



# **Sensori Fisici**

[a.tognetti@centropiaggio.unipi.it](mailto:a.tognetti@centropiaggio.unipi.it)

# Misure di velocità ed accelerazione

## *Tecniche a differenziazione ed integrazione*

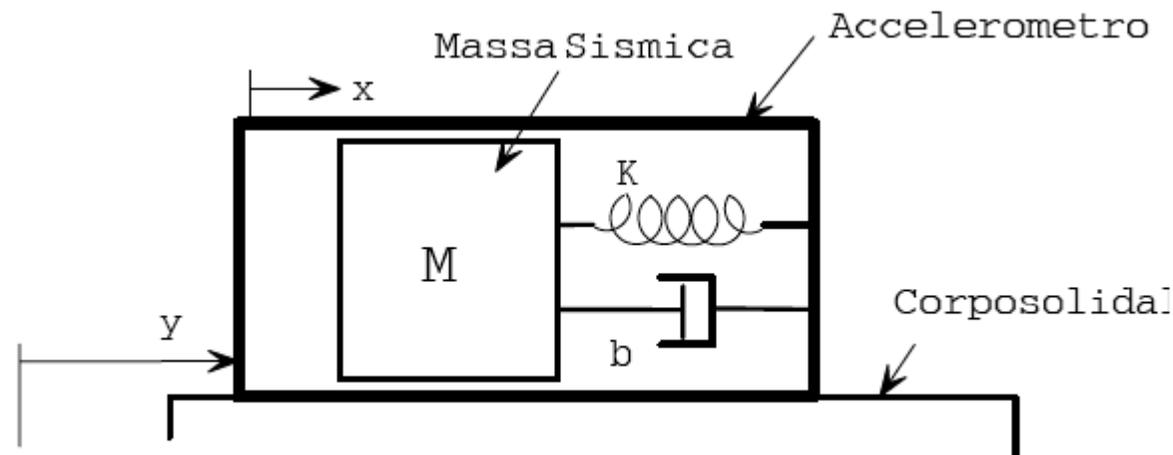
In linea di principio è possibile determinare la velocità e l'accelerazione istantanea differenziando elettronicamente l'uscita dai trasduttori di posizione: la derivata prima produce la velocità e la derivata seconda l'accelerazione. Nella realtà un processo di differenziazione accentua le piccole non linearità, errori di misura e rumori presenti nel segnale di partenza e se ciò può produrre un grado di accuratezza accettabile per la derivata prima, una differenziazione ulteriore comporterebbe errori troppo grandi. Partendo dall'accelerazione, invece, attraverso una tecnica duale di integrazione si può risalire alla velocità ed alla posizione. In questo caso, poiché un integratore elettronico è anche un filtro passa-basso, i disturbi in alta frequenza presenti nel segnale originale vengono attenuati, ma l'uso di tale blocco può risultare critico per i segnali aperiodici dove la presenza di una componente continua porta un'amplificazione dell'uscita fino alla saturazione.

# Sensori inerziali

- Accelerazioni, velocità angolari
  - Indirettamente angoli articolari
- Sfruttano la proprietà dei corpi di mantenere costante la propria velocità se non disturbati da forze esterne
- Sistema vestibolare umano
  - Sensore inerziale “biologico”
    - Sensibile alle accelerazioni lineari e angolari della testa
    - Equilibrio e mantenimento della postura eretta
- Sensori
  - Accelerometri e giroscopi
  - Tecnologia MEMS (Micro Electro-Mechanical Systems)
    - Bassi ingombri, robusti, economici, consumo di potenza limitato
  - Facilmente applicabili ai segmenti corporei di interesse

# Accelerometri

I trasduttori di accelerazione sono basati sulla legge di Newton  $F=Ma$ , in cui conoscendo la massa  $M$  è possibile risalire all'accelerazione misurando la forza  $F$ . Quest'ultima può essere valutata misurando la deformazione di una molla alla quale è collegata la massa attraverso uno strain gage o un sensore piezoelettrico.



