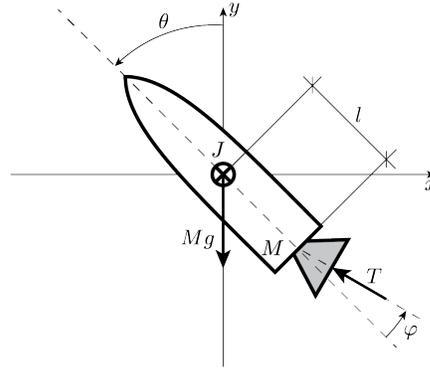


In Figura sono riportati l'immagine del lanciatore a razzo *Falcon 9* della nota azienda aerospaziale *SpaceX* ed il suo modello semplificato nel piano di pitch (beccheggio). Il *Falcon 9*, come gli altri sistemi di propulsione della *SpaceX*, è stato progettato in modo tale che sia possibile controllarne l'atterraggio e, quindi, riutilizzarlo. Il sistema ha massa  $M$  e momento di inerzia  $J$  (rispetto all'asse di pitch) ed è soggetto alla forza  $T$ , fornita dal propulsore di bordo, la cui inclinazione rispetto all'asse longitudinale del razzo può essere regolata attraverso l'angolo  $\varphi$ . Infine, con  $\theta$  viene indicata l'inclinazione del razzo rispetto all'asse  $y$  e con  $b_x$  e  $b_y$  le componenti di attrito dinamico nelle direzioni  $x$  e  $y$ , rispettivamente.



Le equazioni semplificate che governano la dinamica del sistema di Figura sono di seguito riportate:

$$\begin{aligned} M\ddot{x} &= -T\sin(\theta - \varphi) - b_x\dot{x} \\ M\ddot{y} &= T\cos(\theta - \varphi) - Mg - b_y\dot{y} \\ J\ddot{\theta} &= Tlsin(\varphi) \end{aligned}$$

dove  $l$  è la distanza tra il centro di massa e il centro di rotazione del propulsore. La propulsione  $T$  è funzione della velocità lungo  $y$ , secondo la legge  $T = T_0 + K_y\dot{y}$ . L'angolo di inclinazione del propulsore invece risulta funzione della velocità lungo  $x$ :  $\varphi = K_x\dot{x} + u$  dove  $u$  è la variabile di ingresso disponibile al progettista per controllare il sistema.

- A.1** Data una  $T \neq 0$ , in condizioni di equilibrio si determinino le velocità lungo gli assi  $x$  e  $y$  e il valore di  $u$  per mantenere il sistema con una inclinazione  $\bar{\theta} = \frac{\pi}{4}$ .
- A.2** Si determini una rappresentazione del sistema linearizzato in forma di stato attorno alla configurazione di equilibrio determinata al punto precedente, ipotizzando che sia disponibile una misura della variabile  $\theta$ .
- A.3** Si considerino i seguenti valori numerici per un prototipo:  $M = 5 \cdot 10^4 \text{ kg}$ ,  $J = 225 \cdot 10^3 \text{ Nm s}^2$ ,  $b_x = 5000 \text{ N s/m}$ ,  $b_y = 4790 \text{ N s/m}$ ,  $l = 15 \text{ m}$ ,  $T_0 = 354650 \text{ N}$ ,  $K_x = 0.1 \text{ rads/m}$  e  $K_y = -50 \text{ N s/m}$ . Si scrivano le matrici numeriche del sistema linearizzato in forma di stato. Si ricavi la funzione di trasferimento dall'ingresso  $u$  all'uscita  $\theta$ .

Verificare che la funzione di trasferimento abbia approssimativamente la forma

$$G_u(s) = \frac{24(s + 0.096)(s + 0.1)}{(s + 2.2)(s + 0.097)(s^2 - 2.5s + 5.5)}$$

in caso negativo, per i punti successivi, è possibile utilizzare la funzione di trasferimento qui fornita.

