(s)C_1(s)G(s)}{[1 + C_1(s) + C_2(s)C_1(s)]G(s)}. \quad (11)$$

Uguagliando le relazioni (10) e (11) i sistemi risulterebbero equivalenti se:

$C(s) = C_2(s)C_1(s)$ e contestualmente $C(s) = C_1(s) + C_2(s)C_1(s)$.

Ciò non è possibile visto che il controllore $C(s)$ non può rispettare contemporaneamente entrambe le condizioni.

Se ci si riferisce però ad un sistema ad anello chiuso con due distinti gradi di libertà (un ulteriore grado di libertà dipende dalla presenza di un blocco precompensatore $F(s)$) e riportato in figura 14, la funzione di trasferimento

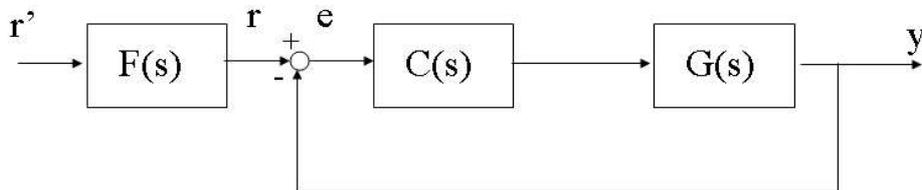


Figura 14: Diagramma a blocchi del controllo in retroazione.

ad anello chiuso risulta:

$$G'_c(s) = F(s)G_c(s) = F(s) \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)}. \quad (12)$$

In tal caso il controllore in cascata espresso dalla relazione (11) risulta equivalente alla (12) se:

$$F(s)C(s) = C_2(s)C_1(s) \text{ e } C(s) = C_1(s) + C_2(s)C_1(s).$$

Tale problema ammette soluzioni.

Concludendo, almeno in forma analitica, è possibile pensare ad uno schema alternativo del controllo in cascata con un singolo anello di retroazione, a patto che ci si riferisca ad un sistema con due gradi di libertà.