

Controllo Ottimo

Dall'ottimizzazione al controllo ottimo

In un problema di ottimizzazione si vuole determinare il massimo (o minimo) valore di una funzione ed eventualmente il valore delle variabili per cui tale massimo viene raggiunto.

Il calcolo delle variazioni invece si occupa di massimizzare (o minimizzare) un funzionale. Un funzionale è una funzione di funzioni e quindi associa un valore ad una funzione (o equivalentemente il dominio di un funzionale è un insieme di funzioni). L'esempio più classico del calcolo delle variazioni è quello della determinazione delle geodesiche: curve a “lunghezza” minima tra due punti. La nascita del calcolo delle variazioni viene associata al problema della curva brachistocrona di Johann Bernoulli del 1696. La brachistocrona è la curva che permette ad una particella con massa di andare da un punto ad un altro nel minor tempo possibile.

Il controllo ottimo invece si occupa di determinare il controllo che fa evolvere il sistema ottimizzando un certo funzionale.

In un problema di controllo ottimo sono presenti: l'insieme degli stati, l'insieme dei controlli, l'equazione dinamica, le condizioni iniziali del sistema, la funzione costo da ottimizzare, vincoli su stati e/o controlli.

Consideriamo un sistema dinamico nonlineare nella forma piuttosto generale

$$\dot{x} = f(x, u), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m, \quad x(0) = x_0$$

Consideriamo anche un indice obiettivo

$$J = \Psi(x(T)) + \int_0^T L(x(t), u(t)) dt$$

che considera i valori ottenuti dallo stato ad un tempo finale T , oltreché l'andamento dello stato e del controllo lungo tutto l'intervallo tra $t = 0$ e $t = T$.

Si noti che la funzione obiettivo è interamente determinata, per un dato sistema dinamico e per date condizioni iniziali, dalla funzione di ingresso $u(t)$.

Consideriamo il problema di massimizzare J , che rappresenta un *funzionale* in quanto funzione di funzioni, rispetto alle possibili scelte del controllo. In generale, i valori istantanei del controllo potranno essere soggetti a restrizioni (ad esempio, valori limitati in modulo), nel qual caso restringeremo opportunamente $u \in \mathcal{U}$.

Quello posto è un problema di calcolo variazionale, cioè un problema di ottimizzazione in cui la incognita è una funzione invece che semplicemente una variabile incognita. Un particolare ingresso $\hat{u}(t)$ è ottimo se $J(\hat{u}) \geq J(u)$, $\forall u \in \mathcal{U}$.

Essendo la massimizzazione di J soggetta al vincolo tra l'andamento di $x(t)$ e quello di $u(t)$ espresso dalla dinamica, possiamo procedere, secondo una tecnica analoga a quella dei moltiplicatori di Lagrange nel caso di ottimizzazione di funzioni con vincoli, a scrivere un indice modificato

$$J_0 = J - \int_0^T p^T (\dot{x} - f(x, u)) dt, \quad p \in \mathbb{R}^n$$

per il quale vale ovviamente $J_0 = J, \forall t, \forall u$, qualsiasi sia la scelta del moltiplicatore $p \in \mathbb{R}^n$, che potrà anche essere variabile nel tempo (cioè una funzione $p : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n, t \mapsto p(t)$).

Riscriviamo

$$\begin{aligned} J_0 &= \Psi(x(T)) + \int_0^T [L(x, u) + p^T f(x, u) - p^T \dot{x}] dt \\ &:= \Psi(x(T)) + \int_0^T [H(p, x, u) - p^T \dot{x}] dt \end{aligned}$$

dove si è definito implicitamente il funzionale

$$H(p, x, u, t) = p^T f(x, u) + L(x, u, t)$$

che viene detto *Hamiltoniano* del problema e che dipende da x, u , da t (anche se non sempre esplicitamente) e dalla variabile p detta *costato*.

Cercando di dare condizioni necessarie affinché un ingresso $\hat{u}(t)$ sia ottimo, consideriamo il problema localmente, cioè confrontiamo l'indice ottenuto da $\hat{u}(t)$ rispetto a quello ottenuto da funzioni $u(t)$ che differiscano “poco” da $\hat{u}(t)$.

Considereremo quindi funzioni u per cui valga

$\|\hat{u} - u\| := \max_i \int_0^T |\hat{u}_i(t) - u_i(t)| dt < \epsilon$, con ϵ opportunamente piccolo (si noti che sono ammesse differenze anche grandi tra le componenti di ingresso, purché per tempi brevi).

Per la continuità delle soluzioni delle equazioni differenziali ordinarie, anche le soluzioni $x(t, x_0, u)$ differiranno poco dalla soluzione $x(t, x_0, \hat{u})$, e scriveremo $x(t, x_0, \hat{u}) - x(t, x_0, u) = \delta x(t)$, con $\|\delta x(t)\|$ infinitesimo dello stesso ordine di ϵ .

La funzione obiettivo è corrispondentemente modificata da

$$\begin{aligned}\delta J_0 = & \Psi(x(T) + \delta x(T)) - \Psi(x(T)) \\ & + \int_0^T [H(p, x + \delta x, u) - H(p, x, \hat{u})] dt \\ & - \int_0^T [p^T (\dot{x} + \delta \dot{x}) - p^T \dot{x}] dt\end{aligned}$$

Approssimando al primo ordine, e indicando con un pedice le derivate parziali, si ha

$$\Psi(x(T) + \delta x(T)) - \Psi(x(T)) \approx \Psi_x(x(T))\delta x(T),$$

e

$$\begin{aligned}& \int_0^T [H(p, x + \delta x, u) - H(p, x, \hat{u})] dt \\ & = \int_0^T [H(p, x + \delta x, u) - H(p, x, u) + H(p, x, u) - H(p, x, \hat{u})] dt \\ & \approx \int_0^T [H_x(p, x, u)\delta x + H(p, x, u) - H(p, x, \hat{u})] dt\end{aligned}$$

Usando invece la regola di integrazione per parti, si ha che il terzo addendo in δJ_0 vale

$$\begin{aligned}\int_0^T p^T \delta \dot{x} dt & = [p^T \delta x]_0^T - \int_0^T \dot{p}^T \delta x dt \\ & = p(T)^T \delta x(T) - p(0)^T \delta x(0) - \int_0^T \dot{p}^T \delta x dt.\end{aligned}$$

Osservando che $\delta x(0) = 0$ (le variazioni del controllo non hanno influenza sulle condizioni iniziali), possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \delta J_0 \approx & \\ & [\Psi_x(x(T)) - p^T(T)] \delta x(T) \\ & + \int_0^T [H_x(p, x, u) + \dot{p}^T] \delta x dt \\ & + \int_0^T [H(p, x, u) - H(p, x, \hat{u})] dt \end{aligned}$$

a meno di infinitesimi di ordine superiore rispetto a ϵ . Possiamo adesso semplificare δJ_0 usando la libertà che ci è concessa nella scelta di $p(t)$. Ponendo infatti

$$\dot{p}(t) = -H_x^T(p, x, u) \quad \text{e} \quad p(T) = \Psi_x^T(x(T)),$$

si ottiene

$$\delta J_0 = \int_0^T [H(p, x, u) - H(p, x, \hat{u})] dt.$$

Si noti che le scelte fatte per $p(t)$ equivalgono a definire una equazione differenziale ordinaria *aggiunta* al problema, con condizioni non iniziali come consueto, bensì terminali.