- A.4** Si sintetizzi un controllore stabilizzante che, agendo sull'angolo del propulsore tramite  $u$ , rispetti le seguenti specifiche:
- Partendo dalla configurazione di equilibrio sia in grado di portare il razzo esattamente nella posizione verticale senza mai superarla e assicurando che entro  $5 \text{ s}$  si trovi nell'intervallo  $[-0.0393, 0.0393]$  (radianti).
  - In presenza di un rumore di misura sulla lettura dell'angolo di beccheggio del razzo della forma  $\nu(t) = 5 \cdot 10^{-1} \sin(\omega_\nu t)$  sia in grado di attenuarne gli effetti sull'uscita. Si chiede in particolare che l'effetto sia minore del  $0.01\%$  con  $\omega_\nu \geq 50 \text{ rad/s}$ .

- Gli effetti di un disturbo della forma  $d(t) = \sin(10^{-2}t)$  che agisca sull'uscita del sistema siano minori dell'1%.

Si riportino quindi:

- le specifiche tradotte nel dominio della frequenza e visualizzate sul diagramma di Bode,
- il procedimento di progettazione del controllore illustrato con diagrammi a blocchi,
- la funzione di trasferimento del controllore progettato,
- i diagrammi di Bode del sistema nelle diverse fasi del progetto (mostrando il raggiungimento delle specifiche),
- la risposta al gradino del sistema controllato riportando le caratteristiche più significative,

*Nota: Si riportino tutti i risultati numerici con almeno 3 cifre significative*

## Soluzione

**A.1** Soluzione Si considerino  $v_x$  e  $v_y$  le velocità lungo gli assi che sono costanti all'equilibrio. Dalla terza equazione dinamica, all'equilibrio si ottengono due condizioni  $T = 0$  (condizione esclusa per ipotesi) oppure  $\varphi = 0$ . Sostituendo la  $T$  nelle due equazioni e ricavando le velocità si ottiene:

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{T_0 b_y - K_y M g}{(K_y \cos \theta - b_y) b_x} \sin \bar{\theta} \\ v_y &= \frac{M g - T_0 \cos \bar{\theta}}{K_y \cos \bar{\theta} - b_y} \end{aligned} \quad (1)$$

Si ottiene infine che l'ingresso di equilibrio risulta  $\bar{u} = -K_x v_x$ .

Sostituendo i valori numerici si trova:  $v_x = -50.5064$  m/s,  $v_y = -49.6802$  m/s,  $u = 5.05$  rad.

**A.2** Si noti che le equazioni dinamiche non dipendono dalle posizioni verticali e orizzontali del razzo. E' infatti possibile considerare le variabili di stato  $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (\theta, \dot{x}, \dot{y}, \dot{\theta})$ .

Considerando che all'equilibrio  $\varphi = 0$  e  $\bar{T} = (T_0 + K_y v_y)$ , e che  $\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{y}} = 0$ ,  $\frac{\partial \varphi}{\partial \dot{x}} = K_x$ ,  $\frac{\partial \varphi}{\partial u} = 1$ ,  $\frac{\partial T}{\partial \theta} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial T}{\partial u} = 0$  e  $\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = K_y$ , il linearizzato intorno all'equilibrio è caratterizzato dalle seguenti matrici:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{\bar{T}}{M} \cos \bar{\theta} & \frac{K_x \bar{T}}{M} \cos(\bar{\theta}) - \frac{b_x}{M} & -\frac{K_y}{M} \sin(\bar{\theta}) & 0 \\ -\frac{\bar{T}}{M} \sin \bar{\theta} & \frac{K_x \bar{T}}{M} \sin(\bar{\theta}) & \frac{K_y}{M} \cos(\bar{\theta}) - \frac{b_y}{M} & 0 \\ 0 & \frac{K_x \bar{T} l}{J} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\bar{T}}{M} \cos(\bar{\theta}) \\ \frac{\bar{T}}{M} \sin(\bar{\theta}) \\ \frac{\bar{T} l}{J} \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

