

Fondamenti di Automatica - I Parte
Il progetto del controllore

Antonio Bicchi, Giordano Greco

Università di Pisa

<i>INDICE</i>	2
---------------	---

Indice

1	Introduzione	3
2	Approssimazioni della f.d.t. in anello chiuso	5
3	Metodi di progetto del controllore	8
4	Progetto del controllore per soddisfare le specifiche	10
4.1	Specifiche statiche: errore a regime per riferimenti polinomiali	11
4.1.1	Errore a regime per riferimenti a gradino	11
4.1.2	Errore a regime per riferimenti a rampa	12
4.1.3	Errore a regime per riferimenti polinomiali generici . .	13
4.2	Specifiche statiche: errore a regime dovuto ad un disturbo a gradino	13
4.3	Specifiche dinamiche	14
4.3.1	Massima sovraelongazione e tempo di assestamento . .	16
4.3.2	Reiezione dei disturbi di misura ad alta frequenza . . .	17
4.3.3	Reiezione dei disturbi a bassa frequenza	18
4.3.4	Causalità del controllore	18
4.4	Azioni correttrici	19
4.4.1	Esempio di utilizzo di azioni anticipatrici	19
4.4.2	Esempio di utilizzo di azioni ritardatrici	23

1 Introduzione

Si consideri un sistema lineare tempo invariante tempo continuo SISO con ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$, descritto dalla funzione di trasferimento $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$. Ci proponiamo di progettare un controllore in retroazione $C(s)$ in modo che l'evoluzione temporale dell'uscita $y(t)$ sia prossima a quella desiderata, e che quindi il sistema chiuso in retroazione soddisfi delle specifiche di 'buon funzionamento'. La prima specifica che il sistema in anello chiuso deve soddisfare è, ovviamente, la asintotica stabilità; inoltre, i margini di ampiezza e di fase dovranno essere tali da garantire che il sistema chiuso in retroazione sia sufficientemente lontano dall'instabilità. Esistono poi altre tipiche specifiche che un sistema dinamico deve soddisfare, e che saranno esaminate in dettaglio nei paragrafi che seguono.

In figura 1 viene riportato il più semplice schema a blocchi cui si può ricondurre un sistema in retroazione. La funzione di trasferimento che lega, in anello chiuso, il riferimento $R(s)$ e l'uscita $Y(s)$ è la seguente:

$$G_c(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)}.$$

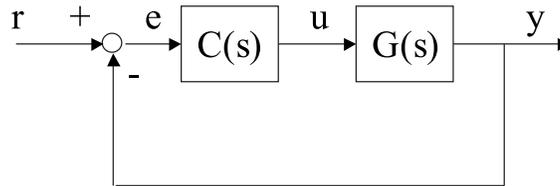


Figura 1: Schema di controllo in retroazione

Nel caso generale, l'uscita $y(t)$ potrà essere influenzata da alcuni ingressi di disturbo. Si pensi, ad esempio, ad un sistema meccanico sottoposto a due ingressi, di cui uno sia un ingresso di controllo $u(t)$, l'altro un ingresso di disturbo $d(t)$; il sistema può quindi essere descritto attraverso due funzioni di trasferimento, che legano l'uscita $Y(s)$ ai due ingressi $U(s)$ e $D(s)$:

$$Y(s) = G(s)U(s) + Q(s)D(s)$$

Inoltre, il sensore di misura dell'uscita potrà presentare del rumore $\nu(t)$, il quale si somma all'uscita $y(t)$ nella catena di retroazione. In figura 2 viene

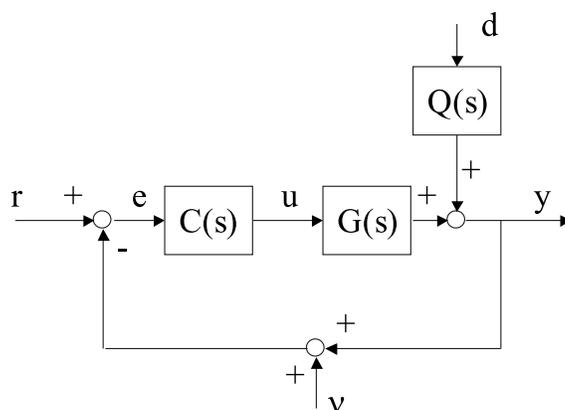


Figura 2: Schema di controllo in retroazione con ingressi di disturbo e rumore di misura

riportato lo schema di un sistema in retroazione, soggetto ad un ingresso di disturbo $d(t)$ e con sensore di misura soggetto a rumore $\nu(t)$.

Si noti che, a rigore, il sistema da studiare non è SISO bensì MISO, avendo più ingressi ed una sola uscita. D'altra parte, data la linearità del sistema, è possibile analizzare separatamente l'effetto dei vari ingressi sull'uscita e studiare quindi, di volta in volta, un sistema SISO; nel caso in cui i vari ingressi agiscano sul sistema contemporaneamente, l'uscita complessiva sarà la somma delle uscite dovute ai singoli ingressi, pensati agire separatamente.

Come già osservato a proposito del teorema di Nyquist, e come mostrato nei paragrafi successivi, il progetto di un controllore $C(s)$ tale che $G_c(s)$ abbia caratteristiche desiderate non è immediato, se si considerano i complessi effetti del controllore sulla f.d.t. in anello chiuso.

D'altra parte, questo compito risulta molto semplificato quando alcune importanti proprietà del sistema chiuso in retroazione possano essere dedotte direttamente attraverso l'analisi della funzione di trasferimento di anello $C(s)G(s)$. In altri termini, in questi casi le specifiche su $G_c(s)$ possono essere tradotte (almeno in prima approssimazione) in specifiche su $C(s)G(s)$. Ricordiamo che gli effetti del progetto del controllore $C(s)$ sulla f.d.t. di anello $C(s)G(s)$ sono facilmente prevedibili, sulla base di una analisi svolta ad esempio sui diagrammi logaritmici (principalmente quelli di Bode), nei quali i contributi del controllore semplicemente si sommano a quelli dell'impianto $G(s)$.

Queste osservazioni, che come vedremo si applicano direttamente per sistemi la cui f.d.t. $G(s)$ sia stabile in anello aperto, sono di grande utilità

nel progetto del controllore. Nei casi in cui la $G(s)$ non sia invece stabile prima della retroazione, sarà possibile un progetto in due fasi, nella prima delle quali si rende stabile il sistema, mentre il rispetto delle specifiche viene ottenuto nella seconda.

2 Approssimazioni della f.d.t. in anello chiuso

In questa sezione si intende mostrare come alcune delle principali caratteristiche della f.d.t. in anello chiuso $G_c(s)$ siano deducibili, in prima approssimazione, dalla analisi della funzione di anello $C(s)G(s)$. Le considerazioni che seguono si devono intendere non come valide in assoluto, ma come indicazioni di massima applicabili al progetto di controllori per sistemi con caratteristiche e specifiche di tipo comune.

In particolare, è da tenersi in conto il fatto che, nonostante le tipologie di impianti da controllare siano piuttosto ampie, il tipo di comportamento che ci si attende come risultato del controllo dei sistemi meccanici è invece piuttosto omogeneo.

È infatti spesso il caso che un sistema, anche di ordine elevato, quando controllato opportunamente in modo da rispettare le specifiche comunemente richieste, venga ad avere comportamenti dinamici simili a quelli di sistemi del primo o del secondo ordine. Conseguentemente, la funzione di trasferimento in anello chiuso $G_c(s)$ che lo rappresenta può quindi essere approssimata da una funzione di trasferimento con un solo polo o con due poli complessi coniugati.

Una funzione di trasferimento $G_c(s)$ si dice avere un *polo dominante* se è stabile e se possiede un polo reale molto più lento di ogni altro. $G_c(s)$ si dice avere due *poli dominanti* se è stabile e se possiede una coppia di poli complessi coniugati molto più lenti di ogni altro polo. Con la dizione “molto più lento” si intende che il polo, o i poli complessi coniugati, hanno una parte reale circa dieci volte minore, in valore assoluto, di ogni altro polo, e quindi una costante di tempo della risposta circa dieci volte più grande.

