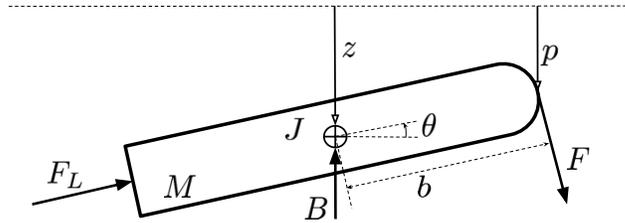


**Esercizio 1**

In Figura sono riportati un sottomarino telecomandato da remoto (ROV) ed il suo modello nel piano di pitch (beccheggio). Il sistema ha massa  $M$  e momento di inerzia  $J$  (rispetto all'asse di pitch) ed è soggetto a tre forze:  $F$ ,  $F_L$ , fornite dai motori di bordo, e la spinta di galleggiamento  $B$ . Infine si indica con  $z$  la posizione del centro di massa del ROV, con  $p$  la posizione della prua del ROV e con  $\theta$  l'angolo di pitch. Le convenzioni di segno adottate sono visibili in figura.



Le equazioni semplificate che governano la dinamica del sistema di Figura sono di seguito riportate:

$$\begin{aligned} M\ddot{z} &= F \cos(\theta) - K_z \cos(\theta)\dot{z} - F_L \sin(\theta) - B \\ J\ddot{\theta} &= -K_r \dot{\theta} - K_\theta \sin(\theta) - Fb \end{aligned}$$

dove  $K_z$ ,  $K_r$  e  $K_\theta$  rappresentano parametri del sistema legati a velocità e orientazione del ROV,  $B$  la forza di galleggiamento assunta costante,  $b$  la distanza tra il centro di massa e la punta del ROV.

Assumendo di avere a disposizione la misura  $p = z - b \sin(\theta)$  della distanza della punta del ROV dalla superficie dell'acqua, si risponda alle seguenti richieste:

- A.1** In condizioni di equilibrio si determini il valore delle forze  $F$  e  $F_L$  e della profondità  $z$  per mantenere il sistema con una inclinazione  $\bar{\theta} = \frac{\pi}{6}$ , in funzione della spinta di galleggiamento  $B$ .
- A.2** Si determini una rappresentazione del sistema linearizzato in forma di stato attorno alla configurazione di equilibrio determinata al punto precedente.
- A.3** Si considerino i seguenti valori numerici:  $M = 580 \text{ kg}$ ,  $J = 560 \text{ Nms}^2$ ,  $B = 20 \text{ N}$ ,  $b = 1.2 \text{ m}$ ,  $K_z = 133 \text{ Ns/m}$ ,  $K_r = 168 \text{ Nms}$ ,  $K_\theta = 143 \text{ Nm}$ . Si scrivano le matrici numeriche del sistema linearizzato in forma di stato. Si ricavino le funzioni di trasferimento dagli ingressi  $F$  e  $F_L$  all'uscita  $y$ . Si discuta circa la stabilità del sistema (in particolare, dall'ingresso  $F$  all'uscita  $y$ ), dandone una interpretazione fisica.

Verificare che le funzioni di trasferimento abbiano approssimativamente la forma

$$G_u(s) = \frac{0.004(s - 0.16)(s + 0.4)}{s(s + 0.2)(s^2 + 0.3s + 0.2)}, \quad G_d(s) = \frac{-0.0008}{s(s + 0.2)}$$

in caso negativo, per i punti successivi, è possibile utilizzare la funzione di trasferimento qui fornita.

- A.4** Si sintetizzi un controllore stabilizzante che, agendo sulla forza  $F$ , rispetti le seguenti specifiche:
  - Considerando una quota  $z = 5 \text{ m}$  del centro di massa del ROV nelle condizioni iniziali, sia in grado di portare la quota  $p$  della punta del ROV esattamente al valore di  $4.5 \text{ m}$  senza mai superarlo di più di  $0.5 \text{ cm}$  e assicurando che entro  $100 \text{ s}$  la quota della punta del ROV sia tra i valori  $[4.495, 4.505]$ .
  - In presenza di un rumore di misura del sensore di profondità del tipo  $\nu(t) = 100 \sin(10t)$ , si richiede che gli effetti del rumore sul valore della quota  $p$  siano inferiori a  $0.01 \text{ m}$ .