**A.3** Sostituendo i valori numerici forniti, si ottengono le seguenti matrici numeriche del sistema linearizzato:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -5.0506 & 0.4051 & 0.0007 & 0 \\ -5.0506 & 0.5051 & -0.0965 & 0 \\ 0 & 2.3809 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 5.0506 \\ 5.0506 \\ 23.8089 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0].$$

La funzione di trasferimento tra l'ingresso di controllo  $u$  e l'uscita  $\theta$  è

$$G(s) = \frac{23.809(s + 0.1)(s + 0.09651)}{(s + 2.163)(s + 0.09721)(s^2 - 2.569s + 5.558)}$$

Il sistema risulta instabile a causa della presenza di due poli complessi coniugati a parte reale positiva. Si deve quindi procedere alla progettazione di un controllore in cascata. Il primo controllore stabilizzerà il sistema mentre il secondo soddisferà le specifiche richieste.

**A.4** Il luogo delle radici del sistema è riportato in figura 1. Per richiamare i rami che partono dai poli instabili è possibile agire inserendo nel controllore una coppia di zeri in  $-2 \pm j2$  e poi rendere il controllore causale inserendo una coppia di poli in  $-8 \pm j$ . Il controllore stabilizzante risulta quindi  $C_1(s) = 100 \frac{0.1225s^2 + 0.5s + 1}{0.0144s^2 + 0.25s + 1}$ . Il luogo delle radici così ottenuto è riportato in figura 2. La funzione di trasferimento tra ingresso e uscita in anello chiuso risulta

$$G_c(s) = \frac{19345(s + 0.09651)(s + 0.1)(s^2 + 4s + 8)}{(s + 0.1047)(s + 0.09695)(s^2 + 3.988s + 7.989)(s^2 + 11.5s + 1.935e04)}.$$

La prima specifica richiede al controllore di avere un errore al gradino nullo. L'ampiezza del gradino richiesto è pari a  $-\frac{\pi}{4}$ . Si chiede inoltre di non superare mai la verticale e questo corrisponde a richiedere una sovraelongazione nulla. L'andamento dell'angolo  $\theta$  inoltre non deve uscire da una banda del 5% dal valore di regime e pertanto si richiede un tempo di assestamento (al 5%) di al più 5 s.

La specifica sull'errore al gradino è verificata una volta inserito un polo nell'origine del controllore. La specifica sulla sovraelongazione implica una approssimazione dell'anello chiuso con un sistema al primo ordine (quindi un margine di fase di  $90^\circ$ ). La specifica sul tempo di assestamento implica una pulsazione di taglio almeno pari a  $\frac{3}{T_a} = 0.6$  rad/s.

La seconda specifica riguarda invece l'attenuazione degli effetti del rumore di misura. Si richiede in particolare di attenuarli di almeno lo 0.01% e quindi  $\left\| \frac{C_2(j\omega)G_c(j\omega)}{1+C_2(j\omega)G_c(j\omega)} \right\| = \frac{\bar{Y}}{\nu} \leq 10^{-4}$ , per pulsazioni superiori