Si consideri lo schema di retroazione rappresentato in figura 1; ci proponiamo di analizzare le relazioni che esistono tra i diagrammi di Bode del modulo della f.d.t. di anello $C(j\omega)G(j\omega)$ e della f.d.t. di anello chiuso $G_c(j\omega) = \frac{C(j\omega)G(j\omega)}{1+C(j\omega)G(j\omega)}$.

Si consideri una f.d.t. di anello $C(s)G(s)$ senza poli a parte reale positiva e, per semplicità di trattazione, si assuma che il relativo diagramma di Bode delle ampiezze abbia un solo attraversamento dell'asse a 0 db (cf. fig. 3). Sia ω_T la pulsazione di taglio. Osservando che, per $\omega \ll \omega_T$, $|1 + C(j\omega)G(j\omega)| \simeq |C(j\omega)G(j\omega)|$ e che, per $\omega \gg \omega_T$, $|1 + C(j\omega)G(j\omega)| \simeq 1$, è possibile adottare

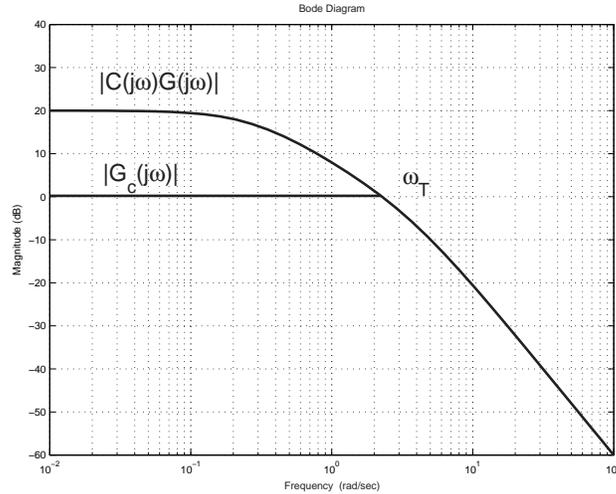


Figura 3: Approssimazione della funzione di trasferimento di anello chiuso $G_c(j\omega)$

la seguente approssimazione:

$$|G_c(j\omega)| = \frac{|C(j\omega)G(j\omega)|}{|1+C(j\omega)G(j\omega)|} \simeq 1, \quad \omega \leq \omega_T$$

$$|G_c(j\omega)| = \frac{|C(j\omega)G(j\omega)|}{|1+C(j\omega)G(j\omega)|} \simeq |C(j\omega)G(j\omega)|, \quad \omega > \omega_T.$$

Ovviamente, l'approssimazione appena ricavata risulta molto buona per pulsazioni $\omega \ll \omega_T$ e $\omega \gg \omega_T$, mentre può essere meno buona per pulsazioni prossime a quella di taglio.

Se la pendenza del diagramma delle ampiezze di $C(j\omega)G(j\omega)$, in prossimità della pulsazione di taglio ω_T , è di circa -20 db/decade, il sistema in anello chiuso sarà quindi approssimabile ad un sistema con un polo dominante in $-\omega_T$. Se la pendenza in ω_T è di circa -40 db/decade, una ragionevole approssimazione sarà data da un sistema con due poli dominanti con pulsazione naturale $\omega_n = \omega_T$.

Si può ulteriormente osservare che, nel caso di un solo polo dominante, la pulsazione di taglio è una buona approssimazione della banda passante a -3 db del sistema in anello chiuso, ovvero $\omega_B \simeq \omega_T$. Quando si abbiano due poli dominanti, invece, ω_T è solo una approssimazione per difetto di ω_B .

La posizione dei poli dominanti ha chiaramente diretta influenza sulla prontezza con cui il sistema in anello chiuso segue i riferimenti $r(t)$. Si ricordi al proposito che la risposta al gradino di un sistema ad un polo dominante $G_c(s) \simeq \frac{1}{\frac{1}{\omega_T}s+1}$, ha tempo di assestamento pari a $T_a \simeq 3\tau = \frac{3}{\omega_T}$.

D'altronde, la risposta al gradino di un sistema a due poli dominanti $G_c(s) \simeq \frac{1}{\frac{s^2}{\omega_T^2} + \frac{2\delta}{\omega_T}s + 1}$ con smorzamento non eccessivamente alto ($\delta \leq \sqrt{(2)/2}$), ha tempo di assestamento $T_a \simeq \frac{3}{\omega_T \delta}$.

Ricordando il teorema della risposta armonica, la pulsazione ω_T è dunque un importante indice del comportamento dinamico del sistema in anello chiuso, poiché segnali di riferimento $r(t)$ sinusoidali a pulsazione inferiore a ω_T passano inalterati attraverso il sistema e si ritrovano fedelmente nell'uscita $y(t)$, almeno per quel che riguarda l'ampiezza; lo stesso fenomeno accade ovviamente per componenti di disturbo che possono sommarsi al riferimento $r(t)$. Da una parte, quindi, la pulsazione ω_T dovrà essere sufficientemente elevata per permettere al sistema in anello chiuso di seguire con prontezza riferimenti che variano velocemente; dall'altra, non dovrà essere tanto elevata da permettere a segnali di disturbo (tipicamente ad alta frequenza) di passare inalterati attraverso il sistema. In pratica, il valore della pulsazione ω_T deve essere scelto come soluzione di compromesso tra queste due opposte esigenze.

È ora necessario ottenere alcune informazioni supplementari sui poli dominanti del sistema in anello chiuso; in particolare, è possibile ricavare una relazione approssimata tra lo smorzamento δ dei poli dominanti e il margine di fase M_f della f.d.t. di anello $C(s)G(s)$.

Si assuma, per il momento, che i poli dominanti siano complessi coniugati e che la pulsazione di taglio ω_T della f.d.t. di anello $C(s)G(s)$ sia una buona approssimazione della pulsazione naturale ω_n di questi poli. Sotto questa ipotesi, si calcoli il modulo della $G_c(j\omega)$ per $\omega = \omega_T$. Tenendo conto che il numero complesso $C(j\omega_T)G(j\omega_T)$ ha modulo unitario e fase ϕ_T generica, si può scrivere $C(j\omega_T)G(j\omega_T) = e^{j\phi_T}$; ricordando poi che $M_f = \pi + \phi_T$, si ottiene:

$$\begin{aligned} |G_c(j\omega_T)| &= \frac{|C(j\omega_T)G(j\omega_T)|}{|1 + C(j\omega_T)G(j\omega_T)|} = \frac{1}{|1 + e^{j\phi_T}|} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2(1 - \cos M_f)}} = \frac{1}{2 \sin(M_f/2)} \end{aligned}$$

dove l'ultimo passaggio si basa sull'ipotesi che il margine di fase sia positivo. Se, a questo punto, si sfrutta l'ipotesi di approssimare il sistema in anello chiuso ad un sistema del secondo ordine asintoticamente stabile con guadagno unitario, privo di zeri e con pulsazione naturale $\omega_n = \omega_T$, deve valere la relazione:

$$|G_c(j\omega_T)| = |G_c(j\omega_n)| = \frac{1}{2\delta}$$

con δ smorzamento dei poli. Si arriva quindi all'importante relazione:

$$\delta = \sin\left(\frac{M_f}{2}\right).$$

La relazione appena trovata è molto importante poiché esprime un legame tra lo smorzamento dei poli dominanti del sistema in anello chiuso e il margine di fase della f.d.t. di anello, il quale può essere facilmente dedotto dall'analisi dei diagrammi di Bode di $C(s)G(s)$. Si ricordi, comunque, che questa relazione si basa su tutta una serie di ipotesi semplificative che, nella pratica, possono non essere esattamente verificate; dunque, il valore dello smorzamento δ così ottenuto è approssimato e fornisce solamente un'indicazione di primo tentativo.