Se $\hat{u}(t)$ è ottima, come supposto, allora deve essere $\delta J_0 < 0$, $\forall u(t)$ nell'insieme considerato. Questo implica che per ogni t , valga

$$H(p, x, u) \leq H(p, x, \hat{u}).$$

Questa condizione, molto più forte della disequazione appena vista, discende dal fatto che, se esistesse una u per la quale, anche in un solo istante t^* , valesse $H(p, x, u(t^*)) > H(p, x, \hat{u}(t^*))$, allora si potrebbe costruire un nuovo ingresso $w(t) = \hat{u}(t)$, $\forall t \neq t^*$, ma $w(t^*) = u(t^*)$, per la quale risulterebbe $\delta J_0 > 0$, contro l'ipotesi che \hat{u} sia ottima.

E' ovvio che la relazione $H(p, x, u) \leq H(p, x, \hat{u})$, quando fossero noti lo stato ed il co-stato ad un tempo t , permetterebbe di trovare il valore ottimo u con la soluzione di un normale problema di massimizzazione di una funzione rispetto ad una variabile. In particolare, se gli ingressi non sono soggetti a vincoli, una condizione necessaria affinché $\hat{u}(t)$ sia ottimo è che esso sia un estremo di $H(x, p, u)$, cioè che

$$H_u(x, p, u)|_{\hat{u}} = 0.$$

Un contributo importante che generalizza la applicabilità di questa osservazione al caso (praticamente molto importante) in cui i valori del controllo siano limitati in un insieme compatto $u(t) \in \mathcal{U}$, è il seguente

Principio del Massimo di Pontryagin: se $\hat{u}(t)$ è il controllo ottimo, allora $H(x(t), p(t), \hat{u}(t))$ assume il valore massimo tra quelli ottenuti da $u(t) \in \mathcal{U}$

Si osservi esplicitamente come i massimi di una funzione continua su un compatto possono essere ottenuti non solo nei punti estremali ma anche sulla frontiera dell'insieme.

Riassumendo, abbiamo trovato che:

Se $\hat{u}(t)$ e $x(t)$ sono la funzione di ingresso e la corrispondente traiettoria di stato soluzioni del problema di controllo ottimo sopra definito, allora esiste una traiettoria (detta di co-stato) $p(t)$ che soddisfa le seguenti condizioni:

$$\begin{array}{ll} \dot{x} = f(x, \hat{u}); & \text{dinamica dello stato} \\ x(0) = x_0; & \text{condizioni iniziali in } x \\ \dot{p} = -f_x^T(x, \hat{u})p(t) - L_x^T(x, \hat{u}); & \text{dinamica del co-stato} \\ p(T) = \Psi_x^T(x(T)); & \text{condizioni finali sul co-stato} \end{array}$$

ed inoltre vale

$$H(x, p, \hat{u}) \geq H(x, p, u), \quad \forall u \in \mathcal{U}.$$

Questo sistema di equazioni definisce completamente l'ottimo, nel senso che si hanno tante equazioni quante incognite: queste ultime sono le $2n + m$ funzioni $u(t)$, $x(t)$ e $p(t)$, determinate dalle $2n$ equazioni differenziali ordinarie dello stato e del co-stato, con le loro rispettive condizioni agli estremi, e dalle m condizioni di massimizzazione dell'Hamiltoniano.

La soluzione di questo sistema di equazioni non è peraltro facile nel caso generale. Una delle cause principali di tali difficoltà deriva dal fatto che le condizioni agli estremi sono miste iniziali e finali. Anche le soluzioni numeriche possono risultare molto impegnative.

Esempio 1

A scopo puramente illustrativo, si consideri il problema di trovare la curva nel piano che, partendo dalla origine, raggiunga la massima ordinata per un dato valore della ascissa, avendo una derivata limitata. Il problema, di cui la soluzione è ovviamente una retta a inclinazione pari al valore massimo ammissibile, può essere posto nella forma di un problema di controllo ottimo. Sia t la variabile di ascissa, con $0 \leq t \leq T$, e x quella in ordinata. Sia $u(t)$ il valore della derivata della curva in t , e sia U il suo massimo valore ammissibile. L'obiettivo da massimizzare può essere espresso mediante un funzionale di costo

$$J = \psi(x(T)) + \int_0^T L(x, u, t) dt \text{ scegliendo } \psi(x(T)) = x(T) \text{ e } L(x, u, t) = 0.$$

Si ha dunque il problema

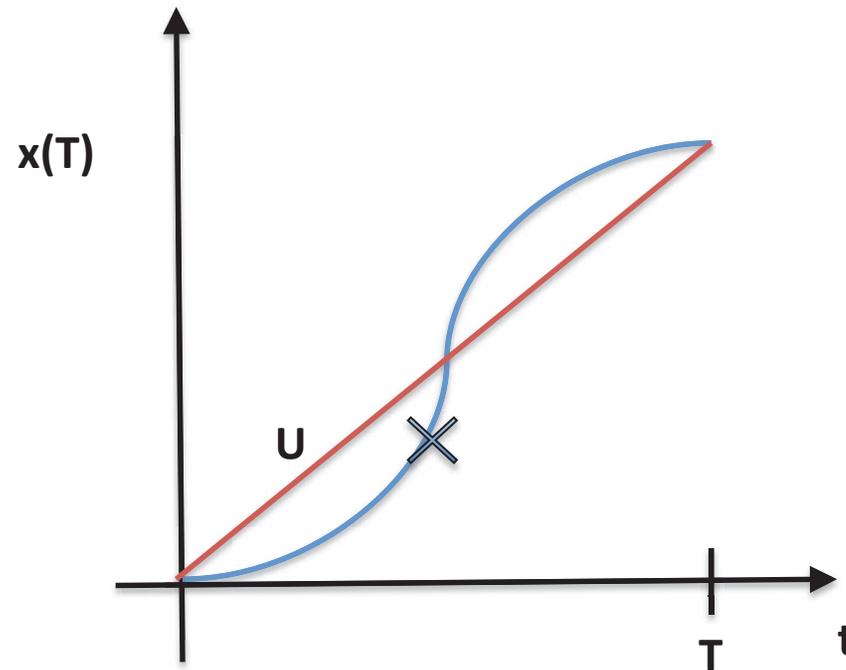
$$\dot{x}(t) = u(t)$$

$$x(0) = 0$$

$$u(t) \leq U, \quad 0 \leq t \leq T$$

$$J = x(T)$$

L'Hamiltoniano del problema vale $H = pu$ (stato e costato sono scalari), quindi l'equazione aggiunta è data da $\dot{p} = -H_x = 0$, con $p(T) = \psi_x(x(T)) = 1$. Ne segue $p(t) = 1, 0 \leq t \leq T$. Il controllo ottimo è quello che massimizza $H = u(t)$, quindi ovviamente $u(t) \equiv U$. La curva ottima ha derivata costante e pari al massimo valore disponibile.