Si riportino quindi:

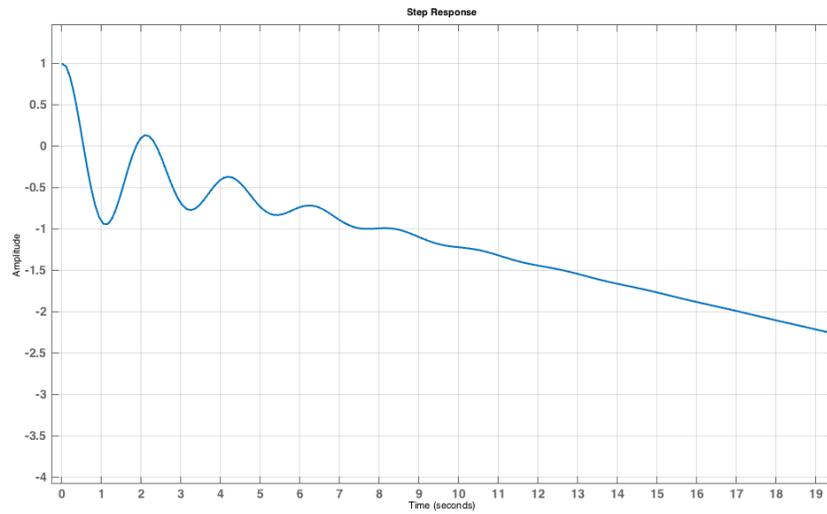
- le specifiche tradotte nel dominio della frequenza e visualizzate sul diagramma di Bode,
- il procedimento di progettazione del controllore illustrato con diagrammi a blocchi,
- la funzione di trasferimento del controllore progettato,
- i diagrammi di Bode del sistema nelle diverse fasi del progetto (mostrando il raggiungimento delle specifiche),
- la risposta al gradino del sistema controllato riportando le caratteristiche più significative,

- tramite Simulink verificare il rispetto della specifica sul rumore.

*Nota: Si riportino tutti i risultati numerici con almeno 3 cifre significative*

## Esercizio 2

Data la risposta al gradino riportata in figura, si determini la più semplice funzione di trasferimento compatibile, illustrando il procedimento seguito.



## Soluzione

### Esercizio 1

**A.1** Imponendo  $\ddot{z} = \ddot{\theta} = \dot{z} = \dot{\theta} = 0$ , il sistema all'equilibrio assume l'espressione

$$\begin{aligned} \frac{F}{M} \cos \theta - \frac{F_L}{M} \sin \theta - \frac{B}{M} &= 0 \\ -\frac{K_\theta}{J} \sin \theta - \frac{b}{J} F &= 0 \end{aligned}$$

che, per  $\theta = \pi/6$ , ha come unica soluzione  $F = -\frac{K_\theta}{2b}$  e  $F_L = -\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{K_\theta}{b} - 2B$ . La quota  $z$  di equilibrio è arbitraria.

**A.2** Indicando con:  $x = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^\top = [z \ \theta \ \dot{z} \ \dot{\theta}]^\top$  il vettore delle variabili di stato,  $u = [F \ F_L]^\top$  il vettore degli ingressi di controllo,  $y = p$  l'uscita del sistema; il sistema non lineare assume la seguente forma di stato:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_3 \\ \dot{x}_2 &= x_4 \\ \dot{x}_3 &= \frac{u_1}{M} \cos x_2 - \frac{K_z}{M} \cos x_2 x_3 - \frac{u_2}{M} \sin x_2 \\ \dot{x}_4 &= -\frac{K_r}{J} x_4 - \frac{K_\theta}{J} \sin x_2 - \frac{b}{J} u_1 \end{aligned}$$

Linearizzando queste equazioni attorno alla condizione di equilibrio individuata in precedenza al punto **A.1** si ottiene