Convenzionalmente, il margine di fase M_f è espresso in gradi; per valori di M_f inferiori a circa 75° , è possibile sostituire alla funzione $\sin(M_f/2)$ il suo argomento $M_f/2$ espresso in radianti, ed ottenere quindi la relazione approssimata:

$$\delta = \frac{M_f}{2} \frac{\pi}{180} \simeq \frac{M_f}{100}. \quad (1)$$

La relazione appena trovata può essere giustificata, da un punto di vista puramente qualitativo, anche in base alle considerazioni che seguono. Se la f.d.t. di anello $C(s)G(s)$ è stabile e il sistema in anello chiuso $G_c(s)$ può essere ben approssimato da un sistema del secondo ordine, lo smorzamento δ dei poli dominanti del sistema in anello chiuso è strettamente legato alla posizione, nel piano complesso, dei poli stessi. I poli dominanti del sistema in anello chiuso sono quelli più vicini all'asse immaginario; se si considera il diagramma di Nyquist della funzione di trasferimento di anello $C(j\omega)G(j\omega)$, l'avvicinarsi del diagramma al punto critico $(-1, 0)$ è associato all'avvicinarsi all'asse immaginario dei poli dominanti. Questi ultimi si troveranno sull'asse immaginario quando il diagramma polare di $C(j\omega)G(j\omega)$ passa per il punto critico $(-1, 0)$ e passano nel semipiano a parte reale positiva quando il diagramma circonda il punto critico. Quindi, la posizione nel piano complesso dei poli dominanti del sistema in anello chiuso, e quindi il loro smorzamento δ , sono strettamente legati al margine di fase M_f del sistema in anello aperto.

3 Metodi di progetto del controllore

Già in base a quanto esposto nei precedenti paragrafi, si capisce come il progetto del controllore $C(s)$ possa essere condotto con vantaggio facendo riferimento ai diagrammi di Bode della f.d.t. di anello $C(s)G(s)$. Ovviamente, perché i risultati dell'analisi fin qui svolta possano essere applicati, anche

in via approssimata, è necessario che la f.d.t. di anello $C(s)G(s)$ sia stabile; si ricordi che lo stesso concetto di margine di fase può essere applicato solamente a sistemi stabili in anello aperto.

Se il sistema da controllare $G(s)$ è stabile in anello aperto, il progetto del controllore viene quindi effettuato facendo riferimento al diagramma di Bode della f.d.t. di anello $C(s)G(s)$, come spiegato nei successivi paragrafi. Se la funzione di trasferimento $G(s)$ è a fase minima, la sola analisi del diagramma dell'ampiezza $|C(j\omega)G(j\omega)|$ può fornire tutte le informazioni necessarie, almeno lontano dalle singolarità (si veda in proposito la formula di Bode). Se invece $G(s)$ non è a fase minima, l'analisi deve essere condotta utilizzando entrambi i diagrammi di Bode di ampiezza e fase della f.d.t. di anello $C(j\omega)G(j\omega)$.

Nel caso in cui la funzione di trasferimento del sistema da controllare $G(s)$ abbia poli a parte reale positiva, non è invece possibile operare direttamente attraverso i diagrammi di Bode della f.d.t. di anello $C(s)G(s)$, perchè in questi non è agevole tenere conto delle condizioni del teorema di Nyquist che coinvolgono i circondamenti del punto $-1 + j0$. Sarà opportuno in questi casi utilizzare la cosiddetta tecnica del doppio anello di retroazione (o della retroazione in cascata), schematizzata in fig. 4. Per prima cosa, si progetta un controllore $C_1(s)$ che renda asintoticamente stabile il sistema in anello chiuso $G_1(s) = \frac{C_1(s)G(s)}{1+C_1(s)G(s)}$. Questo controllore può essere progettato con l'impiego di tecniche quali il luogo delle radici, che verranno esaminate più avanti, e non ha altro scopo se non quello di rendere asintoticamente stabile il sistema $G_1(s)$ senza preoccuparsi delle specifiche. A questo punto, il sistema $G_1(s)$ viene a sua volta chiuso in retroazione e nella catena diretta viene inserito un controllore $C_2(s)$, in grado di soddisfare le specifiche richieste. Il progetto di questo controllore viene effettuato sulla base dei diagrammi di Bode della f.d.t. di anello $C_2(s)G_1(s)$.

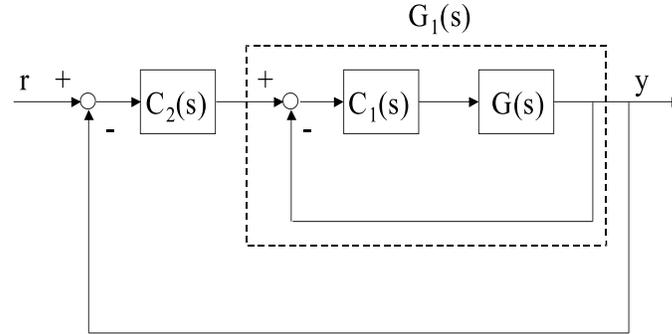


Figura 4: Tecnica del doppio anello di retroazione

4 Progetto del controllore per soddisfare le specifiche

Consideriamo adesso il progetto di un controllore assumendo che il sistema da controllare non abbia poli a parte reale positiva.

Le specifiche che il sistema in anello chiuso deve soddisfare possono essere suddivise in due categorie: specifiche riguardanti il comportamento a regime del sistema, e specifiche sul comportamento del sistema durante i transitori. Le specifiche che appartengono alla prima categoria vengono comunemente indicate come *specifiche statiche*, mentre quelle appartenenti alla seconda categoria vengono dette *specifiche dinamiche*.

Con riferimento alla fig. 2, la funzione di uscita $Y(s)$ è legata al riferimento $R(s)$, al disturbo $D(s)$ e al rumore di misura $\nu(s)$ attraverso la relazione:

$$Y(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)}R(s) + \frac{Q(s)}{1 + C(s)G(s)}D(s) - \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)}\nu(s). \quad (2)$$

Se la funzione di trasferimento del sistema $G(s)$ è stabile in anello aperto, è conveniente ricercare un controllore $C(s)$ della forma

$$C(s) = \frac{K}{s^t}C_0(s), \quad (3)$$

con $C_0(0) = 1$. Come si vedrà nei punti seguenti, la costante di guadagno K e il tipo t del controllore potranno essere scelti in base alle sole specifiche statiche. La restante parte del controllore, $C_0(s)$, viene progettata in seguito in modo che risultino soddisfatte anche le specifiche dinamiche. Imporre che $C_0(0) = 1$ significa che questa parte del controllore non altera il comportamento a regime e quindi le specifiche statiche del sistema.

Nei punti che seguono saranno analizzate le principali specifiche che un sistema chiuso in retroazione deve tipicamente rispettare.

4.1 Specifiche statiche: errore a regime per riferimenti polinomiali

Spesso si richiede che un sistema in retroazione riesca a seguire, a regime, riferimenti $r(t)$ di tipo polinomiale. Si pensi, ad esempio, al caso di un servomeccanismo che debba posizionare una massa mobile su di un binario, o che le debba imporre una data velocità costante. In alcuni casi, è sufficiente che il riferimento (di posizione, di velocità ecc.) sia raggiunto con errore a regime minore, in modulo, di un certo errore accettabile \bar{e} (tipicamente, una frazione del valore del riferimento stesso); altre volte l'errore a regime deve essere nullo.

Con riferimento alla figura 2, trascurando per il momento la presenza del disturbo di misura $\nu(t)$, la funzione di trasferimento che lega l'errore $E(s)$ ai due ingressi $R(s)$ e $D(s)$ è la seguente:

$$E(s) = R(s) - Y(s) = \frac{1}{1 + C(s)G(s)}R(s) - \frac{Q(s)}{1 + C(s)G(s)}D(s).$$

Applicando il teorema del valore finale, l'errore a regime vale:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{1 + C(s)G(s)}R(s) - \frac{sQ(s)}{1 + C(s)G(s)}D(s).$$

Nei punti che seguono si ipotizza che la f.d.t. $C(s)G(s)$ sia una funzione razionale fratta in forma di Bode con costante di guadagno positiva. Inoltre, poiché il sistema è lineare, è possibile applicare il principio di sovrapposizione degli effetti; quindi gli effetti del riferimento $R(s)$ e del disturbo $D(s)$ sull'errore a regime verranno esaminati separatamente.