Esempio 2: Veicolo con attrito

Si consideri la equazione dinamica di un veicolo di massa unitaria, con attrito viscoso lineare di costante c , soggetto ad una spinta u . Sia x la velocità del veicolo, e U il massimo valore della spinta disponibile. Si vuole ottenere la massima velocità del veicolo al tempo T , ma al contempo si deve tenere conto della spesa di carburante, il cui consumo istantaneo è proporzionale secondo un fattore γ al quadrato della spinta. Scriviamo dunque

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= -cx + u(t) \\ x(0) &= 0 \\ u(t) &\leq U, \quad 0 \leq t \leq T \\ J &= x(T) - \int_0^T \gamma u^2(t) dt\end{aligned}$$

L'Hamiltoniano vale $H = -\gamma u^2 - pcx + pu$, da cui la dinamica aggiunta $\dot{p} = cp$ con condizioni finali $p(T) = \psi_x(x(T)) = 1$. La soluzione della dinamica aggiunta è semplice in questo caso, e vale

$$p(t) = e^{c(t-T)}.$$

Per il principio di Pontryagin, il controllo ottimo è quello che massimizza l'Hamiltoniano in ogni istante t . Poiché il controllo e lo stato non appaiono negli stessi termini in H , la massimizzazione è agevole. Si ha infatti

$$\hat{u} = \arg \max_{u \leq U} H(x, u, t) = \arg \max_{u \leq U} -\gamma u^2 + pu.$$

Valutando $H_u = 0$ si ottiene un massimo per $\bar{u} = \frac{p}{2\gamma}$. Si ha quindi

$$\hat{u} = \begin{cases} \frac{e^{c(t-T)}}{2\gamma}, & e^{c(t-T)} \leq 2\gamma U \\ U, & e^{c(t-T)} > 2\gamma U \end{cases} .$$

Quindi si hanno i casi

- ▶ se $2\gamma U \leq e^{-cT}$, si ha $\hat{u} \equiv U$;
- ▶ se $2\gamma U \geq 1$, si ha $\hat{u} = \frac{1}{2\gamma} e^{c(t-T)}$;
- ▶ se invece $e^{-cT} < 2\gamma U < 1$, si ha

$$\hat{u}(t) = \begin{cases} \frac{e^{c(t-T)}}{2\gamma}, & 0 < t < T - \frac{|\log(2\gamma U)|}{c} \\ U, & t \geq T - \frac{|\log(2\gamma U)|}{c} \end{cases} .$$

Massimo spostamento di una massa con costo quadratico del controllo

Consideriamo ancora una massa unitaria in moto rettilineo sottoposta a una spinta il cui costo è proporzionale al quadrato della intensità. Si desidera in questo caso massimizzare la distanza raggiunta dalla massa. Scriviamo dunque

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= u \\ x(0) &= 0 \\ J &= x_1(T) - \int_0^t \gamma u^2 dt,\end{aligned}$$

dove γ rappresenta il peso del costo del controllo relativamente al valore dell'obiettivo da massimizzare.

Si ha facilmente

$$H = p_1 x_2 + p_2 u - \gamma u^2$$

e le equazioni aggiunte

$$\dot{p}_1 = -H_{x_1} = 0, \quad p_1(T) = \Psi_{x_1}(x(T)) = 1;$$

$$\dot{p}_2 = -H_{x_2} = -p_1, \quad p_2(T) = \Psi_{x_2}(x(T)) = 0.$$

da cui immediatamente $p_1(t) \equiv 1$ e $p_2(t) = T - t$. Dalla massimizzazione dell'hamiltoniano risulta quindi

$$H_u = p_2 - 2\gamma u \Rightarrow \hat{u} = \frac{1}{2\gamma}(T - t).$$

Il controllo ottimo decresce quindi linearmente nel tempo. Se è poi presente un limite superiore al valore della spinta U , la discussione segue le linee dell'esempio precedente.

Formulazione Hamiltoniana

Si dà talvolta una formulazione diversa del problema del controllo ottimo, detta Hamiltoniana, che gode di una maggiore compattezza ed eleganza. Si introduce un nuovo stato definito da

$$\dot{x}_L(t) = L(x(t), u(t)), \quad x_L(0) = 0$$

e lo si giustappone a x in un nuovo vettore $n + 1$ dimensionale $x_e^T = [x_L^T, x^T]$, talché l'indice obiettivo diviene

$$J = \Psi(x(T)) + x_L(T) := \Phi(x_e(t))$$

La funzione hamiltoniana viene parimenti ridefinita da

$$H = p_e^T(t)\dot{x}_e(t) = p_L^T(t)\dot{x}_L(t) + p^T(t)\dot{x}(t)$$

da cui si ha

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_e(t) = \left(\frac{\partial H}{\partial p_e} \right)^T \\ \dot{p}_e(t) = - \left(\frac{\partial H}{\partial x_e} \right)^T \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} x_e(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ x(0) \end{bmatrix} \\ p_e(T) = \begin{bmatrix} 1 \\ \Psi_x(x(T)) \end{bmatrix} \end{array}$$

che definiscono interamente il problema assieme alla condizione di massimizzazione dell'hamiltoniano $\hat{u} = \arg \max_{u \in \mathcal{U}} H(x, p, u)$.

Si noti che, non essendo H funzione esplicita di x_L , dalle equazioni differenziale per il costato esteso si ricava $\dot{p}_L = 0$, $p_L(T) = 1$, da cui $p_L(t) \equiv 1$, per cui la funzione hamiltoniana coincide con quella precedentemente definita.

Sussiste infine la notevole relazione

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}H(x, p, t) &= H_p\dot{p} + H_x\dot{x} + H_t \\ &= -H_pH_x^T + H_xH_p^T + H_t = H_t \end{aligned}$$

da cui, se l'Hamiltoniano non dipende esplicitamente dal tempo (ovvero se il costo e la dinamica sono tempo-invarianti), si ha che, in corrispondenza di traiettorie ottimali, l'Hamiltoniano stesso è costante, vale a dire è *un integrale primo del moto*.

Esempio: Sistemi Meccanici Hamiltoniani

Come primo esempio, per mostrare la generalità delle relazioni trovate, useremo la tecnica variazionale appena descritta per ricavare le equazioni dinamiche del moto di un sistema conservativo, descritto da coordinate generalizzate q .

Si consideri dunque un sistema con Lagrangiana $L(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - U(q)$, dove $T(q, \dot{q})$ è l'energia cinetica, e $U(q)$ l'energia potenziale del sistema. Ci si propone di trovare la legge del moto di questo sistema che minimizza l'integrale della Lagrangiana, secondo quello che in fisica viene detto "principio di minima azione". Assimiliamo quindi le velocità da determinare alla funzione di controllo incognita u in un problema di controllo ottimo, cioè poniamo $\dot{q} = u$, e scriviamo

$$J = \int_0^T (T(q, u) - U(q)) dt$$

ovvero

$$H(q, u, p) = T(q, u) - U(q) + p^T u$$

da cui

$$\begin{aligned} \dot{p}^T &= -\frac{\partial H}{\partial q} = -\frac{\partial L}{\partial q}, \\ 0 &= \frac{\partial H}{\partial u} = \frac{\partial L}{\partial u} + p^T. \end{aligned}$$

Differenziando rispetto al tempo e combinando le due equazioni si ottiene

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0,$$

ovvero le equazioni di Eulero-Lagrange per il moto di sistemi conservativi.