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_u u \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{M} (\bar{u}_1 \sin \bar{x}_2 + \bar{u}_2 \cos \bar{x}_2 - K_z \sin(\bar{x}_2) \bar{x}_3) & -\frac{K_z}{M} \cos \bar{x}_2 & 0 \\ 0 & -\frac{K_\theta}{J} \cos \bar{x}_2 & 0 & -\frac{K_r}{J} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{\cos \bar{x}_2}{M} & -\frac{\sin \bar{x}_2}{M} \\ -\frac{b}{J} & 0 \end{bmatrix} u \end{aligned}$$

Per quanto riguarda l'uscita del sistema, si ha

$$y = Cx = [1 \quad -b \cos \bar{x}_2 \quad 0 \quad 0] x$$

**A.3** Sostituendo i valori numerici forniti, si ottengono le seguenti matrici numeriche del sistema linearizzato

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0.2652 & -0.1986 & 0 \\ 0 & -0.2211 & 0 & -0.3000 \end{bmatrix}, \quad B_u = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0.0015 & -0.0009 \\ -0.0021 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = [1.0000 \quad -1.0392 \quad 0 \quad 0].$$

La funzione di trasferimento tra l'ingresso di controllo  $u_1 = F$  e l'uscita  $y = p$  è

$$G_1(s) = \frac{0.0037201(s - 0.1602)(s + 0.3995)}{s(s + 0.1986)(s^2 + 0.3s + 0.2211)}.$$

La funzione di trasferimento tra l'ingresso di controllo  $u_2 = F_L$  e l'uscita  $y = p$  è

$$G_2(s) = \frac{-0.00086207}{s(s + 0.1986)}$$

Gli autovalori della matrice  $A$  sono tutti a parte reale minore di zero, eccezion fatta per un autovalore nell'origine (visibile anche dall'espressione delle funzioni di trasferimento  $G_i(s)$ ,  $i = 1, 2$ ). Questo rende il sistema marginalmente stabile.

Fisicamente, questo riflette l'invarianza del sistema rispetto alla profondità di quota  $z$ . A parte questo fenomeno, piccole variazioni dell'angolo  $\theta$  sono assorbite dal sistema grazie all'equivalente massa-molla-smorzatore (stabile) dovuto ai termini dissipativo  $K_r \dot{\theta}$  e di richiamo potenziale  $K_\theta \sin \theta$ .

**A.4** La prima specifica richiede al controllore di avere un errore al gradino nullo. Si noti che per il sistema non lineare, la condizione di equilibrio e la quota iniziale pari a  $z = 5$  m corrispondono ad una quota della prua del ROV di  $p = 5 - 1.2 \cdot 0.5 = 4.4$  m. L'ampiezza del gradino considerato è quindi pari a  $4.5 - 4.4 = 0.1$  m. Si chiede inoltre di non superare mai la quota di  $4.505 = 4.5 + 0.005$  m. Tale richiesta corrisponde ad una sovralongazione massima pari a  $\frac{4.505 - 4.5}{4.5 - 4.4} = 0.005/0.1 = 5\%$ . L'andamento della quota  $p$  inoltre non deve uscire da una banda del 5% dal valore di regime e pertanto si richiede un tempo di assestamento (al 5%) di al più 100 s.

La specifica sull'errore al gradino è già verificata in quanto nel sistema è presente un polo nell'origine. La specifica sulla sovralongazione implica un coefficiente di smorzamento di almeno 0.7 e quindi un margine di fase di circa  $70^\circ$ . La specifica sul tempo di assestamento implica una pulsazione di taglio almeno pari a  $\frac{3}{\delta T_a} = 0.0429$  rad/s.

La seconda specifica riguarda invece l'attenuazione degli effetti del rumore di misura. Si richiede quindi che (nel caso peggiore di  $\nu(t) = 100$ ), considerando il solo effetto del rumore sull'uscita si abbia  $\left\| \frac{C(j\omega)G_1(j\omega)}{1+C(j\omega)G_1(j\omega)} \right\| < \frac{Y}{D} = \frac{0.01}{100} = 10^{-4}$ , per pulsazioni superiori a 10 rad/s. In questo range di frequenze è valida l'approssimazione  $\left\| \frac{C(j\omega)G_1(j\omega)}{1+C(j\omega)G_1(j\omega)} \right\| \approx \|C(j\omega)G_1(j\omega)\|$  e pertanto si chiede che  $\|C(j\omega)G_1(j\omega)\|_{db} < -80db$ .