4.1.1 Errore a regime per riferimenti a gradino

Se il riferimento $r(t)$ è un gradino, vale la relazione:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{1 + C(s)G(s)} \frac{1}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + C(s)G(s)}.$$

Nel caso in cui la f.d.t. di anello $C(s)G(s)$ non abbia poli nell'origine (tipo del controllore $t = 0$, $G(s)$ senza poli nell'origine), l'errore a regime è finito. Se

si desidera che l'errore sia, in modulo, minore di un dato errore ammissibile \bar{e} , deve valere la relazione:

$$KG(0) > \frac{1 - \bar{e}}{\bar{e}}.$$

Questa relazione permette, dato \bar{e} , di calcolare il minimo valore ammissibile per il guadagno K del controllore.

Se, invece, la f.d.t. di anello $C(s)G(s)$ ha uno o più poli nell'origine, l'errore a regime è nullo. Si consideri, ad esempio, il caso in cui $G(s)$ non abbia poli nell'origine, mentre $C(s)$ ne abbia uno (tipo del controllore $t = 1$); poiché il guadagno $G(0)$ è finito, vale la relazione:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \frac{K}{s}G(s)} = 0.$$

Quindi, se le specifiche impongono che a regime l'errore al gradino sia nullo, è necessario che la f.d.t. di anello $C(s)G(s)$ abbia almeno un polo nell'origine. Se la f.d.t. del sistema da controllare $G(s)$ ha uno o più poli nell'origine, la specifica risulta evidentemente già soddisfatta; se invece la f.d.t. $G(s)$ non ha poli nell'origine, il controllore $C(s)$ ne deve avere almeno uno.

4.1.2 Errore a regime per riferimenti a rampa

Si analizzi ora il caso in cui il riferimento sia una rampa $r(t) = \alpha t$. Un riferimento di questo tipo permette di imporre delle condizioni sulla velocità $\dot{y}(t)$ dell'uscita $y(t)$ del sistema. Ad esempio, imporre che a regime l'errore alla rampa sia nullo equivale ad imporre che, per tempi sufficientemente elevati, valga $y(t) = \alpha t$ e quindi $\dot{y}(t) = \alpha$.

In questo caso, l'errore a regime vale:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + C(s)G(s)} \frac{\alpha}{s^2} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\alpha}{s + sC(s)G(s)}.$$

È necessario a questo punto distinguere tre casi.

- Se la f.d.t. di anello $C(s)G(s)$ non ha poli nell'origine, $C(0)G(0)$ è finito e l'errore a regime è infinito.
- Se la f.d.t. di anello $C(s)G(s)$ ha un polo nell'origine, l'errore a regime è finito. Si consideri, ad esempio, il caso in cui $G(s)$ non abbia poli nell'origine e $C(s) = \frac{K}{s}C_0(s)$; vale la relazione:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\alpha}{s + s \frac{K}{s}G(s)} = \frac{\alpha}{0 + KG(0)} = \frac{\alpha}{KG(0)}.$$

Se le specifiche impongono che l'errore a regime sia inferiore in modulo ad un certo valore ammissibile \bar{e} , la relazione che deve essere verificata è quindi la seguente:

$$KG(0) > \frac{|\alpha|}{\bar{e}}.$$

- Nel caso in cui la f.d.t. di anello $C(s)G(s)$ abbia due o più poli nell'origine, l'errore a regime è nullo.

Quindi, se le specifiche impongono che l'errore alla rampa sia nullo, è necessario che la f.d.t. di anello $C(s)G(s)$ abbia almeno due poli nell'origine. In base a questa esigenza, e in base al fatto che uno o più poli nell'origine possono essere già presenti in $G(s)$, è possibile stabilire il tipo t del controllore.

4.1.3 Errore a regime per riferimenti polinomiali generici

Generalizzando i risultati ottenuti nei punti precedenti, se il riferimento $r(t)$ è una funzione polinomiale del tempo di ordine n , imporre che l'errore a regime sia finito equivale ad imporre che la f.d.t. di anello $C(s)G(s)$ abbia almeno n poli nell'origine. L'errore a regime è invece nullo se la f.d.t. di anello $C(s)G(s)$ ha almeno $n + 1$ poli nell'origine.

4.2 Specifiche statiche: errore a regime dovuto ad un disturbo a gradino

Si consideri infine l'effetto di un disturbo a gradino. L'errore a regime dovuto al solo disturbo vale:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} -s \frac{Q(s)}{1 + C(s)G(s)} \frac{1}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} - \frac{Q(s)}{1 + C(s)G(s)}.$$

L'errore appena calcolato andrà a sommarsi agli eventuali errori a regime dovuti al non perfetto inseguimento dei riferimenti da parte del sistema, analizzati nei punti precedenti.

Si ammetta per il momento che la f.d.t. $Q(s)$ non abbia poli nell'origine. Se la f.d.t. di anello $C(s)G(s)$ non ha poli nell'origine, la relazione appena scritta diventa:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = - \frac{Q(0)}{1 + KG(0)},$$

dalla quale si deduce che per limitare in modulo l'errore a regime dovuto ai disturbi occorre aumentare i guadagni delle f.d.t. a monte dei disturbi stessi (K e $G(0)$). Se invece la f.d.t. di anello $C(s)G(s)$ ha uno o più poli nell'origine, l'errore a regime dovuto al disturbo si annulla.

Si consideri adesso il caso in cui la f.d.t. $Q(s)$ abbia h poli nell'origine. Affinché l'errore a regime dovuto al disturbo sia finito occorre che la f.d.t. di anello $C(s)G(s)$ abbia anch'essa almeno h poli nell'origine; in caso contrario, l'errore a regime dovuto al disturbo è infinito. L'errore a regime è poi nullo se $C(s)G(s)$ ha almeno $h + 1$ poli nell'origine.

La posizione nella catena d'anello aperto in cui agisce il disturbo può, in generale, essere diversa da quella riportata in fig. 2. Si consideri, a titolo di esempio, lo schema a blocchi di fig. 5. In questo caso, la f.d.t. che lega

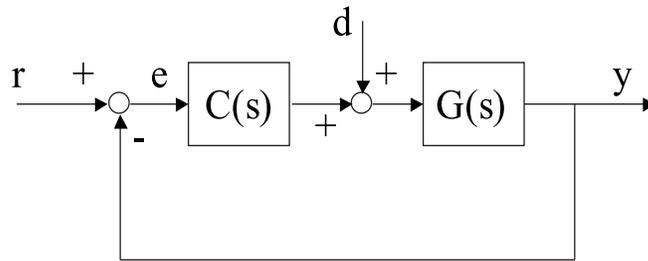


Figura 5: Schema a blocchi relativo ad una diversa posizione del disturbo

l'errore $E(s)$ al disturbo $D(s)$ è la seguente:

$$E(s) = -\frac{G(s)}{1 + C(s)G(s)}D(s).$$

L'errore a regime per disturbi a gradino vale:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} -\frac{G(s)}{1 + C(s)G(s)}.$$

Dalla relazione appena scritta si deduce che, per limitare in modulo l'errore dovuto al disturbo, è necessario aumentare il guadagno della f.d.t. del controllore $C(s)$. Al contrario, un aumento del guadagno della f.d.t. del sistema $G(s)$ non può servire ad attenuare il valore di regime dell'errore. L'errore a regime sarà nullo nel caso in cui $C(s)$ abbia almeno un polo nell'origine.

Anche in quest'ultimo caso, quindi, l'errore a regime dovuto ad un disturbo può essere attenuato solamente aumentando il guadagno della f.d.t. a monte del punto in cui il disturbo stesso agisce.