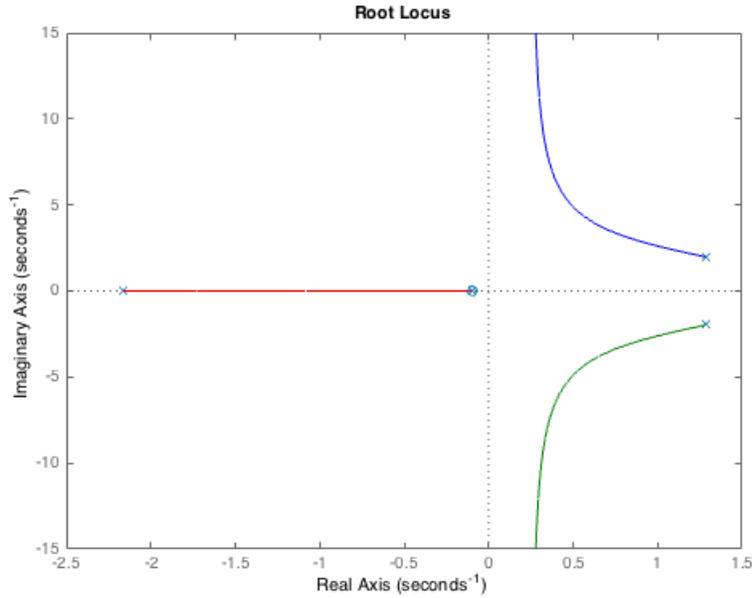


Figura 1: Luogo delle radici di  $G(s)$

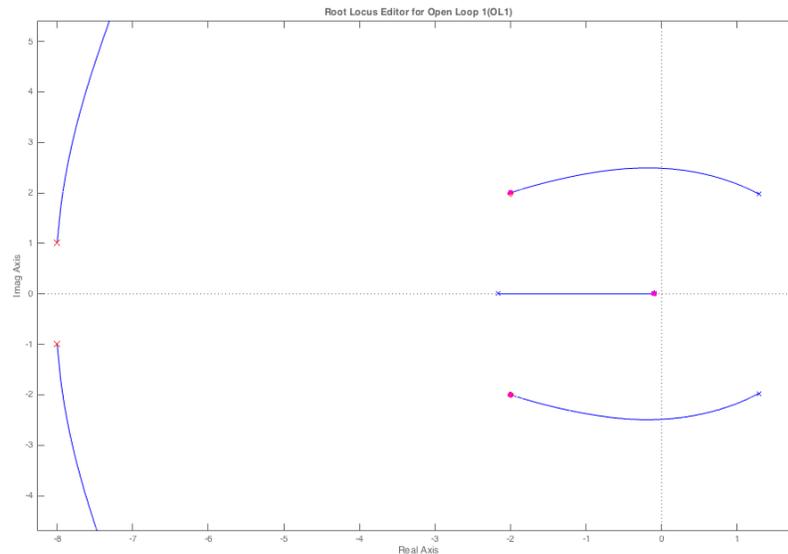


Figura 2: Luogo delle radici di  $C_1(s)G(s)$

a 50rad/s. In questo range di frequenze è valida l'approssimazione  $\left\| \frac{C_2(j\omega)G_c(j\omega)}{1+C_2(j\omega)G_c(j\omega)} \right\| \approx \|C_2(j\omega)G_c(j\omega)\|$  e pertanto si chiede che  $\|C_2(j\omega)G_c(j\omega)\|_{db} < -80db$ , per pulsazioni superiori a 50rad/s.

La terza specifica riguarda invece l'attenuazione degli effetti del disturbo sulle uscite. Dopo la chiusura del primo anello di controllo la funzione di trasferimento tra disturbo e uscita risulta  $G_d(s) = \frac{1}{1+C_1(s)G(s)} = \frac{(s+2.163)(s+0.09721)(s^2+16s+65)(s^2-2.569s+5.558)}{(s+0.1047)(s+0.09695)(s^2+3.988s+7.989)(s^2+11.5s+1.935e04)}$ . Il diagramma di bode della  $G_d(s)$  è riportato in figura 3.

Si chiede al secondo controllore di attenuare un disturbo sinusoidale ad ampiezza unitaria. Per pulsazioni inferiori a  $10^{-2}$ rad/s si vuole che  $\left\| \frac{G_d(j\omega)}{1+C_2(j\omega)G_c(j\omega)} \right\| \leq 0.01$ . La  $G_d(s)$  per pulsazioni inferiori a  $10^{-2}$ rad/s risulta più piccolo di  $-20db = 0.1$  e pertanto il controllore deve verificare  $\|C_2(j\omega)G_c(j\omega)\| \geq \frac{0.1}{0.01} = 20db$ .

