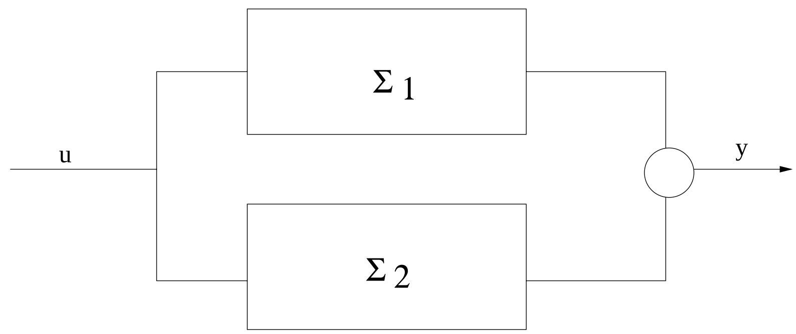
Connessione di Sistemi

- Parallelo:



$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 u \\ y_1 = C_1 x_1 \end{cases}, \begin{cases} \dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2 u \\ y_2 = C_2 x_2 \end{cases} \tag{1}$$

Definiamo delle nuove variabili di stato $\bar{x} = (x_1 \; x_2)$. Il sistema complessivo é dato dalla rappresentazione in forma di stato:

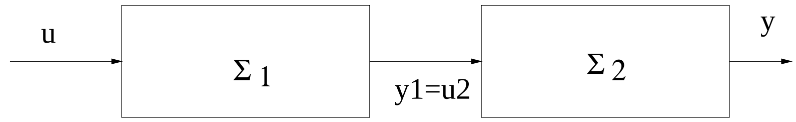
$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \bar{x} + \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} u \\ y &= \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \end{pmatrix} \bar{x} \end{aligned} \tag{2}$$

La funzione di trasferimento del sistema Σ é data da:

$$Y(s) = Y_1(s) + Y_2(s) = G_1(s)U(s) + G_2(s)U(s)$$

quindi $G(s) = G_1(s) + G_2(s)$ é la somma delle funzioni di trasferimento dei sistemi connessi in parallelo.

- Serie:



$$\left\{\begin{array}{l}\dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 u\\ y_1 = C_1 x_1\end{array}\right. , \left\{\begin{array}{l}\dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2 y_1\\ y_2 = C_2 x_2\end{array}\right. \tag{3}$$

Definiamo delle nuove variabili di stato $\bar{x} = (x_1 \; x_2)$. Il sistema complessivo é dato dalla rappresentazione in forma di stato:

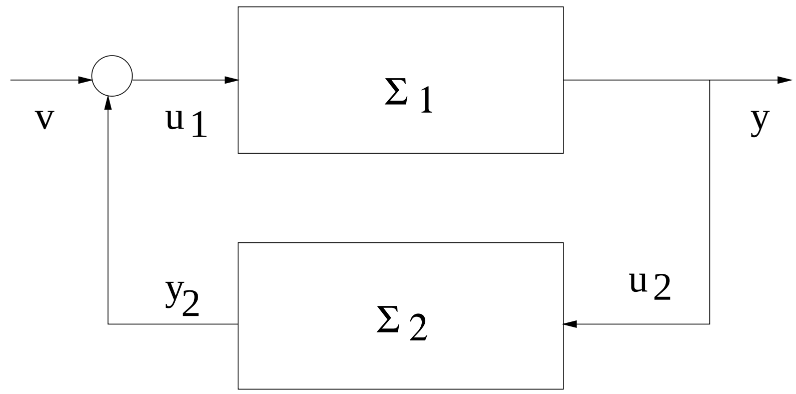
$$\begin{array}{l}\dot{\bar{x}} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ B_2 C_1 & A_2 \end{pmatrix} \bar{x} + \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix} u\\ y = \begin{pmatrix} 0 & C_2 \end{pmatrix} \bar{x}\end{array} \tag{4}$$

La funzione di trasferimento del sistema Σ é data da:

$$Y(s) = Y_2(s) = G_2(s)U_2(s) = G_2(s)Y_1(s) = G_2(s)G_1(s)U(s)$$

quindi $G(s) = G_1(s)G_2(s)$ é il prodotto delle funzioni di trasferimento dei sistemi connessi in serie.