Essendo il sistema  $G_1(s)$  stabile è possibile progettare il controllore sui diagrammi di Bode. Le specifiche sul diagramma di Bode della  $G_1(s)$  sono visibili in figura 1.

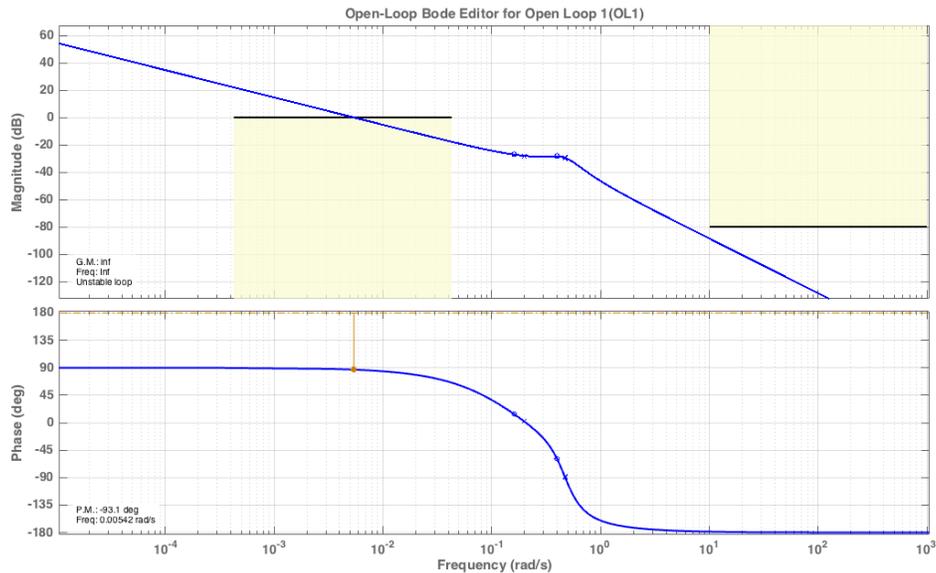


Figura 1: Diagramma di Bode con specifiche riportate

Si noti un margine di fase negativo e piuttosto elevato. Il problema può essere risolto cambiando il segno della costante di guadagno del controllore. Considerando  $C(s) = -1$ , il diagramma di Bode di  $C(s)G_1(s)$  è riportato in figura 2.

Per verificare la specifica sul tempo di assestamento si può considerare una costante di guadagno pari a  $-9$ , mentre per verificare il vincolo alle alte frequenze si inserisce un polo in  $-2$ . In figura 3 si mostra il diagramma di Bode del sistema  $C(s)G(s)$  con  $C(s) = -9 \frac{1}{1+0.5s}$ . Le specifiche richieste sono verificate.

La risposta al gradino del sistema in anello chiuso è riportata in figura 4, si nota che la sovralongazione è del 2.52% e il tempo di assestamento al 5% è pari a 32.9s. Si noti che le specifiche nel tempo sono verificate nonostante non sia verificata la specifica sul margine di fase che risulta pari a  $60^\circ$ . Questo è dovuto al fatto che l'approssimazione ad uno o più poli dominanti non è buona in quanto ci sono poli e zeri del sistema vicini alla pulsazione di taglio.

Per verificare la specifica sulla reiezione del rumore di misura si utilizza uno schema simulink simile a quello riportato in figura ?? con un riferimento nullo e un rumore come riportato nel testo. L'uscita del sistema è l'effetto del rumore che a regime si vuole mantenere sotto l'1%, l'andamento è riportato in figura 6.