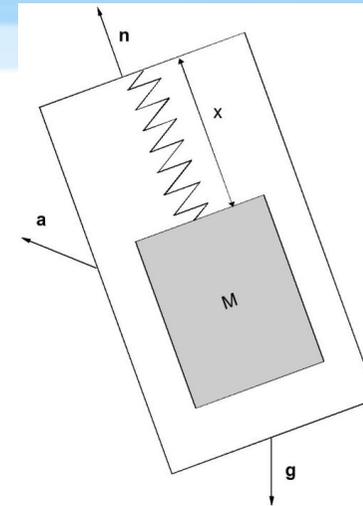
$$M \frac{d^2 x_m}{dt^2} = -b \frac{dx}{dt} - Kx$$

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + Kx = -M \frac{d^2 y}{dt^2}$$

Sistema del secondo ordine: a regime  
La deformazione misurata è  
proporzionale all'accelerazione

# Accelerometri (1)

- Accelerometro monoassiale
  - Massa collegata ad una molla libera di muoversi in una sola direzione
- Principio di funzionamento
  - Equilibrio delle forze
  - Lo spostamento ( $x$ ) è proporzionale alla differenza tra  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{g}$  ed è misurato con un sensore di deformazione



$$K \cdot x = M(\mathbf{a} - \mathbf{g}) \cdot \mathbf{n}$$

$$(\mathbf{a} - \mathbf{g}) \cdot \mathbf{n} = \frac{K \cdot x}{M}$$

$\mathbf{a}$  accelerazione del sistema

$\mathbf{g}$  accelerazione di gravità

$x$  allungamento

# Accelerometri (2)

- Uscita accelerometro in tensione

$$V = k (\mathbf{a} - \mathbf{g}) \cdot \mathbf{n} + V_o = k(\mathbf{a}_n - \mathbf{g}_n) + V_o$$

{ k sensibilità  
V<sub>0</sub> offset

- Segnale

$$y_i = (\mathbf{a} - \mathbf{g}) \cdot \mathbf{n}_i + b_i + q_i$$

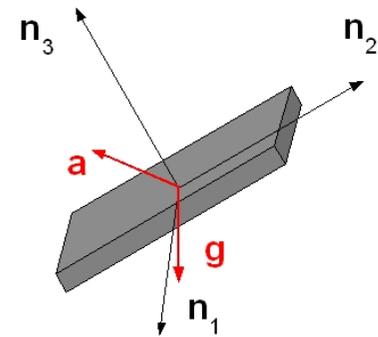
{  $\mathbf{n}_i$  versore asse di sensibilità  
b<sub>i</sub> offset  
q<sub>i</sub> termine di rumore

# Accelerometri (3)

- Accelerometro triassiale
  - Tre accelerometri monoassiali montati perpendicolarmente tra loro

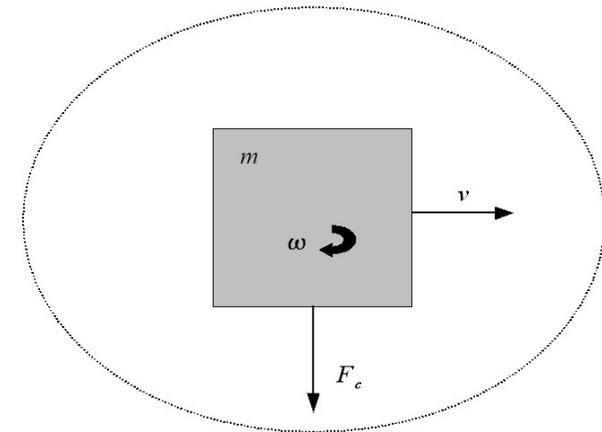
$$\mathbf{y}_k = \begin{bmatrix} y_{1,k} \\ y_{2,k} \\ y_{3,k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathbf{a}_k - \mathbf{g}) \cdot \mathbf{n}_{1,k} + b_{1,k} + q_{1,k} \\ (\mathbf{a}_k - \mathbf{g}) \cdot \mathbf{n}_{2,k} + b_{2,k} + q_{2,k} \\ (\mathbf{a}_k - \mathbf{g}) \cdot \mathbf{n}_{3,k} + b_{3,k} + q_{3,k} \end{bmatrix} = {}^{S,k} (\mathbf{a}_k - \mathbf{g}_k) + \mathbf{b}_k + \mathbf{q}_k$$