Se la lagrangiana L non è funzione esplicita del tempo, H è un integrale primo, quindi è una costante del moto. Osservando che

$$H = T - U - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \dot{q}$$

e che l'energia cinetica è una forma quadratica omogenea delle velocità, del tipo $T = \dot{q}^T I(q) \dot{q}$, e che quindi $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \dot{q} = 2T$, si ottiene

$$-H = T + U = \text{cost.}$$

cioè, l'energia meccanica si conserva nel moto di un sistema conservativo.

Con piccole modifiche del procedimento precedente, è possibile trattare il caso in cui siano presenti forze generalizzate non conservative Q_{nc} , arrivando alla nota equazione

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = Q_{nc}.$$

Altri problemi di controllo ottimo

Vi sono ovviamente altre possibili posizioni dei problemi di controllo ottimo.

In alcuni casi non ci si accontenta di pesare la distanza della configurazione finale da un valore desiderato come fatto con $\Psi(x(T))$, ma si vuole imporre esattamente a $x(T)$ un dato valore. In tal caso, la caratterizzazione sopra fornita della soluzione è ancora valida, laddove si rimuovano le condizioni finali sul co-stato (il numero di equazioni totale non cambia). In problemi in cui solo alcune componenti dello stato siano assegnate al tempo finale, saranno assegnate condizioni terminali solo alle componenti del co-stato di indice diverso da quelle.

Esempio: Percorso minimo tra due punti

Ancora a livello illustrativo, si consideri il problema di trovare la più breve curva nel piano che unisca due punti dati, ad esempio la origine del piano con un punto di coordinate $(1, 1)$. Questo problema può essere scritto in termini di controllo ottimo con alcuni semplici artifici.

Poniamo le coordinate del piano uguali a (t, x) , e imponiamo le condizioni iniziali $x(t = 0) = 0$, $x(t = 1) = 1$. Sia inoltre $\dot{x}(t) = u(t)$ la pendenza della curva da determinare. La lunghezza dell'arco infinitesimo di curva corrispondente ad un incremento dt vale $\sqrt{dx^2 + dt^2}$ ovvero $\sqrt{(1 + u^2)}dt$. Scriviamo quindi

$$\begin{aligned}\dot{x} &= u \\ x(0) &= 0 \\ x(1) &= 1 \\ J &= \int_0^1 \sqrt{1 + u^2} dt\end{aligned}$$

Si noti che il problema è qui di minimizzazione, e non di massimizzazione come discusso in precedenza. Ciò non altera sostanzialmente la natura del problema: si può procedere o cambiando il segno del funzionale J e massimizzando, ovvero semplicemente procedendo come detto in precedenza eccetto per la ricerca del controllo ottimo, che sarà quello che minimizza l'Hamiltoniano.

L'Hamiltoniano del problema di minimizzazione vale

$$H = p^T u + \sqrt{1 + u^2}$$

L'equazione aggiunta è ovviamente $\dot{p} = H_x = 0$. Essendo fissato il valore terminale di $x(1)$, non è fissata la $p(T)$ (che dovrebbe essere determinata dalle altre condizioni, se necessario). Sappiamo comunque che si avrà $p(t) = \text{cost}$.

Anche senza conoscere p , né risolvere $H_u = 0$, osserviamo che l'unico termine in H che dipende dal tempo è u stesso. Dovendo $u(t)$ minimizzare H per ogni t , ne risulta che $\hat{u}(t) = u = \text{cost}$. Quindi la pendenza della curva è costante, cioè la curva più breve è un segmento di retta. Trovatane la natura, la specifica soluzione si trova a partire dalle condizioni ai tempi iniziale e finale: si tratta ovviamente della retta passante per i punti dati.

Problemi di tempo minimo

Un altro caso di particolare interesse è quello in cui il tempo finale T sia libero, e rappresenta quindi una ulteriore variabile da determinare. Si noti dalla espressione dell'indice obiettivo

$$J_0 = \int_0^T [H(p, x, u) - p^T \dot{x}] dt$$

che, in corrispondenza di un valore ottimo \hat{T} , la variazione di J_0 dovuta ad una modifica dell'estremo superiore di integrazione deve essere nulla.

Valendo la *condizione di trasversalità* al tempo finale $p^T(T)\dot{x}(T) = 0$, si trova la ulteriore condizione necessaria per il tempo finale ottimo

$$H(x(\hat{T}), p(\hat{T}), u(\hat{T})) = 0.$$

Esempio: posizionamento di una massa inerziale in tempo minimo

Consideriamo il problema di portare un corpo di massa $m = 1$ mobile su una retta senza attrito, da una posizione iniziale $x(0) = x_0$ all'origine nel minimo tempo possibile. Naturalmente, il problema ha senso solo se la forza con cui si può agire sulla massa è limitata.

Scrivendo la dinamica $\ddot{x} = u$ in forma di stato, si vuole dunque minimizzare $J = \int_0^T 1 dt$ dato il problema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= u \\ x_1(0) &= x_0 \\ x_1(T) &= 0 \\ x_2(0) &= 0 \\ x_2(T) &= 0 \\ -1 &\leq u \leq 1\end{aligned}$$

L'Hamiltoniano vale $H = 1 + p_1 x_2 + p_2 u$, da cui immediatamente si ha

$$\begin{aligned} \dot{p}_1 &= -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0 \quad \Rightarrow \quad p_1 = \text{const.} \\ \dot{p}_2 &= -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -p_1 \quad \Rightarrow \quad p_2(t) = p_2(T) + p_1(T - t) \end{aligned}$$

Il controllo ottimo è dunque quello che minimizza

$$H = 1 + p_1 x_2 + p_2(t)u$$

e quindi vale

$$\begin{cases} u = 1, & p_2 < 0; \\ u = -1, & p_2 > 0; \end{cases}$$

La condizione dei problemi a tempo minimo $H(t_f) = 0$, impone poi che $p_2(T)u(T) = -1$ (si ricordi che $x_2(T) = 0$), quindi

$$\begin{cases} p_2(T) > 0, & u(T) < 0 \\ \text{ovvero} \\ p_2(T) < 0, & u(T) > 0 \end{cases}$$

Si noti che il controllo ottimo non è definito negli istanti in cui si ha $p_2(t) = 0$. D'altronde, l'andamento lineare di $p_2(t)$ mostra che, eccettuato il caso in cui

fosse $p_1 = p_2 = 0$, che è da escludere, si ha $p_2(t) = 0$ solo per un valore isolato $t = t^*$ nell'intervallo $[0, T]$: il controllo ottimo è quindi discontinuo in t^* .

Si osserva anche che il segno del controllo può cambiare una sola volta nel corso di una esecuzione del controllo.