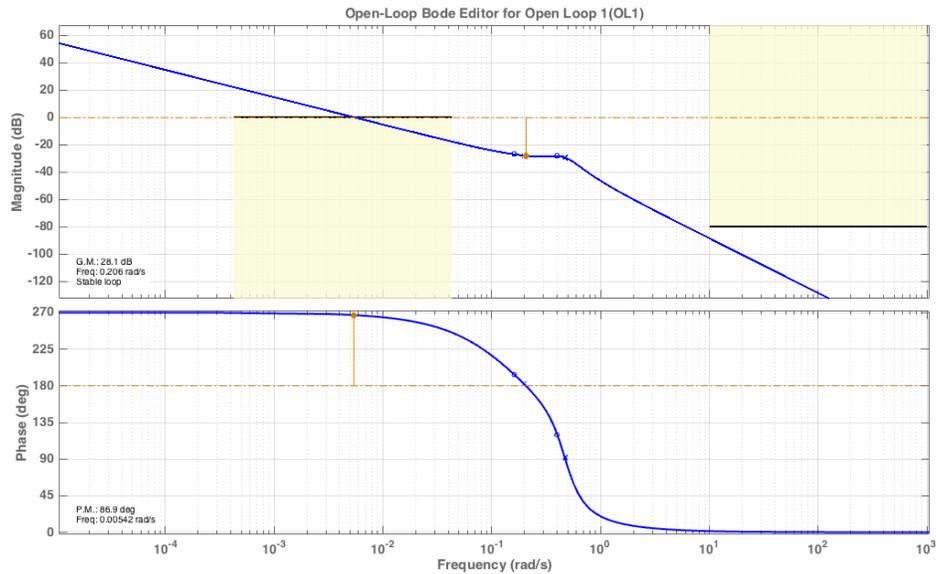


Figura 2: Diagramma di Bode di  $C(s)G_1(s)$

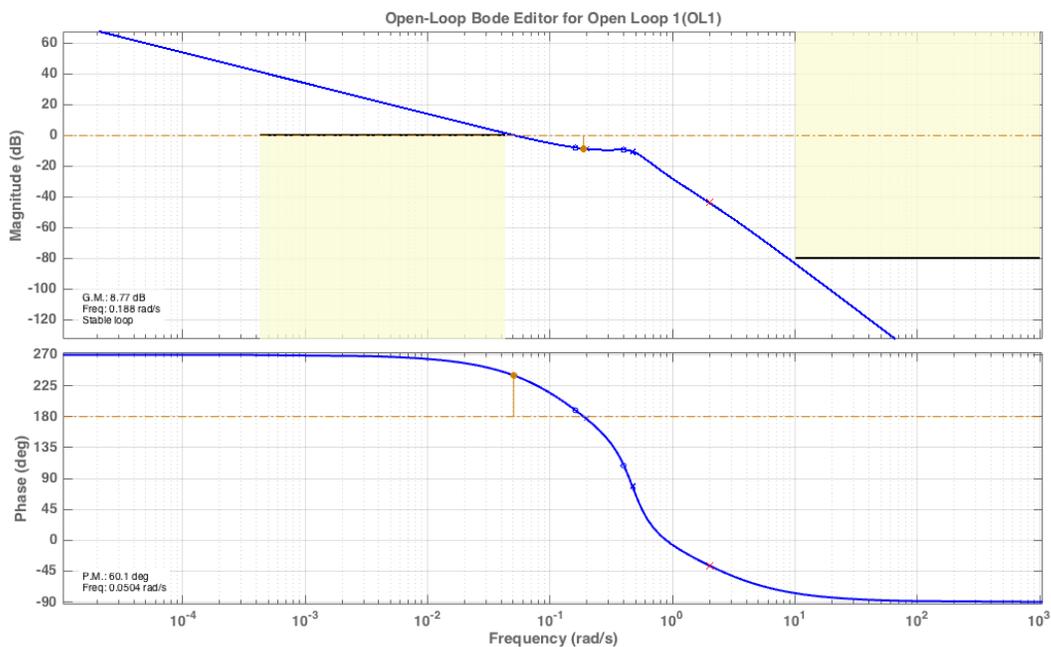


Figura 3: Diagrammi di Bode del sistema con  $C(s) = -9 \frac{1}{1+0.5s}$

### Esercizio 2

La risposta al gradino parte da un valore non nullo e pertanto la differenza poli–zeri della fdt associata è nulla. Inoltre il valore iniziale 1 indica che i coefficienti di grado massimo del numeratore e del denominatore coincidono. L'andamento polinomialmente divergente (lineare) è dovuto ad un modo interno associato ad un polo nell'origine. La pendenza di tale andamento è valutabile pari a circa  $-0.1$ , per il teorema del valore finale applicato alla derivata si ottiene che la funzione  $sG(s)$  ha costante di guadagno statico pari a circa  $-0.1$ .

