Teoria dei Sistemi
Esercizi per i Corsi di Laurea in Ingegneria Informatica/Elettronica a.a. 1999–2000

Lucia Pallottino

Centro Interdipartimentale di Ricerca“E. Piaggio”

Dipartimento di Sistemi Elettrici e Automazione

Università di Pisa

Tel.: 050553639, Fax : 050550650

Email: pallott@piaggio.ccii.unipi.it

La forma di Jordan

A matrice $n \times n$, $\pi(\lambda)$ polinomio caratteristico di A.

$$\pi(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

$$\pi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{\mu_1}(\lambda - \lambda_2)^{\mu_2}...(\lambda - \lambda_q)^{\mu_q}$$

- $\lambda_i \neq \lambda_j$ per $i \neq j$, q autovalori distinti
- μ_i molteplicitá algebrica diλ_i, $\sum_{i=1}^{q} \mu_i = n$.

Quanti sono gli autovettori indipendenti relativi allo stesso autovalore?

- $(A - \lambda_i I)x_i = 0$, x_i autovettore relativo a λ_i
- $\dim \ker(A - \lambda_i I) = \nu_i$ quindi si hanno ν_i autovettori indipendenti.

- se $\forall i \; \nu_i = \mu_i$ allora A é **diagonalizzabile**
- se $\exists i \; t.c. \; \nu_i < \mu_i$ allora A é **non diagonalizzabile**.

ν_i numero di blocchi di Jordan relativi a λ_i.
Per costruire la matrice di Jordan non é sufficiente conoscere per ogni i i valori di μ_i e ν_i:

$$\mu = 4,\ \nu = 2$$
$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \tag{1}$$

Cerco Q tale che $Q^{-1}AQ = J$, equivalentemente $AQ = QJ$ con

$$Q = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ q_1 & q_2 & \dots & \mathbf{q}_n \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \end{bmatrix}$$

• Caso $\mu = n,\ \nu = 1$: $J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{bmatrix}$,

$x_1 \in \ker(A - \lambda I)$,

$$\begin{cases} Aq_1 = \lambda q_1 \\ Aq_2 = q_1 + \lambda q_2 \\ \vdots \\ Aq_n = q_{n-1} + \lambda q_n \end{cases} \qquad \begin{cases} (A - \lambda I)q_1 = 0 \\ (A - \lambda I)q_2 = q_1 \\ \vdots \\ (A - \lambda I)q_n = q_{n-1} \end{cases} \tag{2}$$

Si scelgono

$$q_1 = x_1,\ q_2 \in \ker(A - \lambda I)^2,\ \dots,\ q_n \in \ker(A - \lambda I)^n$$

in modo che siano indipendenti.

• $\ker(A - \lambda I)^k$ Autospazio generalizzato di ordine k

• q_i autovettori generalizzati.

• Caso generale $\lambda_i,\ \mu_i,\ \nu_i$:
Sia $A_p = A - pI$, A_p^k potenze di A_p; sia
$d_k = \dim\ker(A_p^k)$, si ha che $d_k \leq d_{k+1} \leq n$.
Se h è tale che $d_h = d_{h+1}$ allora la successione si stabilizza, cioé: $d_{h+s} = d_h\ \forall s \geq 1$.

• Se $p \neq \lambda_i \Rightarrow d_0 = d_1 = 0$ quindi $d_k = 0\ \forall k$.
• Se $\exists i$ t.c. $p = \lambda_i \Rightarrow d_0 = 0,\ d_1 = \nu_i$, si dimostra che quando la successione si stabilizza ($\bar{k}$) si ha $d_{\bar{k}} = \mu_i$.

Chiamo **autovettore generalizzato di ordine** k il vettore v tale che

$$v \in \ker(A - \lambda_i I)^k \wedge v \notin \ker(A - \lambda_i I)^{k-1}$$

Dato un autovettore generalizzato di ordine k, $v^{(K)}$, costruisco un autovettore generalizzato di ordine $k-1$:
$v^{(k-1)} = (A - \lambda_i I)v^{(k)}$. Posso in questo modo costruire delle catene lunghe k di autovettori generalizzati.