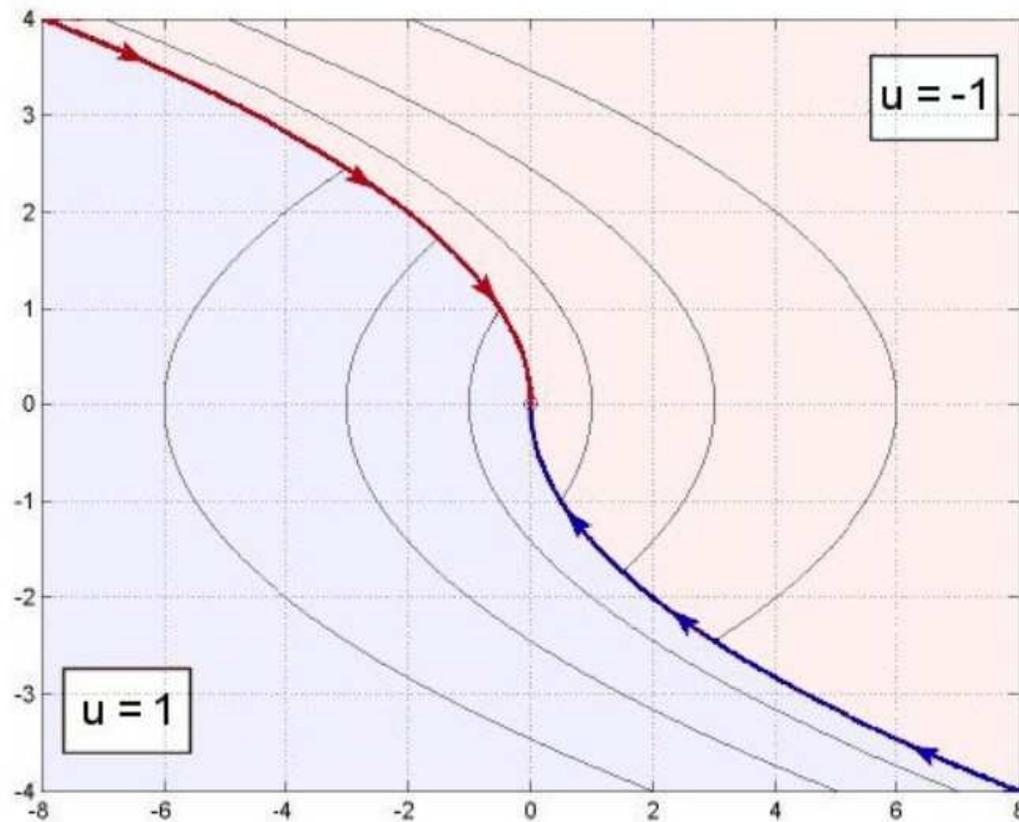
Questo tipo di controllo, che usa solo i valori massimo e minimo dell'intervallo ammissibile, viene detto *bang-bang*. La funzione $p_2(t)$, i cui attraversamenti dello zero stabiliscono le commutazioni del valore del controllo, viene detta funzione di *switching*. Il controllo ottimo risulta quindi in una fase di accelerazione massima seguita da una fase di decelerazione massima, o viceversa, a seconda delle condizioni iniziali.

La traiettoria ottima corrispondente al tratto finale del controllo ottimo può essere disegnata esplicitamente nel piano di stato, integrando all'indietro le equazioni del moto ottimo nei due casi:

$$\text{a) } u(t_f) = -1 \Rightarrow x_2(t) = t_f - t, \quad x_1(t) = -\frac{(t_f - t)^2}{2} \Rightarrow x_1 = -x_2^2/2$$

$$\text{b) } u(t_f) = 1 \Rightarrow x_2(t) = t - t_f, \quad x_1(t) = \frac{(t - t_f)^2}{2} \Rightarrow x_1 = x_2^2/2$$

La curva di switching è data dunque da due rami di parabola, uniti nell'origine.



Le curve ottime sono anch'esse archi di parabola, paralleli alle precedenti.

Percorsi minimi di veicoli a raggio di sterzo limitato

Consideriamo il modello cinematico di un veicolo su ruote

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = u \cos \theta(t) \\ \dot{y}(t) = u \sin \theta(t) \\ \dot{\theta}(t) = \omega(t), \end{cases}$$

dove $\xi(t) = (x(t), y(t), \theta(t))$ rappresentano le coordinate del veicolo e la direzione di moto corrente, u e ω rappresentano, rispettivamente, le velocità lineari e angolari. Si considererà il caso in cui il veicolo proceda a velocità costante $u = U > 0$.

La limitatezza dell'angolo di sterzata del veicolo si può modellare con una limitazione della velocità angolare $|\omega| \leq \frac{U}{R}$. Si suppongano note una configurazione iniziale del veicolo $\xi_i = (x_i, y_i, \theta_i)$ e una configurazione finale $\xi_f = (x_f, y_f, \theta_f)$.

Vogliamo determinare il cammino di lunghezza minima tra le due configurazioni. Si noti che in questo caso il problema di lunghezza minima e tempo minimo coincidono.

Il problema di controllo ottimo è posto come segue:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min J = \int_0^T 1 dt, \\ \dot{x}(t) = U \cos \theta(t), \\ \dot{y}(t) = U \sin \theta(t), \\ \dot{\theta}(t) = \omega(t), \\ |\omega| \leq \frac{U}{R}, \\ \xi(0) = \xi_i, \\ \xi(T) = \xi_f. \end{array} \right. \quad (15)$$

L'Hamiltoniano del sistema risulta

$$H(p, \xi) = 1 + p_1 U \cos(\theta) + p_2 U \sin(\theta) + p_3 \omega$$

Per il principio del minimo di Pontryagin, si ha che i controlli ottimi sono quelli che minimizzano l'Hamiltoniano

$$\hat{\omega} = \arg \min_{\omega \in [-\frac{U}{R}, \frac{U}{R}]} H(p, \xi).$$

Esplicitando la condizione sulle derivate del co-stato si ha che

$$\begin{aligned}\dot{p}_1 &= -\frac{\partial H}{\partial x} = 0 \Rightarrow p_1 = \text{const.} := d \cos \phi \\ \dot{p}_2 &= -\frac{\partial H}{\partial y} = 0 \Rightarrow p_2 = \text{const.} := d \sin \phi \\ \dot{p}_3 &= -\frac{\partial H}{\partial \theta} = p_1 U \sin \theta - p_2 U \cos \theta = U d \sin(\theta - \phi)\end{aligned}$$

Dalla terza condizione si ha anche che $\dot{p}_3 = p_1 \dot{y} - p_2 \dot{x}$ e quindi p_3 è una retta del piano (x, y) : $p_3 = p_1 y - p_2 x + K$. Dalla condizione di ottimalità si ha che, all'interno dell'intervallo $-\frac{U}{R} < \omega < \frac{U}{R}$, deve valere:

$$\frac{\partial H}{\partial \omega} = p_3 = 0$$

Quindi se, lungo una traiettoria ottima, si ha controllo non saturato $|\omega| < \frac{U}{R}$, allora $\dot{p}_3 = U d \sin(\theta - \phi) = 0$ da cui segue che $\theta = \phi \pm \pi$, quindi θ costante. Si ottiene quindi che, se $|\omega| \neq \frac{U}{R}$, allora $\omega = 0$, e il tratto percorso dal veicolo è rettilineo.