- Retroazione:



$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 u \pm B_1 y_2 \\ y_1 = C_1 x_1 = y \end{array} \right. , \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2 y_1 \\ y_2 = C_2 x_2 \end{array} \right. \tag{5}$$

Definiamo delle nuove variabili di stato $\bar{x} = (x_1 \; x_2)$. Il sistema complessivo é dato dalla rappresentazione in forma di stato:

$$\begin{array}{l} \dot{\bar{x}} = \begin{pmatrix} A_1 & \pm B_1 C_2 \\ B_2 C_1 & A_2 \end{pmatrix} \bar{x} + \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix} u \\ y = \begin{pmatrix} C_1 & 0 \end{pmatrix} \bar{x} \end{array} \tag{6}$$

La funzione di trasferimento del sistema Σ é data da:

$$\begin{aligned} Y(s) &= Y_1(s) = G_1(s)(U(s) \pm Y_2(s)) \\ &= G_1(s)U(s) \pm G_1(s)G_2(s)Y_1(s) \end{aligned} \tag{7}$$

da cui $G(s) = \frac{G_1(s)}{1 \mp G_1(s)G_2(s)}$.

Raggiungibilitá e Osservabilitá di sistemi connessi

- Parallelo:

Proposition 1 *Il sistema* Σ *è raggiungibile (osservabile) se e soltanto se* Σ_1 *e* Σ_2 *sono raggiungibili (osservabili) e* A_1 *e* A_2 *non hanno autovalori comuni.*

Se Σ è raggiungibile allora per il lemma PBH la matrice

$$(sI - A|B) = \begin{pmatrix} sI_1 - A_1 & 0 & |B_1 \\ 0 & sI_2 - A_2 & |B_2 \end{pmatrix} \quad (8)$$

ha rango massimo per ogni valore di s. In particolare hanno rango massimo le matrici $(sI_1 - A_1|B_1)$, $(sI_2 - A_2|B_2)$ quindi Σ_1 e Σ_2 sono raggiungibili.

Se esistesse un s autovalore sia di A_1 che di A_2 la matrice

$$\begin{pmatrix} sI_1 - A_1 & 0 \\ 0 & sI_2 - A_2 \end{pmatrix} \quad (9)$$

avrebbe rango diminuito di due e con una colonna $\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}$ non si riuscirebbe ad ottenere per P rango massimo quindi si violerebbe un'ipotesi e si arriverebbe ad un assurdo.

Viceversa se $(sI_1 - A_1|B_1)$, $(sI_2 - A_2|B_2)$ hanno rango massimo e A_1, A_2 non hanno autovalori in comune la matrice P ha rango massimo e quindi Σ è raggiungibile.

L'osservabilitá si dimostra passando al problema duale.

- Serie:

$$G(s) = G_1(s)G_2(s) = \frac{N_1 N_2}{D_1 D_2}$$

Proposition 2 *Il sistema Σ è raggiungibile se e soltanto se Σ_1 e Σ_2 sono raggiungibili e i polinomi $C_1(adj(sI - A_1)B_1$ e $det(sI - A_2)$ non hanno zeri in comune. Il sistema Σ è osservabile se e soltanto se Σ_1 e Σ_2 sono osservabili e i polinomi $C_2(adj(sI - A_2)B_2$ e $det(sI - A_1)$ non hanno zeri in comune.*

Il sistema Σ quindi é in forma minima se lo sono anche i due sistemi Σ_1 e Σ_2 e non si hanno cancellazioni tra poli e zeri nella $G(s)$.

- Retroazione:

$$G(s) = \frac{G_1(s)}{1 \mp G_1(s)G_2(s)}$$

Proposition 3 *Il sistema Σ è osservabile (raggiungibile) se e soltanto se Σ_1 e Σ_2 sono osservabili (raggiungibili) e $C_1(adj(sI - A_1)B_1$ e $\det(sI - A_2)$ sono primi fra loro.*