Per costruire un base di autovettori generalizzati:
si parte dal livello $\bar{k}$ si prendono $d_{\bar{k}} - d_{\bar{k}-1}$ autovettori generalizzati di ordine $\bar{k}$: $x_1^{(\bar{k})}$, ..., $x_{d_{\bar{k}}-d_{\bar{k}-1}}^{(\bar{k})}$. Si construiscono, a partire da questi autovettori generalizzati, delle catene lunghe k. Dal livello $\bar{k}-1$ si prendono gli autovettori generalizzati di ordine $\bar{k}-1$ che siano linearmente indipendenti da $x_1^{(\bar{k})}$, ..., $x_{d_{\bar{k}}-d_{\bar{k}-1}}^{(\bar{k})}$ e si generano $(d_{\bar{k}} - d_{\bar{k}-1}) - (d_{\bar{k}-1} - d_{\bar{k}-2})$ catene lunghe $\bar{k}-1$.
Ci si ferma quando si sono trovati n vettori indipendenti.

Si costruisce Q ponendo nella prima colonna l'autovettore generalizzato di ordine piú basso e risalendo le catene trovate.

Ad ogni catena corrisponde un blocco di Jordan e la lunghezza della catena ne determina la dimensione.

Esercizio 1

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Autovalori: 1 ($\mu_1 = 1$) 2 ($\mu_2 = 3$)

$$A_1 = A - I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$ autovettore relativo ad 1 : $$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$A_2 = A - 2I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$ $d_1 = 2 = \nu_2$ due blocchi

Vettori che formano una base del $\ker(A_2)$ sono:

$$v_1^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ v_2^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$A_2^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, d_2 = 3 = \mu_2 \Rightarrow d_3 = 3,\ \bar{k} = 2$$

L'autovettore generalizzato di ordine 2 é:

$$x_1^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \Rightarrow x_1^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

Come autovettore generalizzato di ordine uno ho $v_2^{(1)}$.

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Esercizio 2

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- $\lambda = 0,\ \mu_0 = 1,\ x_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$
- $\lambda = 1,\ \mu_1 = 4.$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ d_1 = 2 = \nu_1 \Rightarrow \text{ 2 blocchi: 2+2 o 3+1}$$

$$\ker(A_1) = < \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} >$$

$$A_1^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ d_2 = 3$$

$$\ker(A_1^2) = < \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} >,$$

$$A_1^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ d_3 = 4 = \mu_1$$

$$\ker(A_1^3) = < \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} >.$$

$x_2^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ da cui $x_2^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $x_2^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Matrice di Jordan nel caso complesso

Siano λ un autovalore complesso di A relativo all'autovettore complesso v allora $\bar{\lambda}$ è autovalore di A relativo all'autovettore $\bar{v}$.

Siano $v = q_r + \jmath q_i$ e $\lambda = \sigma + \jmath\omega$, poste $Q = [q_r + \jmath q_i \; q_r - \jmath q_i]$ e $\Lambda = \begin{bmatrix} \sigma + \jmath\omega & 0 \\ 0 & \sigma - \jmath\omega \end{bmatrix}$ si ha $AQ = Q\Lambda$.

Data $E = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -\jmath \\ 1 & \jmath \end{bmatrix}$ si ha $QE = [q_r \; q_i]$.

$AQE = QEE^{-1}\Lambda E$ da cui

$$A[q_r \; q_i] = [q_r \; q_i] \begin{bmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{bmatrix}$$

Esercizio 3

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Autovalori: $1,\ \jmath,\ -\jmath$.

$$\mathrm{Ai} = \begin{bmatrix} -\jmath & 0 & 1 \\ 0 & 1-\jmath & 1 \\ -1 & 0 & -\jmath \end{bmatrix}$$

Vettore nel $\ker(Ai)$ $\left[-\jmath,\ -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\,\jmath,\ 1\right]$.

$$Qi = \begin{bmatrix} -\jmath & \jmath & 0 \\ -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\,\jmath & -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\,\jmath & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Ji = \begin{bmatrix} \jmath & 0 & 0 \\ 0 & -\jmath & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Qr = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Jr = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Esercizio 4