L'accelerometro triassiale misura la differenza tra accelerazione del sistema e gravità espresse in un sistema di coordinate solidale all'accelerometro



# Giroscopi (1)

- Misurano velocità angolari
- Principio di funzionamento
  - Massa libera di vibrare all'interno del sensore a velocità  $\mathbf{v}$
  - Rotazione ( $\boldsymbol{\omega}$ ): la forza di Coriolis induce una vibrazione secondaria ortogonale al senso di vibrazione originale.
  - Misurando la deformazione dovuta alla vibrazione secondaria si può determinare la velocità angolare.



$$\mathbf{F}_C = -2m(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v})$$

# Giroscopi (2)

- Giroscopio triassiale
  - Realizzato montando tre giroscopi monoassiali perpendicolarmente tra loro

$$\mathbf{y}_k = \begin{bmatrix} y_{1,k} \\ y_{2,k} \\ y_{3,k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_{1,k} + \mathbf{b}_{1,k} + \mathbf{v}_{1,k} \\ \omega_{2,k} + \mathbf{b}_{2,k} + \mathbf{v}_{2,k} \\ \omega_{3,k} + \mathbf{b}_{3,k} + \mathbf{v}_{3,k} \end{bmatrix} = \boldsymbol{\omega}_k + \mathbf{b}_k + \mathbf{v}_k \begin{cases} \boldsymbol{\omega} \\ \mathbf{b} \text{ offset} \\ \mathbf{v} \text{ termine di rumore} \end{cases}$$

Il giroscopio triassiale misura il vettore velocità angolare espresso nel sistema di coordinate del sensore

# Accelerometri per la misura di inclinazione di segmenti corporei (1)

- Si consideri un accelerometro applicato ad un segmento corporeo
- Condizioni statiche ( $|\mathbf{a}| \ll |\mathbf{g}|$ )
  - L'accelerometro misura il vettore gravità espresso nel sistema di riferimento del sensore.
  - È possibile determinare l'inclinazione del segmento rispetto alla verticale.

# Accelerometri per la misura di inclinazione di segmenti corporei (2)

$${}^{FS}\mathbf{R}_k = [{}^S X_k \quad {}^S Y_k \quad {}^S Z_k]^T$$

- Rotazione dal sistema fisso a quello solidale
- Versori della terna fissa espressi nel sistema solidale
- Inclinazione

$${}^{F,k}\mathbf{g} = {}^{FS}\mathbf{R}_k \cdot {}^{S,k}\mathbf{g} = {}^{FS}\mathbf{R}_k \cdot \begin{bmatrix} -(y_{1,k} - b_{1,k}) \\ -(y_{2,k} - b_{2,k}) \\ -(y_{3,k} - b_{3,k}) \end{bmatrix} = {}^{FS}\mathbf{R}_k \cdot \begin{bmatrix} \bar{y}_{1,k} \\ \bar{y}_{2,k} \\ \bar{y}_{3,k} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{y}_{1,k} \\ \bar{y}_{2,k} \\ \bar{y}_{3,k} \end{bmatrix} = ({}^{FS}\mathbf{R}_k)^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g_c \end{bmatrix} = ({}^{FS}\mathbf{R}_k)^T \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g_c \end{bmatrix}$$

${}^S Z_k$  ottenuto in funzione dei valori misurati dal sensore