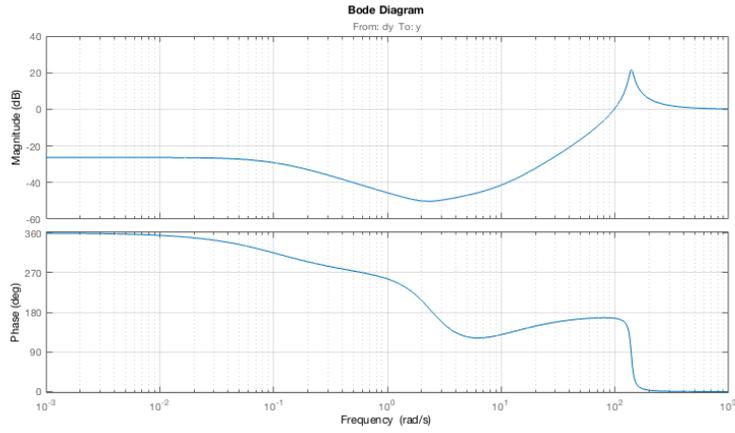


Figura 3: Diagramma di Bode di  $G_d(s)$

Le specifiche sul diagramma di Bode della  $G_c(s)$  sono visibili in figura 4.

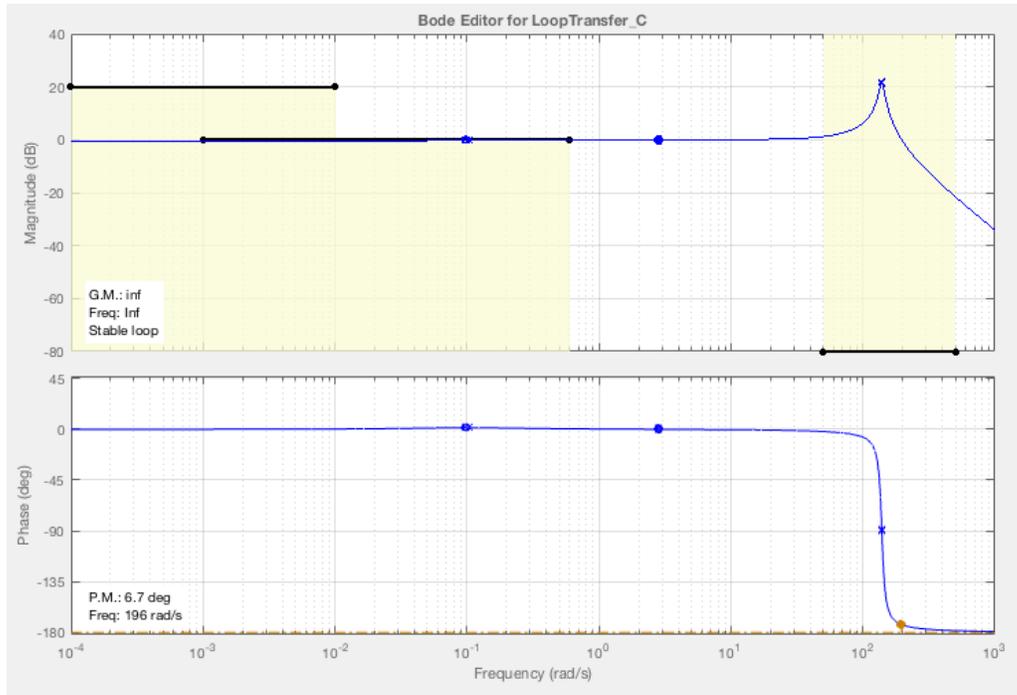


Figura 4: Diagramma di Bode di  $G_c(s)$  con le specifiche riportate

Una volta inserito nel controllore un polo nell'origine si ottiene il diagramma di Bode riportato in figura 5. Inserendo due poli dopo il taglio si ha che anche la specifica sull'attenuazione del disturbo viene verificata. Ad esempio considerando un controllore della forma  $C_2(s) = \frac{0.72}{s(1+0.3s)(1+0.21s)}$  si ottiene il diagramma di Bode riportato in figura 6 dove si vede che le specifiche sono soddisfatte.

La risposta al gradino del sistema in anello chiuso è riportata in figura 7, si nota che la sovranelongazione è nulla e il tempo di assestamento al 5% è pari a meno di 2.5s.