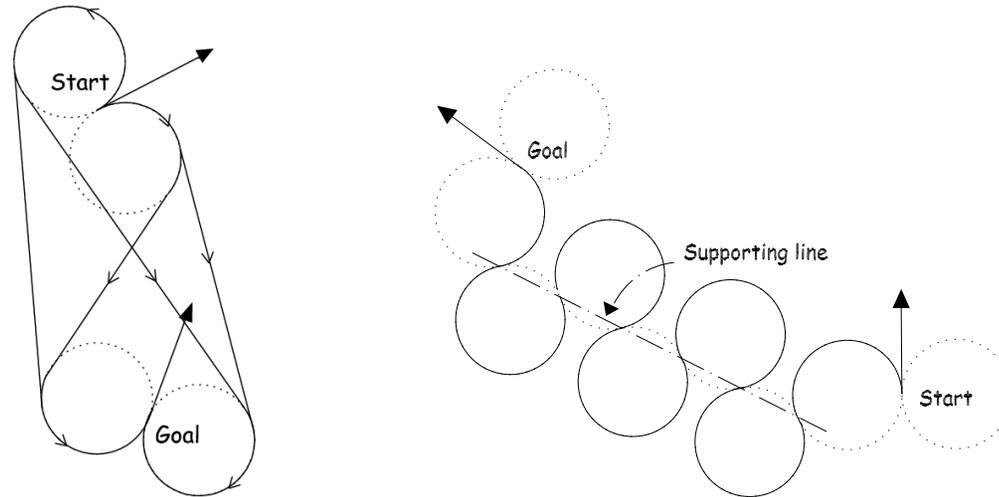
Altrimenti, essendo l'Hamiltoniano funzione lineare di ω , il suo minimo non potrà trovarsi che sui bordi dell'intervallo ammissibile per ω , e si avrà

$$\begin{cases} p_1 y - p_2 x + K > 0 \Rightarrow \omega = -\frac{U}{R} \\ p_1 y - p_2 x + K < 0 \Rightarrow \omega = \frac{U}{R} \end{cases}$$

In queste circostanze, quindi, il veicolo percorre tratti curvilinei di circonferenze di raggio massimo, curvando a destra o a sinistra a seconda del segno della funzione di switching $p_1 y - p_2 x + K$.

Denotiamo con C_R e C_L un tratto di traiettoria corrispondente ad un arco di circonferenza di raggio minimo (R) e percorso in senso orario o antiorario, e con S un tratto rettilineo.

Le traiettorie ottime vanno quindi cercate tra “parole” candidate costruite con le “lettere” C_R, C_L, S . Ogni tratto ha una propria lunghezza, che deve essere trovata sulla base delle condizioni al contorno e di ottimalità.



Nel 1957, Dubins ha dimostrato il seguente teorema: Ogni curva continua con derivata continua e derivata seconda continua a tratti, che colleghi due punti orientati nel piano con curvatura limitata, è di lunghezza non inferiore a quella di una curva di tipo $C_R C_L C_R$, o $C_L C_R C_L$, oppure $C S C$, con $C \in \{C_R, C_L\}$.

Reeds e Shepp hanno esteso il risultato al caso in cui U possa variare in un intervallo $|U| \leq 1$, nel qual caso i percorsi minimi possono essere scritti come 46 diverse possibili parole di non più di cinque lettere tra C_R, C_L, S , intervallate da non più di due inversioni di velocità.

Controllo Ottimo di Sistemi Lineari

Applichiamo i principi del controllo ottimo ad un sistema lineare

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(0) = x_0, \quad x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m$$

con un indice quadratico

$$J = \frac{1}{2}x^T(T)Fx(T) + \int_0^T \frac{1}{2} (x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)) dt$$

con matrice R positiva definita e Q ed F almeno semidefinite positive.

Si tratta quindi di un indice che comprende un costo assegnato alle variabili di stato al tempo finale (che si desiderano quindi essere vicine all'origine secondo i pesi fissati da F); un costo della evoluzione dello stato, che favorisce soluzioni che più rapidamente convergono all'origine secondo i pesi fissati da Q ; e un costo del controllo impiegato, che favorisce ingressi meno energici secondo i pesi fissati da R . Si noti che, trattandosi di costi, il problema qui posto è quello della sua minimizzazione, ovvero della massimizzazione di $-J$.

La scelta delle matrici F, Q, R può essere fatta secondo criteri di ragionevolezza, ad esempio ponendole diagonali e pari a

$$\begin{aligned} 1/F_{ii} &= \text{max. valore accettabile per } x_i^2(T) \\ 1/Q_{ii} &= T * \text{max. valore accettabile per } x_i^2(t) \\ 1/R_{ii} &= T * \text{max. valore accettabile per } u_i^2(t) \end{aligned}$$

L'Hamiltoniano vale in questo caso

$$H(x, p, u) = p^T Ax + p^T Bu - \frac{1}{2}x^T Qx - \frac{1}{2}u^T Ru.$$

Non essendo l'ingresso limitato, ed essendo H illimitato superiormente al variare di u , i minimi dell'Hamiltoniano possono solo trovarsi nei suoi punti interni.

Imponendo

$$H_u = p^T B - u^T R = 0$$

si ha immediatamente

$$\hat{u} = R^{-1} B^T p.$$

Inoltre, dalle condizioni $\dot{p} = -H_x$ e $\dot{x} = H_p$ si ha

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & BR^{-1}B^T \\ Q & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ p \end{bmatrix}.$$

Queste equazioni, assieme alle condizioni $x(0) = x_0$ e $p(T) = -Fx(T)$, determinano il controllo ottimo.

Il controllo ottimo così trovato risulta comunque una funzione del tempo, calcolata una volta per tutte sulla base del modello dato e delle condizioni iniziali, e quindi rappresenta un controllo in anello aperto.

Siamo invece interessati ad ottenere un controllo ottimo in anello chiuso, che unisca alle proprietà note della retroazione, la minimizzazione del costo dato. Chiederemo che la legge di retroazione sia lineare, ma non necessariamente tempo invariante (si può dimostrare che non si perde così in generalità).

Essendo $u = R^{-1}B^T p$, supporremo dunque che sia lineare la relazione tra co-stato e stato, cioè

$$p(t) = -P(t)x(t), \quad P \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

da cui si ha immediatamente $\dot{p} = -\dot{P}x + -P\dot{x}$. Sostituendo le espressioni sopra trovate, si ottiene

$$-\dot{P} = A^T P + PA + Q - PBR^{-1}B^T P$$

cioè una equazione differenziale matriciale non-lineare (quadratica) in P , detta *equazione differenziale di Riccati* (DRE).

La DRE determina, assieme alla condizione terminale

$p(T) = -Fx(T) = -P(T)x(T)$ cioè $P(T) = F$, l'andamento di $P(t)$ e quindi del controllo ottimo in retroazione $\hat{u} = -R^{-1}B^T P(t)x$.

È possibile dimostrare che la soluzione della DRE valutata al tempo iniziale $P(0)$ dà proprio il costo minimo per il problema dato, cioè $\min_u J = \frac{1}{2}x^T(0)P(0)x(0)$.

Si noti che, essendo sia $P(T)$ che $\dot{P}(T)$ simmetriche, $P(t)$ è simmetrica per ogni T . Essendo il costo minimo mai negativo, deve anche risultare che $P(0)$ è almeno semi-definita positiva.