4.3 Specifiche dinamiche

Come visto nei punti precedenti, sulla base delle sole specifiche statiche è possibile stabilire il minimo valore richiesto per il guadagno K e il tipo t

del controllore. Una volta che siano stati trovati i valori di K e di t che soddisfano le specifiche statiche, è possibile andare a progettare il controllore $C_0(s)$ in modo da soddisfare le specifiche dinamiche (cf. fig. 6).

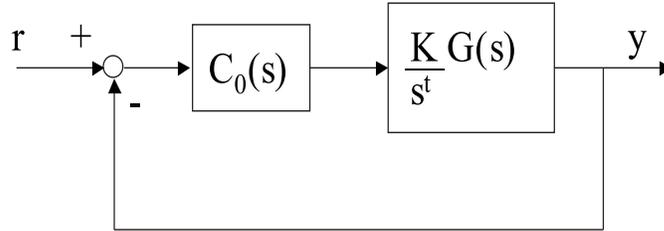


Figura 6: Schema a blocchi di riferimento per il progetto del controllore $C_0(s)$

La prima specifica da soddisfare è, ovviamente, che il sistema in anello chiuso sia asintoticamente stabile. Si ricordi che, per ipotesi, $G(s)$ non ha poli a parte reale positiva; in caso contrario, è necessario utilizzare la tecnica del doppio anello di retroazione e quanto verrà detto potrà essere applicato alla f.d.t. $G_1(s)$ asintoticamente stabile (cf. fig. 4). Se quindi la f.d.t. $C_0(s)$ viene progettata con tutti i poli a parte reale negativa, in base al teorema di Nyquist la specifica di asintotica stabilità del sistema in anello chiuso è soddisfatta se e solo se il diagramma polare completo della f.d.t. $C(s)G(s) = \frac{K}{s^t}C_0(s)G(s)$ non circonda né tocca il punto critico $(-1,0)$. Inoltre, la stabilità del sistema in anello chiuso dovrà essere sufficientemente robusta, e ciò può essere soddisfatto garantendo valori adeguati dei margini di fase e di ampiezza della f.d.t. di anello $C(s)G(s)$.

Oltre alla specifica di asintotica stabilità, si richiede, tipicamente, che il sistema in anello chiuso soddisfi altre specifiche dinamiche, descritte in dettaglio nel seguito. Come vedremo, le varie specifiche sul sistema in anello chiuso si traducono, in prima approssimazione, in specifiche sulla f.d.t. di anello $C(s)G(s)$. Nel progetto di $C_0(s)$ è molto comodo avvalersi dei diagrammi di Bode della f.d.t. $\frac{K}{s^t}G(s)$: infatti, utilizzando questi diagrammi risulta immediato prevedere gli effetti del progetto del controllore $C_0(s)$ sulla f.d.t. di anello $C(s)G(s) = \frac{K}{s^t}C_0(s)G(s)$, poiché i contributi in modulo e fase del controllore $C_0(s)$ semplicemente si sommano a quelli di $\frac{K}{s^t}G(s)$. In questo modo, quindi, è immediato capire come progettare $C_0(s)$ in modo che la f.d.t. $C(s)G(s)$ soddisfi le specifiche volute.

4.3.1 Massima sovraelongazione e tempo di assestamento

Tra le specifiche dinamiche che il sistema in anello chiuso deve rispettare, particolare importanza rivestono le specifiche sulla massima sovraelongazione e sul tempo di assestamento della risposta al gradino.

Se la massima sovraelongazione ammissibile è maggiore di zero (in pratica, superiore al 5%), è lecito approssimare il sistema in anello chiuso ad un sistema del secondo ordine (approssimazione a due poli dominanti). In base alla relazione $S = e^{-\frac{\pi\bar{\delta}}{\sqrt{1-\bar{\delta}^2}}}$, valida per sistemi del secondo ordine, data la massima sovraelongazione consentita \bar{S} si può ricavare il valore $\bar{\delta}$ del minimo smorzamento che i poli dominanti del sistema devono avere. In base alla relazione (1) è quindi possibile ricavare il minimo valore del margine di fase \bar{M}_f richiesto per la f.d.t. di anello $C(s)G(s)$.

Se invece le specifiche richiedono che la massima sovraelongazione sia nulla (in pratica, inferiore al 5%), è possibile approssimare il sistema in anello chiuso ad un sistema del primo ordine (approssimazione ad un polo dominante). In questo caso, la f.d.t. di anello $C(s)G(s)$ deve avere margine di fase \bar{M}_f pari a circa 90° .

Si consideri a questo punto la specifica sul tempo di assestamento T_a . Se il sistema in anello chiuso può essere approssimato ad un sistema del secondo ordine, affinché il tempo di assestamento sia inferiore ad un dato valore \bar{T}_a deve valere la relazione:

$$\omega_T > \frac{3}{\bar{\delta}\bar{T}_a}.$$

Nel caso, invece, in cui il sistema in anello chiuso possa essere approssimato ad un sistema del primo ordine, la relazione da verificare diventa:

$$\omega_T > \frac{3}{\bar{T}_a}.$$

Quindi, se il sistema in anello chiuso può essere approssimato ad un sistema del secondo ordine, le specifiche sulla massima sovraelongazione e sul tempo di assestamento della risposta al gradino si traducono nell'imporre che sui diagrammi di Bode il modulo della f.d.t. di anello $C(j\omega)G(j\omega)$ tagli l'asse a 0 db per pulsazioni di taglio superiori a circa $\frac{3}{\bar{\delta}\bar{T}_a}$ e che il relativo margine di fase sia superiore a circa $100\bar{\delta}$. Se invece il sistema in anello chiuso può essere approssimato ad un sistema del primo ordine, queste specifiche si traducono nell'imporre che il modulo della f.d.t. di anello tagli l'asse a 0 db per pulsazioni di taglio superiori a circa $\frac{3}{\bar{T}_a}$ e che il relativo margine di fase sia pari a circa 90° .

Come si vede, anche in questo caso le specifiche cui deve soddisfare il sistema in anello chiuso si traducono in specifiche sulla f.d.t. di anello $C(s)G(s)$;

a loro volta, queste specifiche possono essere soddisfatte progettando opportunamente il controllore $C_0(s)$ in base ai diagrammi di Bode della f.d.t. $\frac{K}{s^t}G(s)$.

4.3.2 Reiezione dei disturbi di misura ad alta frequenza

Spesso i sensori di misura dell'uscita $y(t)$ sono soggetti a rumore ad alta frequenza; in uscita l'effetto di questi disturbi va a sommarsi a quello dovuto al riferimento $r(t)$ e, se non viene sufficientemente attenuato, può pregiudicare il buon funzionamento del sistema in anello chiuso. Attraverso un opportuno progetto del controllore $C_0(s)$, d'altra parte, è possibile attenuare l'effetto che questi disturbi hanno sull'uscita $y(t)$.

Per il momento, si approssimi il rumore di misura ad una funzione sinusoidale del tempo $\nu(t) = N \sin(\omega t)$ con pulsazione ω superiore ad un dato valore di soglia $\bar{\omega}$. In base al principio di sovrapposizione degli effetti, in questa analisi si può considerare che sul sistema in anello chiuso agisca il solo disturbo $\nu(t)$ e riferirsi quindi alla f.d.t. seguente:

$$\frac{Y(s)}{\nu(s)} = -\frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)}.$$

Poiché il controllo renderà asintoticamente stabile il sistema in anello chiuso, è possibile applicare il teorema della risposta armonica alla f.d.t. $\frac{Y(s)}{\nu(s)}$. Se le specifiche impongono che in uscita l'ampiezza delle oscillazioni causate dal disturbo sia inferiore o al più uguale ad un dato valore ammissibile ϵ , nel campo delle pulsazioni $\omega > \bar{\omega}$ deve valere la relazione:

$$N \frac{|C(j\omega)G(j\omega)|}{|1 + C(j\omega)G(j\omega)|} \leq \epsilon.$$

Se, come spesso accade nei casi pratici, nel campo delle alte frequenze (per $\omega > \bar{\omega}$) vale $|C(j\omega)G(j\omega)| \ll 1$, in prima approssimazione la relazione da soddisfare diventa la seguente:

$$|C(j\omega)G(j\omega)| \leq \frac{\epsilon}{N}, \quad \text{per } \omega > \bar{\omega}.$$

Dal punto di vista operativo, quindi, la specifica sull'attenuazione degli effetti dei disturbi di misura in uscita si traduce nel progettare un controllore $C_0(s)$ tale che, per $\omega > \bar{\omega}$, valga la relazione $|C(j\omega)G(j\omega)| \leq \frac{\epsilon}{N}$.