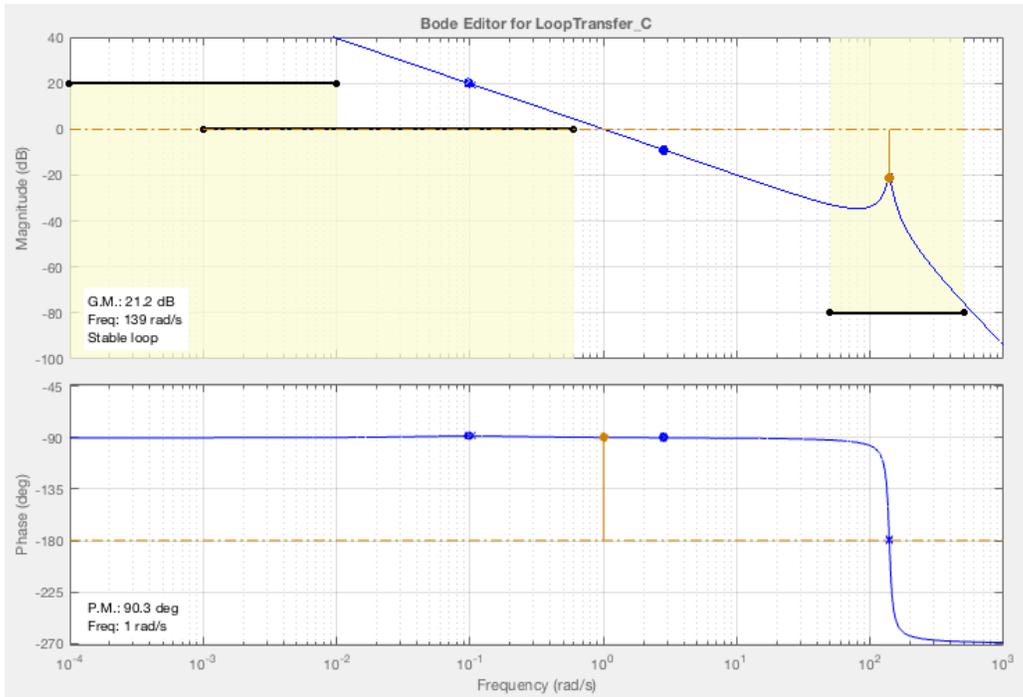


Figura 5: Diagramma di Bode di  $\frac{1}{s}G_c(s)$  con le specifiche riportate

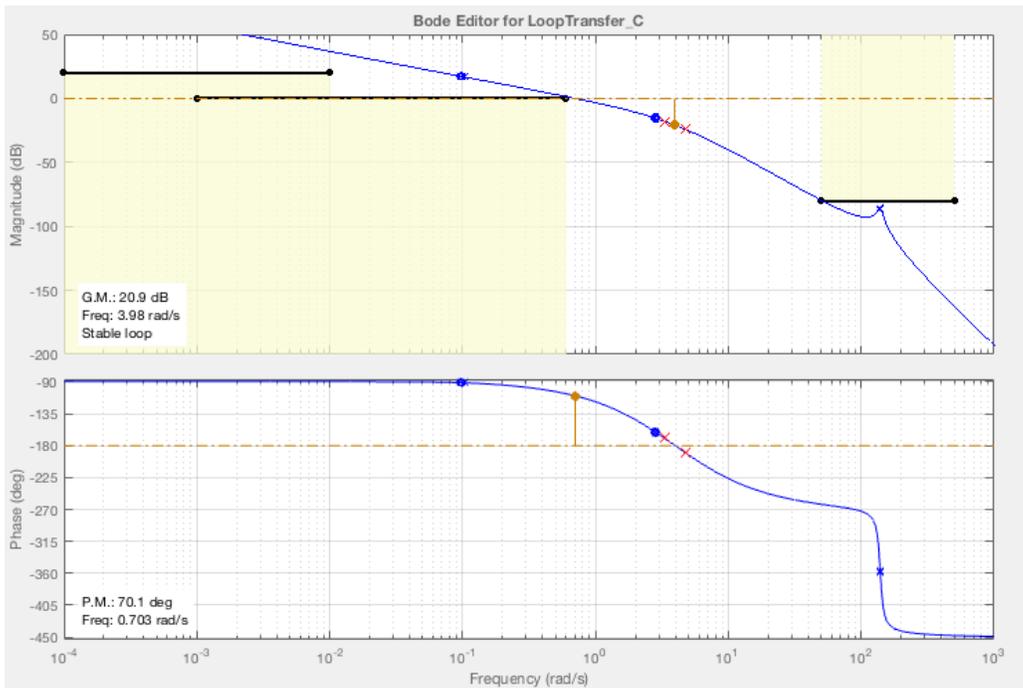