La soluzione così trovata ha come svantaggio, oltre alla difficoltà della soluzione della equazione differenziale di Riccati, la dipendenza esplicita dal tempo della legge di retroazione ottima (che rende il sistema lineare ma tempo-variante).

Una soluzione piú pratica si ottiene cercando la soluzione al problema del controllo ottimo con orizzonte temporale T molto lungo. In questo caso, la soluzione retrograda di $P(t)$, che vale F al tempo T , può essere illimitata per $t \rightarrow 0$, oppure può oscillare indefinatamente, o infine può portarsi ad un valore costante. Se quest'ultimo è il caso, deve verificarsi in uno dei valori di equilibrio che sono dati dalle soluzioni della *equazione algebrica di Riccati* (ARE):

$$A^T P + PA + Q - PBR^{-1}B^T P = 0.$$

Questo è un sistema di equazioni quadratiche in $n(n+1)/2$ incognite (P è simmetrica), quindi ci possiamo aspettare una pluralità di soluzioni possibili. Una discussione completa delle soluzioni è complessa per queste note: alcune osservazioni risultano però abbastanza intuitive.

Se la coppia A, B è stabilizzabile (se cioè il sottosistema non raggiungibile è asintoticamente stabile), allora esiste un controllo che fa convergere l'indice J ad un valore finito;

In questa ipotesi, tra le soluzioni della ARE ne esiste una s.d.p. che corrisponde al valore limite P_0 cui tende la equazione differenziale di Riccati con $P(T) = F = 0$. Questa soluzione definisce una legge di retroazione costante $u = R^{-1}B^T P_0 x$, che rende minimo l'indice $J = \int_0^\infty \frac{1}{2}(x^T Q x + u^T R u) dt$. Ogni altra soluzione simmetrica e s.d.p. \bar{P} della ARE è “più grande” di P_0 , nel senso che la matrice $\bar{P} - P_0$ è s.d.p.;

Se la matrice Q che pesa gli stati nell'indice è solo semidefinita positiva, vi sono stati o combinazioni di stati la cui evoluzione non influenza il costo. È pertanto possibile che una legge di retroazione ottima possa non essere stabilizzante, se gli stati non pesati da Q sono di per sé instabili, in quanto il costo del controllo necessario a stabilizzarli penalizza l'indice. È peraltro possibile che la ARE abbia soluzioni s.d.p. stabilizzanti, che non sono ottime. Queste potranno essere comunque di grande interesse, come ovvio;

Se scriviamo (come è sempre possibile fare per matrici s.d.p.) $Q = C^T C$ con $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m \geq \text{rank}(C) = \text{rank}(Q)$, e poniamo $y = Cx$, l'indice risulta

$$J = \int_0^\infty \frac{1}{2} (y^T y + u^T R u) dt$$

Stiamo quindi guardando ad un equivalente problema in cui si pesano le evoluzioni di ingresso e uscita per un sistema con terna (A, B, C) ;

Il caso in cui tutta la evoluzione di un particolare stato iniziale stia nel nullo di Q coincide chiaramente con la inosservabilità del corrispondente modo per la coppia (A, C) , se $Q = C^T C$.

Sia la coppia (A, B) stabilizzabile e $Q = C^T C$. Si ha che:

- ▶ la soluzione P_0 ottimizzante della ARE è definita positiva *se e solo se* la coppia (A, C) è osservabile;
- ▶ la soluzione s.d.p ottimizzante P_0 della ARE dà luogo ad una reazione stabilizzante *se e solo se* (A, C) è detettabile (se cioè il sottosistema non osservabile è asintoticamente stabile);
- ▶ se la soluzione ottimizzante P_0 è stabilizzante, allora questa è l'unica soluzione simmetrica s.d.p. della ARE;

Inoltre, per le soluzioni stabilizzanti vale quanto segue. Sia la coppia (A, B) stabilizzabile e $Q = C^T C$:

- ▶ una soluzione P_s simmetrica e s.d.p stabilizzante della ARE, se esiste, è unica, e coincide con il valore limite cui tende la equazione differenziale di Riccati con condizioni finali $P(T) = F$ qualsiasi, purché p.d..
- ▶ tale soluzione esiste se e solo se il sottosistema non osservabile non ha alcun autovalore marginalmente stabile;
- ▶ qualsiasi altra matrice di retroazione stabilizzante dà un costo maggiore di quello ottenuto utilizzando P_s .

Controllo LQR in Tempo Discreto

La formulazione e le soluzioni del problema di regolazione ottima con indice quadratico sono simili anche nel caso di sistemi tempo-discreti. Sia infatti dato il sistema

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) \quad x(0) = x_0, \quad x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m$$

e l'indice

$$J = \frac{1}{2} x^T(T) F x(T) + \sum_{t=0}^T \frac{1}{2} (x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t))$$

con matrice R positiva definita e Q ed F almeno semidefinite positive.

Si dimostra che il controllo ottimo in retroazione è ancora una volta lineare, ed è determinato in questo caso da

$$\hat{u}(t) = K(t)x(t) = - [R + B^T P(t+1)B]^{-1} B^T P(t+1)Ax(t)$$

dove la matrice P è ora la soluzione della *equazione di Riccati alle differenze (all'indietro)*,

$$P(t) = Q + A^T P(t+1)A + A^T P(t+1)B [R + B^T P(t+1)B]^{-1} B^T P(t+1)A$$

con $P(T) = F$.

La soluzione a regime, per $T \rightarrow \infty$, di questa equazione tende anche in questo ad una soluzione della opportuna *equazione algebrica di Riccati*, data da

$$P = Q + A^T P A + A^T P B [R + B^T P B]^{-1} B^T P A$$

La discussione delle proprietà delle soluzioni ottimizzanti e stabilizzanti della ARE, in relazione alle proprietà di stabilizzabilità e detettabilità del sistema (A, B, C) con $Q = C^T C$, sono del tutto analoghe al caso tempo continuo.

Controllo LQR in Matlab

Matlab fornisce alcune funzioni per il calcolo delle matrici del controllo ottimo lineare quadratico. Il comando

```
[K,P,E] = LQR(A,B,Q,R,N)}
```

calcola la matrice di retroazione K tale che $u = -Kx$ minimizza il costo $J = \int_0^\infty (x^T Q x + u^T R u + 2x^T N u) dt$ per il sistema $\dot{x} = Ax + Bu$. La matrice N indica pesi incrociati, ed è posta uguale a zero se non indicata esplicitamente. Come risultato della chiamata si ha anche la matrice P soluzione della ARE, ed il vettore E degli autovalori del sistema in anello chiuso, cioè di $A - BK$.

Si osservi che il comando LQR di Matlab fornisce solo l'unica soluzione simmetrica stabilizzante della ARE, laddove possibile (si guardi a tal proposito la documentazione del comando CARE). Alcuni semplici ma interessanti casi:

Esempio 1)

```
A=[2 0; 0 1]; B = [0;1]; Q=[0 0; 0 1]; R=1; [K,S,E] = lqr(A,B,Q,R);
??? Error using ==> lti/lqr
(A,B) is unstabilizable.
```

Se il sistema non è stabilizzabile, non esiste ovviamente una P_s (anche se esiste una P_0 ed una retroazione ottimizzante).