Nel caso generale il rumore di misura può essere ben approssimato da un segnale periodico, con ampiezza limitata e pulsazione superiore ad una certa soglia $\bar{\omega}$. Sviluppando questo segnale in serie di Fourier è possibile ottenere una sommatoria di infinite funzioni sinusoidali del tempo con pulsazione

crescente. Poiché il sistema è lineare e, per esso, vale il principio di sovrapposizione degli effetti, è possibile considerare che ciascuna delle componenti frequenziali del segnale di partenza agisca sul sistema in modo separato e indipendente da tutte le altre. Per ognuna di queste componenti sinusoidali valgono le considerazioni prima riportate e la specifica sulla reiezione dei disturbi di misura potrà quindi essere soddisfatta con riferimento alla sinusoide che, nello spettro del segnale di disturbo, ha ampiezza N maggiore.

4.3.3 Reiezione dei disturbi a bassa frequenza

Con riferimento alla fig. 2, si consideri il caso in cui sul sistema agisca un disturbo sinusoidale $d(t) = D \sin(\omega t)$ a bassa frequenza, quindi con pulsazione ω minore di una certa pulsazione di soglia $\hat{\omega}$. Una tipica specifica che, in questo caso, il sistema in anello chiuso dovrà soddisfare è quella di limitare in uscita l'ampiezza delle oscillazioni causate dal disturbo al di sotto di un dato valore di soglia $\hat{\epsilon}$.

Applicando il teorema della risposta armonica alla f.d.t. $\frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{Q(s)}{1+C(s)G(s)}$, per pulsazioni $\omega < \hat{\omega}$ deve valere la relazione:

$$D \frac{|Q(j\omega)|}{|1 + C(j\omega)G(j\omega)|} \leq \hat{\epsilon}.$$

Se, come spesso accade nei casi pratici, nel campo delle basse frequenze (per $\omega < \hat{\omega}$) vale $|C(j\omega)G(j\omega)| \gg 1$, in prima approssimazione la relazione da soddisfare diventa la seguente:

$$|C(j\omega)G(j\omega)| \geq \frac{D}{\hat{\epsilon}} |Q(j\omega)|, \quad \text{per } \omega < \hat{\omega}.$$

A questo punto, utilizzando i diagrammi di Bode dell'ampiezza $|C(j\omega)G(j\omega)|$ e dell'ampiezza $|Q(j\omega)|$ è possibile progettare un controllore $C_0(s)$ che verifichi la relazione appena scritta.

4.3.4 Causalità del controllore

La funzione di trasferimento $C(s)$ del controllore è rappresentativa di un sistema dinamico e, come tale, dovrà essere causale. Una volta che nel controllore sia stato inserito un numero di zeri e di poli strettamente necessario a soddisfare tutte le specifiche richieste, può capitare che il numero degli zeri sia maggiore del numero dei poli e che, quindi, il controllore stesso non risulti causale. Per garantire la causalità del controllore è quindi necessario introdurre al suo interno altri poli fino a che la differenza poli - zeri non sia nulla. Poiché il sistema in anello chiuso ottenuto prima dell'inserimento dei nuovi

poli soddisfa già tutte le specifiche, è necessario che questi poli non modifichino in maniera sostanziale il margine di fase e la pulsazione di taglio della f.d.t. di anello, né l'andamento del suo modulo in bassa frequenza (reiezione dei disturbi). Solitamente, quindi, i poli che vengono inseriti nel controllore per avere la causalità sono in alta frequenza, cioè a pulsazione molto maggiore di quella di taglio. In questo modo non solo non vengono modificati apprezzabilmente il margine di fase, la pulsazione di taglio e il comportamento in bassa frequenza della f.d.t. di anello $C(s)G(s)$, ma vengono ulteriormente attenuati gli effetti sull'uscita dei disturbi in alta frequenza.

4.4 Azioni correttrici

Per soddisfare le specifiche dinamiche è possibile introdurre nella f.d.t. del controllore $C_0(s)$ opportune *azioni correttrici*. A questo scopo il progettista ha a disposizione essenzialmente due tipi di azioni, *anticipatrici* e *ritardatrici*.

- Una *azione anticipatrice* è descritta da una funzione di trasferimento del tipo

$$R(s) = \frac{\tau s + 1}{\alpha \tau s + 1}$$

con $\tau > 0$ e $0 < \alpha < 1$. I diagrammi di Bode (reali e asintotici) di una azione anticipatrice vengono riportati in fig. 7; come si vede, questo tipo di azione permette di ottenere un anticipo di fase nella f.d.t. di anello $C(s)G(s)$.

- Una *azione ritardatrice* è invece descritta da una funzione di trasferimento del tipo

$$R(s) = \frac{\tau s + 1}{\alpha \tau s + 1}$$

con $\tau > 0$ e $\alpha > 1$. I diagrammi di Bode (reali e asintotici) di una azione ritardatrice vengono riportati in fig. 8; come si vede, una azione ritardatrice contribuisce a ridurre l'ampiezza della f.d.t. di anello per alte frequenze, mentre introduce uno sfasamento negativo nel diagramma delle fasi.

4.4.1 Esempio di utilizzo di azioni anticipatrici

Come esempio di utilizzo di azioni anticipatrici, si consideri la f.d.t. $\frac{K}{s}G(s) = \frac{1000}{s(s+20)(s+1)}$. Si ipotizzi che la prima parte del controllore $\frac{K}{s}$ sia stata preventivamente progettata in modo da soddisfare le specifiche statiche; ci proponiamo adesso di progettare un controllore $C_0(s)$ tale che la f.d.t. di anello $C(s)G(s) = \frac{K}{s}C_0(s)G(s)$ soddisfi le seguenti specifiche:

4 PROGETTO DEL CONTROLLORE PER SODDISFARE LE SPECIFICHE20

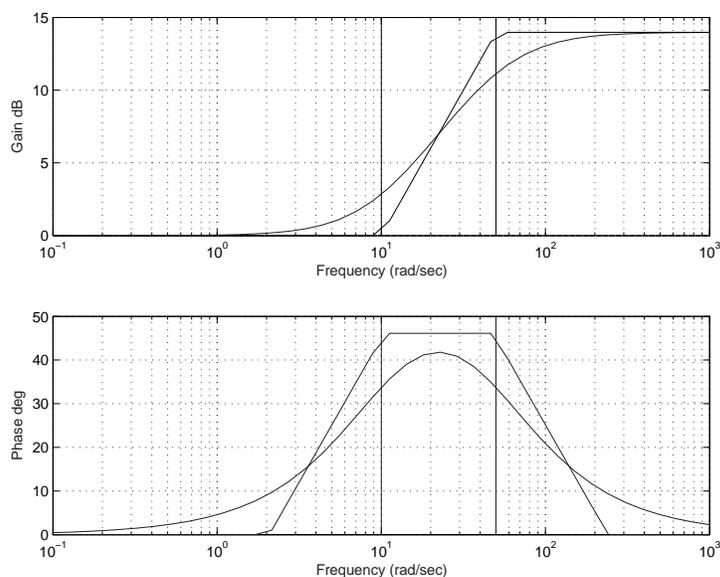


Figura 7: Diagrammi di Bode di una azione anticipatrice

- pulsazione di taglio $\omega_T \geq 50$ rad/s;
- margine di fase M_f di circa 90° ;
- $|C(j\omega)G(j\omega)| < -50$ db per $\omega > 5000$ rad/sec.