Figura 6: Diagramma di Bode di  $C_2(s)G_c(s)$  con le specifiche verificate

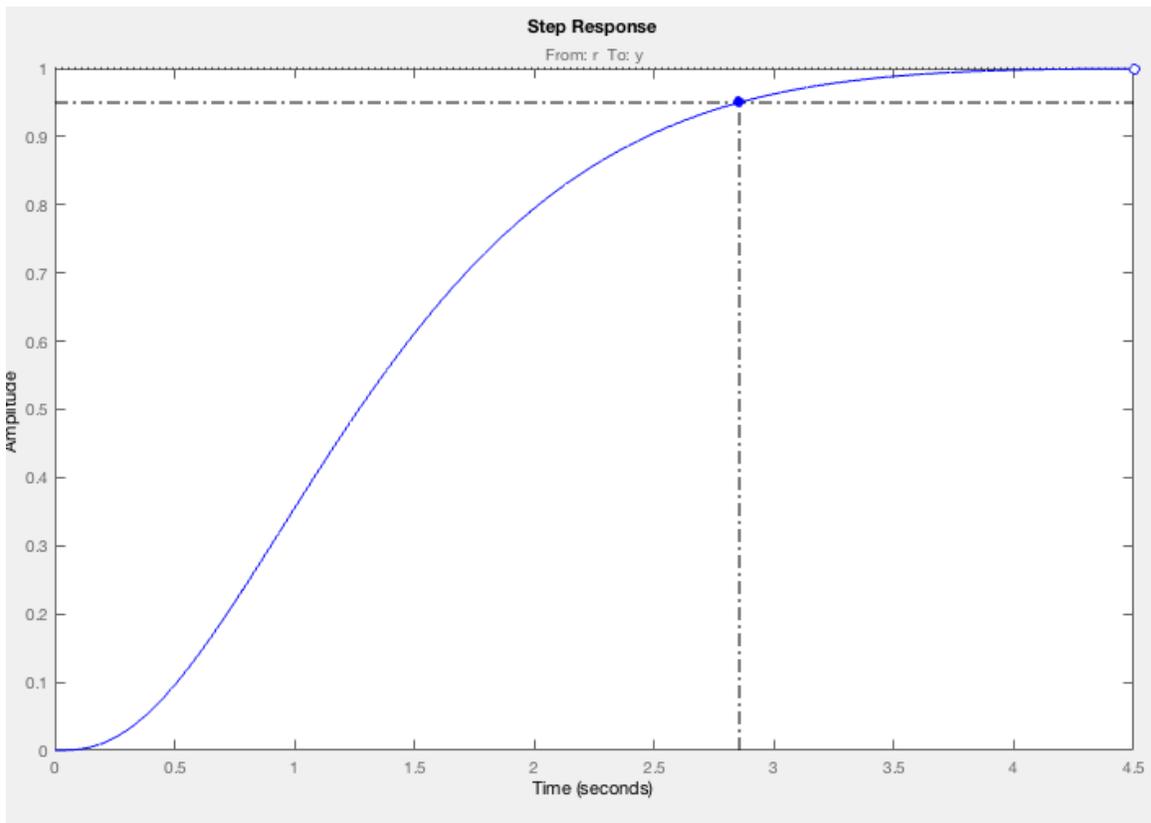


Figura 7: Risposta al gradino del sistema in anello chiuso