L'andamento oscillatorio (stabile) nella fase del transitorio è dovuto alla presenza di una coppia di poli complessi coniugati. Il periodo di circa 2s corrisponde ad una pulsazione naturale circa pari a 3. Nella fdt

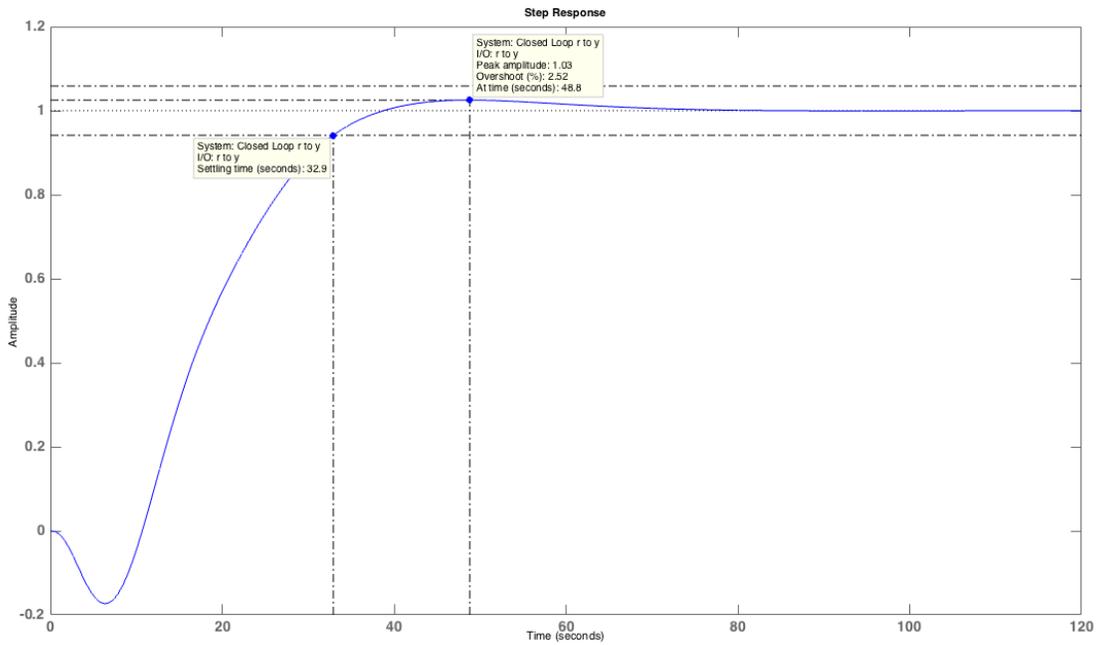


Figura 4: Risposta al gradino del sistema in anello chiuso

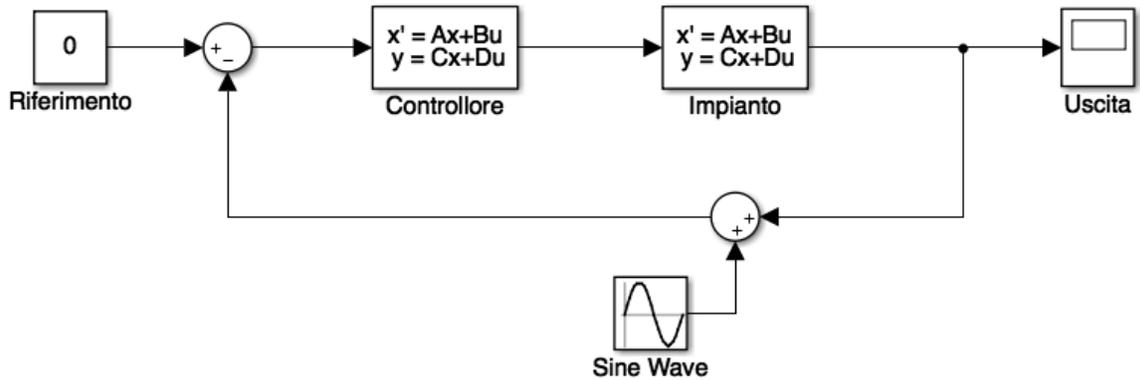


Figura 5: Schema Simulink per effetto del rumore di misura

ci sono pertanto almeno tre zeri e tre poli e la fdt ha forma.