Il diagramma di Bode della f.d.t. $\frac{K}{s}G(s)$ è riportato in fig. 9. Poiché la f.d.t. è a fase minima, la specifica sul margine di fase è soddisfatta se il diagramma delle ampiezze taglia l'asse a 0 db lontano dalle singolarità con pendenza di -20 db/decade.

Le specifiche richieste possono essere tradotte da un punto di vista grafico, riportando sul diagramma delle ampiezze una serie di vincoli che il grafico di $|C(j\omega)G(j\omega)|$ dovrà rispettare; nel caso in esame, il modulo in db della f.d.t. $C(j\omega)G(j\omega)$ dovrà essere positivo per $\omega < 50$ rad/s, tagliare l'asse a 0 db per $\omega \geq 50$ rad/s con pendenza di circa -20 db/decade e mantenersi al di sotto di -50 db per $\omega > 5000$ rad/s.

Come si vede, per soddisfare le specifiche è necessario aumentare la pulsazione di taglio e, in corrispondenza ad essa, aumentare la fase della f.d.t. di anello; è quindi necessaria un'azione anticipatrice. Se si inseriscono nel controllore $C_0(s)$ due zeri in -10 e -1 , le specifiche sulla pulsazione di taglio e sul margine di fase vengono soddisfatte (fig. 10).

A questo punto, per soddisfare l'ultima specifica è possibile inserire due poli ad alta frequenza, in modo da abbassare ulteriormente il modulo della f.d.t.

4 PROGETTO DEL CONTROLLORE PER SODDISFARE LE SPECIFICHE21

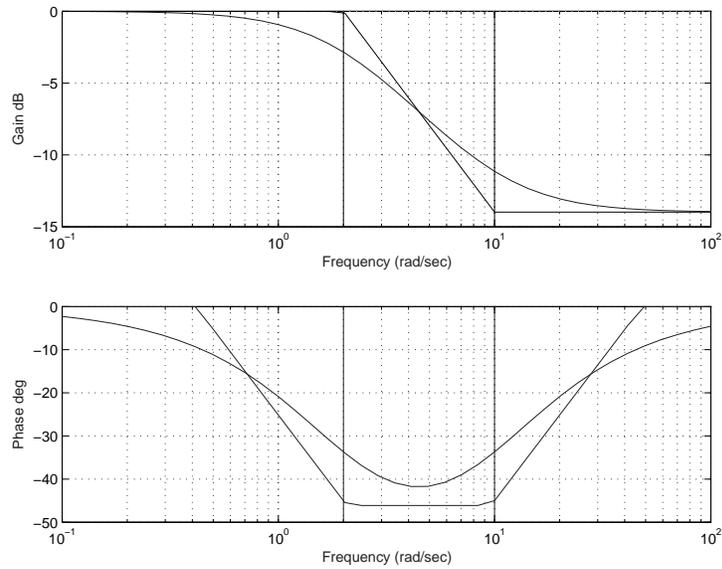


Figura 8: Diagrammi di Bode di una azione ritardatrice

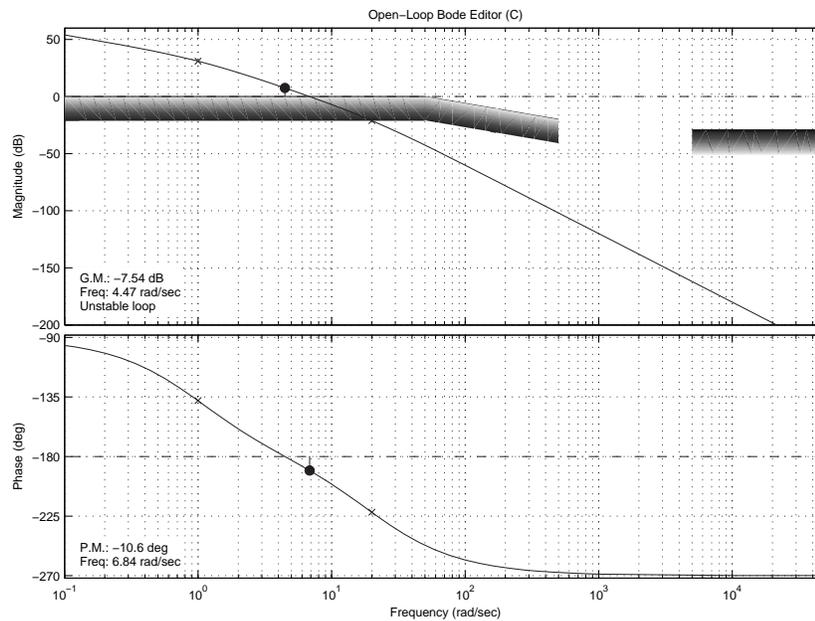


Figura 9: Diagrammi di Bode della f.d.t. $\frac{K}{s}G(s)$

$C(j\omega)G(j\omega)$ per pulsazioni vicine a 5000 rad/s. Se si inseriscono due poli

4 PROGETTO DEL CONTROLLORE PER SODDISFARE LE SPECIFICHE22

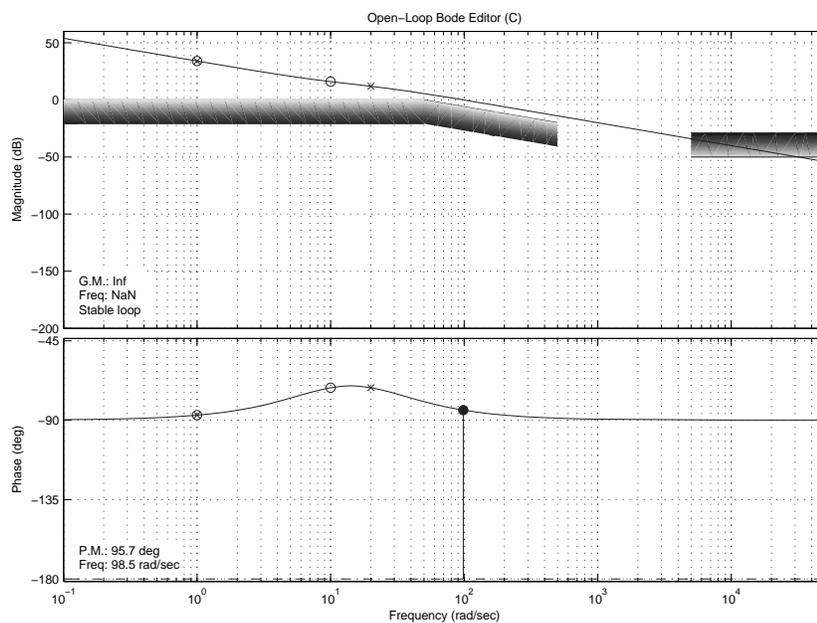


Figura 10: Diagrammi di Bode della f.d.t. $\frac{K(0.1s+1)(s+1)}{s}G(s)$

in -1000 , l'ultima specifica viene soddisfatta ed il margine di fase, seppur diminuito, si mantiene comunque molto prossimo a 90° (fig. 11). Si noti inoltre che il controllore $C(s)$ progettato è strettamente proprio.