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Autovalori $1 + \jmath,\ 1 - \jmath,\ 1 + \jmath,\ 1 - \jmath$

$$A1 = A - (1 + \jmath) Id = \begin{bmatrix} -\jmath & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\jmath & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -\jmath & 2 \\ -1 & 0 & 0 & -\jmath \end{bmatrix}$$

$$[0,\ -\jmath,\ 1,\ 0]$$

$$A1^2 = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & -2\,\jmath \\ 0 & -2 & -2\,\jmath & 2 \\ -2 & 2\,\jmath & -2 & -4\,\jmath \\ 2\,\jmath & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$[-\jmath,\ 1,\ 0,\ 1],\ [0,\ -\jmath,\ 1,\ 0]$$

$$Qi = \begin{bmatrix} 0 & -\jmath & 0 & \jmath \\ -\jmath & 1 & \jmath & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Ji = \begin{bmatrix} 1+\jmath & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+\jmath & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\jmath & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\jmath \end{bmatrix}$$

$$Qr = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Jr = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Esercizi di riepilogo su Jordan

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Gli autovalori della matrice sono:$\lambda_1 = 1$ con molteplicitá algebrica $\mu_1 = 1$ e $\lambda_2 = 2$ con molteplicitá algebrica $\mu_2 = 4$.

- Autovalore 1:

$$A_1 = A - 1Id = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

La dimensione del $\ker(A_1) = 1 = \nu_1 = d_1$ e la base é data da

$$w_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- Autovalore 2

$$A_2 = A - 2I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$d_1 = \nu_2 = 2$, base del $\ker(A_2)$ é data da

$$v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \; v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},.$$

$\nu_2 = 2 < \mu_2 = 4$ quindi continuo a calcolare le potenze di A_2:

$$A_2^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Una base del $\ker(A_2^2)$ é data da

$$v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \; v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \; v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \; v_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},.$$

$d_2 = 4 = \mu_2$ la successione si stabilizza e $\bar{k} = 2$.

Gli autovettori generalizzati sono $v_1^{(2)} = v_3, \; v_2^{(2)} = v_4$.

- Costruisco la catena di $v_1^{(2)}$: $v_1^{(1)} = (A - 2Id)v_1^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

- Costruisco la catena di $v_2^{(2)}$: $v_2^{(1)} = (A - 2Id)v_2^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Al livello $\bar{k} - 1$ non si hanno autovettori generalizzati.
Costruisco $Q = \left[w_1 \; v_1^{(1)} \; v_1^{(2)} \; v_2^{(1)} \; v_2^{(2)} \right]$

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \; J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

Autovalore 1 con molteplicitá algebrica $\mu_1 = 5$:

$$A_1 = A - Id = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

una base del $\ker(A_1)$ é data da $v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},.$

$d_1 = \nu_1 = 2 < \mu_1 = 5$ quindi si procede nel calcolo delle potenze di A_1.

$$A_1^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

una base del $\ker(A_1^2)$ é data da $v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $v_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$,. $d_2 = 4 < \mu_1 = 5$

$$A_1^3 = 0,$$

una base del $\ker(A_1^3)$ é data da $v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $v_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $v_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$,.

$d_3 = 5 = \mu_1$ Autovettore generalizzato di ordine 3 é dato da: $v_1^{(3)} = v_5$

quindi $v_1^{(2)} = A_1 v_1^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, e

$$v_1^{(1)} = A_1 v_1^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},.$$

Autovettore generalizzato di ordine 2 é dato da: $v_2^{(2)} = v_3$ quindi

$$v_2^{(1)} = A_1 v_2^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

Esercizi

Trasformata di Laplace

- $\mathcal{L}[\int_0^t e^{-\tau} d\tau] = \frac{1}{2} \frac{1}{(s+1)}$

- $$f(t) = \begin{cases} e^{(t-2)} & t \geq 2 \\ 0 & t < 2 \end{cases}$$

- $f(t) = \cos(2t - 1) + t^2 e^{-t}$

$\mathcal{Z}$ trasformata

- $f(t) = t(t-1)(t-2)\left(\frac{1}{2}\right)^t$
- $f(t) = \left(\frac{1}{4}\right)^t \sin(t\pi/2)$
- $$f(t) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^{(t-1)} & t \geq 1 \\ 0 & t < 1 \end{cases}$$

Esercizi

Antitrasformata di Laplace

- $G(s) = \frac{1}{s(s+2)}$

- $G(s) = \frac{1}{(s^2+1)^2}$

Antitrasformata $\mathcal{Z}$

- $G(z) = \frac{1}{z(z+3)}$