Esempio 2)

```
A=[-1 0; 0 3]; B = [0;1]; Q=[1 0; 0 0]; R=1; [K,S,E] = lqr(A,B,Q,R)
K =      0      6
S =      0.5000  0
      0      6.0000
E =      -1
      -3
```

Si osserva qui che il comando LQR fornisce la reazione stabilizzante. La reazione ottima sarebbe invece $K = [0 \ 0]$, in quanto il secondo stato è inosservabile per A, C , con $C = [1 \ 0]$, $Q = C^T C$.

Esempio 3)

$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$; $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$; $R = 1$; $[K, S, E] = \text{lqr}(A, B, Q, R)$

??? Error using ==> lti/lqr

(A, B) or $(Q - N/R * N', A - B/R * N')$ has non minimal modes near imaginary axis.

In questo caso, una soluzione stabilizzante della ARE non esiste, anche se il sistema è stabilizzabile. Matlab non fornisce la soluzione ottima, che sarebbe marginalmente stabile.

Allocazione ottima degli autovalori

Sulla base di quanto visto in precedenza, possiamo chiederci in quale posizioni il controllo ottimo LQR tende a piazzare i poli del sistema in anello chiuso.

È innanzitutto importante osservare che gli autovalori del sistema in anello chiuso (cioè di $A - BK_s$, con $K_s = R^{-1}B^T P_s$) sono strettamente legati agli autovalori della matrice Hamiltoniana

$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} A & BR^{-1}B^T \\ Q & -A^T \end{bmatrix}$$

sopra introdotta per la dinamica del sistema stato/co-stato. Infatti, applicando una trasformazione di similarità definita dalla matrice

$$T = \begin{bmatrix} I & 0 \\ P_s & I \end{bmatrix},$$

con P_s soluzione stabilizzante della ARE, si ottiene

$$\begin{aligned}
 T\mathcal{H}T^{-1} &= \begin{bmatrix} I & 0 \\ P_s & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & BR^{-1}B^T \\ Q & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ -P_s & I \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} A - BR^{-1}B^T P_s & BR^{-1}B^T \\ P_s A + Q - P_s BR^{-1}B^T P_s + A^T P_s & -P_s BR^{-1}B^T - A^T \end{bmatrix} = \\
 &\begin{bmatrix} A - BK_s & BR^{-1}B^T \\ 0 & -(A - BK_s)^T \end{bmatrix},
 \end{aligned}$$

da cui si deduce che gli autovalori di \mathcal{H} comprendono quelli di $A - BK_s$ (che sono stabili, per definizione) ed i loro simmetrici rispetto all'asse immaginario.

Sistemi SISO

Consideriamo adesso un sistema strettamente proprio ad un solo ingresso ed una sola uscita

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + bu \\ y &= cx\end{aligned}$$

la cui funzione di trasferimento sia $G(s) = c(sI - A)^{-1}b = \frac{n(s)}{d(s)}$. Siano n e m rispettivamente il numero dei poli e degli zeri di $g(s)$. Scegliamo come matrice di peso dello stato $Q = c^T c$, di modo che l'indice obiettivo vale

$$J = \int_0^{\infty} (y^2 + ru^2) dt.$$

Il controllo ottimo in retroazione vale in questo caso

$$u = -\frac{1}{r} b^T P_s x$$

dove P_s è la soluzione stabilizzante della ARE

$$PA + A^T P - \frac{1}{r} P b b^T P + Q = 0$$

Gli autovalori della matrice Hamiltoniana sono le soluzioni di

$$\Delta(s) = \det \begin{bmatrix} sI - A & -\frac{bb^T}{r} \\ -c^T c & sI + A^T \end{bmatrix} = 0$$

Applicando la regola del determinante di una matrice a blocchi:

$$\det \begin{bmatrix} F & J \\ H & G \end{bmatrix} = \det F \det[G - HF^{-1}J], \quad F \text{ nonsingolare}$$

si ottiene

$$\Delta(s) = \det(sI - A) \det[I + c^T c(sI - A)^{-1} b r^{-1} b^T (sI + A^T)^{-1}] \det(sI + A^T)$$

Osservando infine che $g(s) = \frac{n(s)}{d(s)} = \frac{c \operatorname{adj}(sI - A)^{-1} b}{\det(sI - A)}$, si trova

$$\Delta(s) = d(s)d(-s) + \frac{1}{r}n(s)n(-s).$$

Da questa relazione, che conferma come gli autovalori della Hamiltoniana sono simmetrici rispetto all'asse immaginario oltreché all'asse reale, si ottiene una chiara interpretazione della posizione ottima dei poli in anello chiuso al variare del costo r del controllo.

Applicando le regole del luogo delle radici, infatti, è immediato osservare che per

$$\Delta(s) = d(s)d(-s) + \frac{1}{r}n(s)n(-s)$$

vale:

- ▶ quando $r \rightarrow \infty$, le radici della $\Delta(s) = 0$ coincidono con le radici di $d(s)$ (poli in anello aperto del sistema) e di $d(-s)$ (i simmetrici rispetto all'asse immaginario). Gli autovalori del sistema in anello chiuso che usa una retroazione stabilizzante ottima, quando il costo del controllo è molto alto, tendono quindi agli autovalori del sistema stesso in anello aperto se stabili, oppure al loro simmetrico se instabili;
- ▶ quando $r \rightarrow 0$, le radici della $\Delta(s) = 0$ coincidono con le radici di $n(s)$ (zeri del sistema) e di $n(-s)$ (i simmetrici). Inoltre, un numero di rami del luogo pari alla differenza poli-zeri $2(n - m)$ tende a infinito, lungo asintoti che dividono il piano in settori uguali. Tra questi, solo quelli a parte reale negativa sono poli del sistema in anello chiuso.

Più precisamente, possiamo scrivere per le radici che tendono a infinito la relazione

$$s^{2(n-m)} = (-1)^{n-m+1} \frac{b_m^2}{r}$$

con $n(s) = b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0$. Le radici stanno quindi su un cerchio di raggio $(b_m^2/r)^{1/2(n-m)}$, in una disposizione angolare caratteristica in cui gli asintoti formano angoli di $\pi/(n-m)$ tra loro, nota dalla teoria dei filtri come “Butterworth”.

Esempio

Si consideri un sistema costituito da due masse m_1, m_2 in moto rettilineo, collegate tra loro da una molla di costante k . Sia u la forza agente su una massa, e sia y la posizione della seconda massa. La funzione di trasferimento tra queste grandezze è data da

$$g(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{k}{s^2[m_1 m_2 s^2 + k(m_1 + m_2)]},$$

ovvero, se (in opportune unità di misura) $m_1 = m_2 = 1$ e $k = 1$,

$$g(s) = \frac{1}{s^2(s^2 + 2)}.$$

Sia l'indice $J = \int_0^\infty (y^2 + ru^2) dt$, allora il luogo simmetrico delle radici è definito dalla equazione

$$1 + \frac{1}{r} \frac{1}{s^4(s^2 + 2)^2} = 0$$

e possiede otto asintoti, spazati di $\pi/4$