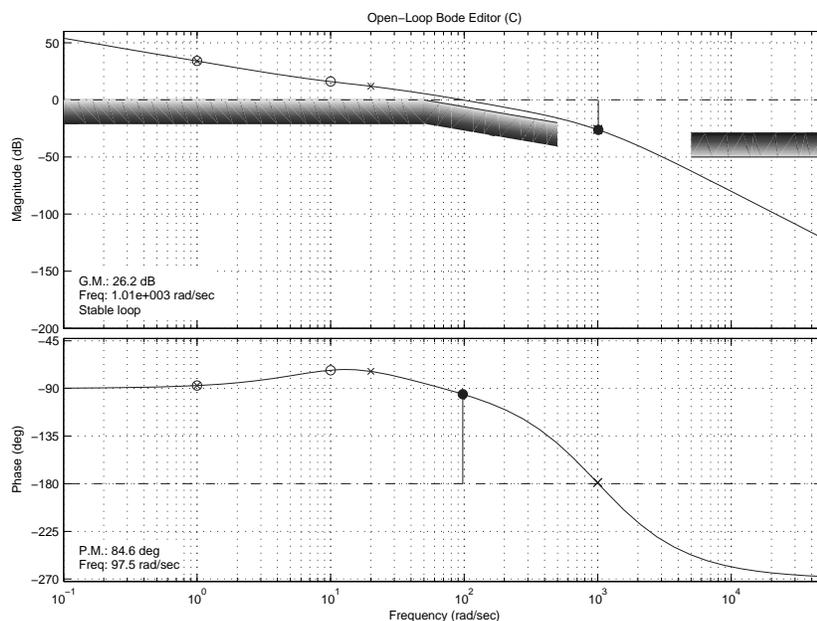


Figura 11: Diagrammi di Bode della f.d.t. $K \frac{(0.1s+1)(s+1)}{s(0.001s+1)^2} G(s)$

4.4.2 Esempio di utilizzo di azioni ritardatrici

Si consideri la f.d.t. $G(s) = \frac{5000}{(s+10)(s+5)(s+1)}$; ci proponiamo di progettare un controllore $C(s) \equiv C_0(s)$ in modo da soddisfare le seguenti specifiche:

- pulsazione di taglio $\omega_T \geq 0.5$ rad/s;
- margine di fase $M_f \geq 60^\circ$;
- $|C(j\omega)G(j\omega)| < -20$ db per $\omega > 10$ rad/s.

Il diagramma di Bode della f.d.t. $G(s)$ è riportato in fig.12.

In questo caso è necessario che il diagramma delle ampiezze inizi a decrescere in maniera sensibile per pulsazioni inferiori a quelle mostrate in fig. 12. Per fare questo, è possibile inserire nel controllore $C(s)$ un polo in basa frequenza, ad esempio in -0.01 (fig. 13).

Come si vede in fig. 13, il margine di fase è di 39.6° ed è quindi ancora troppo basso. Per aumentare il margine di fase è possibile inserire nel controllore $C(s)$ uno zero per pulsazioni vicine a quella in cui avviene l'attraversamento dell'asse a 0 db. Inserendo quindi nel controllore uno zero in -1 si ottiene un margine di fase di 74° e vengono soddisfatte tutte le specifiche richieste (fig. 14).

4 PROGETTO DEL CONTROLLORE PER SODDISFARE LE SPECIFICHE24

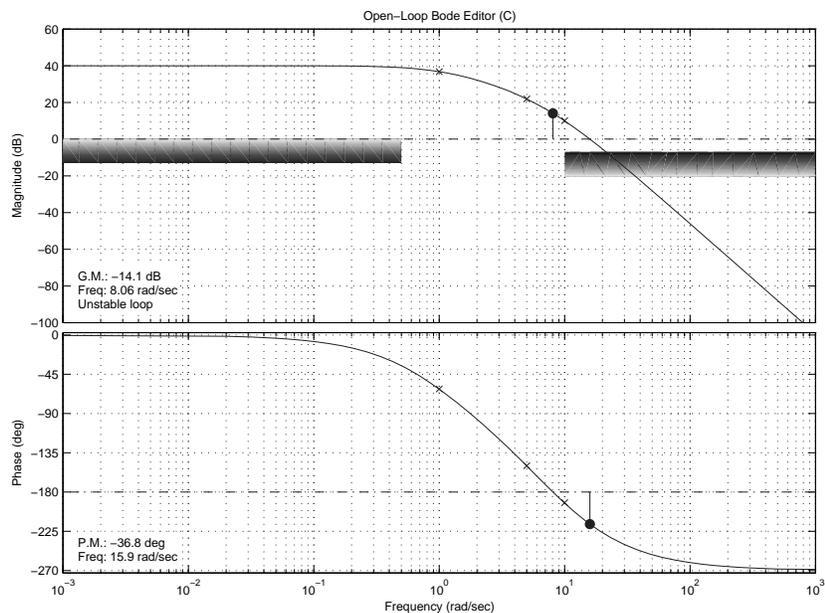


Figura 12: Diagrammi di Bode della f.d.t. $G(s) = \frac{5000}{(s+10)(s+5)(s+1)}$

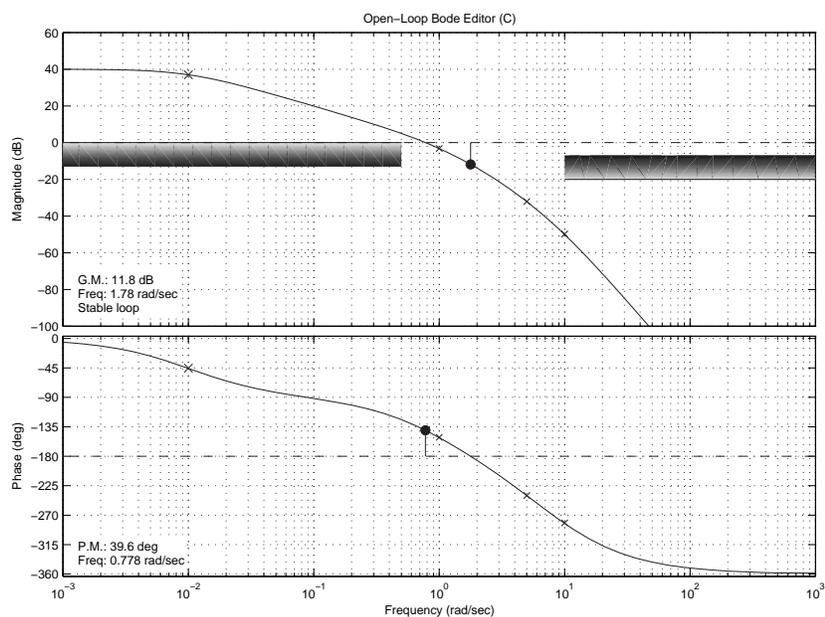


Figura 13: Diagrammi di Bode della f.d.t. $C(s)G(s)$, con $C(s) = \frac{1}{(100s+1)}$

4 PROGETTO DEL CONTROLLORE PER SODDISFARE LE SPECIFICHE25

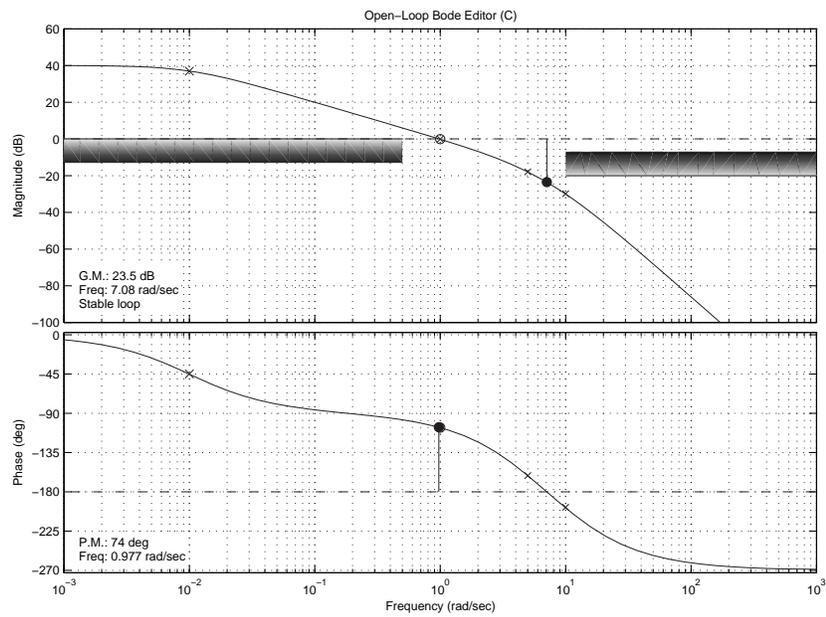


Figura 14: Diagrammi di Bode della f.d.t. $C(s)G(s)$, con $C(s) = \frac{(s+1)}{(100s+1)}$