$$G = \frac{(s + a)(s + b)(s + c)}{s(s^2 + 2\delta s + 9)}$$

Inoltre, il fatto che la pendenza sia negativa vuol dire che è presente uno zero a fase non minima in quanto  $sG(s)$  calcolata in  $s = 0$  deve essere negativo (pari a  $-0.1$ ) come sopra menzionato.

La funzione di trasferimento che ha generato la risposta al gradino riportata in figura è

$$G = \frac{(s + 1)^2(s - 1)}{s(s^2 + 0.8s + 9)}$$

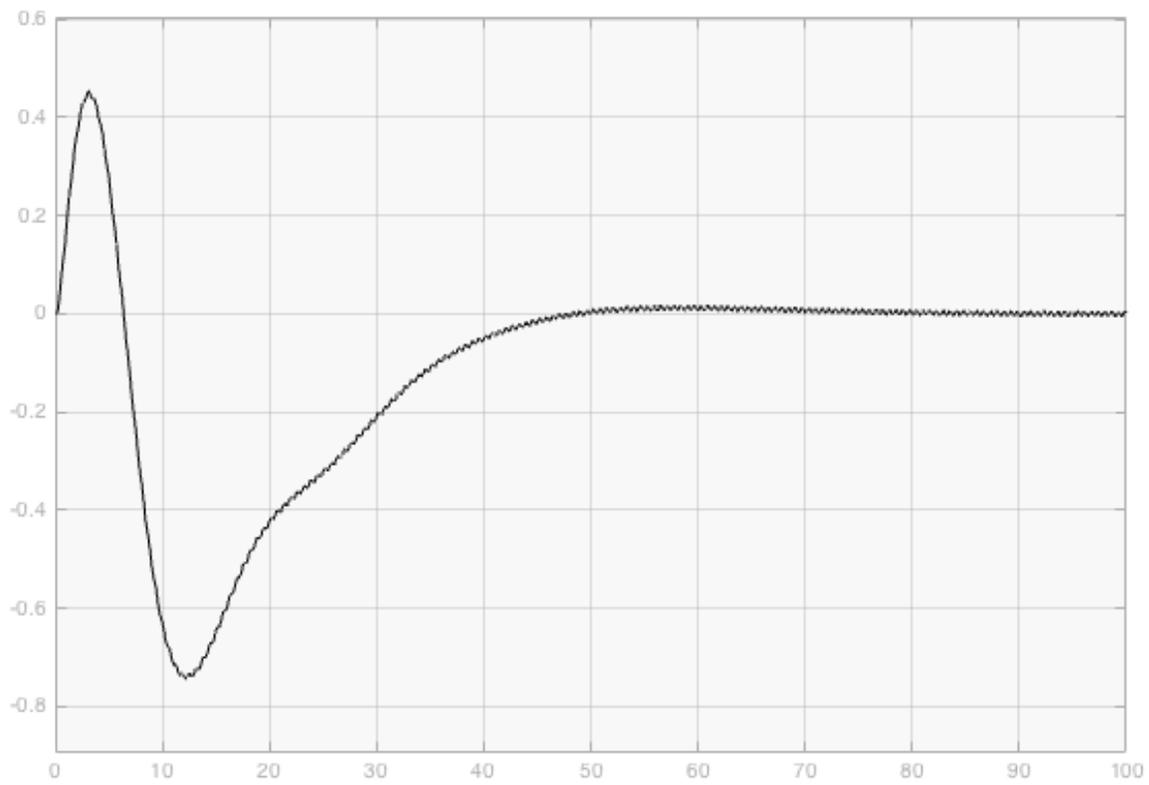


Figura 6: Andamento dell'uscita dovuto al rumore di misura