

# Robotica II (Fondamenti di Automatica - IV)

Tratti dal corso tenuto dal Prof. Antonio Bicchi

Versione Provvisoria del 26 Febbraio 2009



# Indice

<b>1</b>	<b>Controllo di Manipolatori</b>	<b>5</b>
1.1	Controllo di Posizione di Manipolatori con dinamica certa . . .	5
1.1.1	Controllo a Coppia Calcolata nello spazio dei giunti . . .	5
1.1.2	Controllo a Coppia Calcolata nello spazio operativo . . .	6
1.1.3	Esempi . . . . .	8
1.2	Controllo di Manipolatori con incertezze sulla dinamica . . . . .	8
1.2.1	Robustezza del controllo a coppia calcolata . . . . .	9
1.2.2	Controllo alla Arimoto o PD ai giunti con compensazione di gravità . . . . .	11
1.2.3	Controllo Robusto o a Struttura Variabile . . . . .	14
1.2.4	Controllo Adattivo alla Craig . . . . .	16
1.2.5	Controllo Adattivo alla Li-Slotine . . . . .	19
<b>2</b>	<b>Sistemi non lineari.</b>	<b>23</b>
2.1	Introduzione . . . . .	23
2.1.1	Proprietà strutturali e nonlinearità intrinseche di un sistema. . . . .	24
2.2	Proprietà dei sistemi non lineari . . . . .	24
2.2.1	Stabilità . . . . .	24
2.2.2	Controllabilità . . . . .	25
2.2.3	Osservabilità . . . . .	27
2.2.4	Stabilizzabilità . . . . .	28
<b>3</b>	<b>Sistemi Nonlineari: Scatola degli attrezzi matematici</b>	<b>33</b>
3.1	Distribuzioni e Codistribuzioni . . . . .	43
3.2	Raggiungibilità dei Sistemi Nonlineari . . . . .	51
3.3	Osservabilità . . . . .	60
<b>4</b>	<b>Controllo di Sistemi Nonlineari</b>	<b>67</b>
4.1	Introduzione . . . . .	67
4.2	Linearizzazione Input-Stati . . . . .	67
4.2.1	Procedura Operativa (Sistemi SISO) . . . . .	77
4.2.2	Linearizzazione Ingresso-Uscita . . . . .	79

4.3	Inseguimento di traiettorie . . . . .	86
4.4	Linearizzazione in retroazione MIMO . . . . .	88
4.5	Pendolo inverso . . . . .	93
4.5.1	Modello fisico . . . . .	93
4.5.2	Linearizzazione approssimata . . . . .	94
4.5.3	Linearizzazione esatta . . . . .	95
4.5.4	Confronto tra i due metodi di linearizzazione . . . . .	97
4.5.5	Linearizzazione in feedback . . . . .	98
4.5.6	Linearizzazione standard . . . . .	98
4.5.7	Controllo con $K=12.5$ e $K=100$ . . . . .	99
4.5.8	Conclusioni . . . . .	99

# Capitolo 1

## Controllo di Manipolatori

### 1.1 Controllo di Posizione di Manipolatori con dinamica certa

In questa sezione studieremo approcci al controllo di posizione di un manipolatore la cui dinamica

$$B(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = Y(q, \dot{q}, \ddot{q})\pi = \tau \quad (1.1)$$

risulti conosciuta con precisione assoluta. In particolare, oltre alla matrice regressore  $Y(q, \dot{q}, \ddot{q})$ , si supponrà conosciuto il vettore  $\pi$  dei parametri dinamici del manipolatore, situazione non sempre garantita. Si consideri quale esempio un manipolatore il cui compito sia di palettizzare con elevata precisione di posizionamento carichi variabili casualmente: in questo caso è facile convincersi che il vettore  $\pi$  risulta variabile nel tempo in funzione dei carichi a cui il manipolatore è sottoposto, e quindi risulti pressochè sconosciuto durante il moto. Al contrario, un esempio di compito a  $\pi$  costante può essere il compito di vernicitura spray di una carenatura di automobile.

Infine, supporremo che il manipolatore non interagisca con l'ambiente esterno (wrench esterni  $F_e = (f_e, \tau_e)^T = 0$ ), rimandando l'esposizione di tecniche di controllo adottabili in questo caso, dette tecniche di *controllo dell'interazione*, alla sezione relativa.

#### 1.1.1 Controllo a Coppia Calcolata nello spazio dei giunti

Si consideri il problema di controllare le posizioni di giunto  $q = \langle q_i \rangle_{i=1 \dots N}^T$  del manipolatore retto dalla dinamica (1.1) affinché inseguano riferimenti  $q_d = \langle q_{d-i} \rangle_{i=1 \dots N}^T$  di posizione.

Tale problema può essere risolto scegliendo un vettore  $\tau$  di controllo nella forma

$$\tau = B(q) \left( \ddot{q}_d + K_v \dot{\tilde{q}} + K_p \tilde{q} \right) + C(q, \dot{q}) \dot{q} + G(q) \quad (1.2)$$

dove  $q_d$  rappresenta il vettore delle posizioni di riferimento per i giunti,  $K_v$  e  $K_p$  sono matrici diagonali  $> 0$ , e  $\tilde{q} \stackrel{def}{=} q_d - q$ . Infatti, sostituendo la (1.2) nella (1.1)

$$B(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = B(q) \left( \ddot{q}_d + K_v \dot{\tilde{q}} + K_p \tilde{q} \right) + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q)$$

e compiendo i passaggi

$$\begin{aligned} B(q)\ddot{q} &= B(q) \left( \ddot{q}_d + K_v \dot{\tilde{q}} + K_p \tilde{q} \right) \rightarrow \\ B(q) \left( \ddot{\tilde{q}} + K_v \dot{\tilde{q}} + K_p \tilde{q} \right) &= 0 \end{aligned}$$

si ottiene, data l'invertibilità della matrice dinamica  $B(q)$ ,

$$\ddot{\tilde{q}} + K_v \dot{\tilde{q}} + K_p \tilde{q} = 0$$

che rappresenta la dinamica dell'errore di posizionamento. Tale dinamica può essere resa stabile asintoticamente scegliendo in sede di progetto le matrici dei guadagni  $K_v$ ,  $K_p$  affinché i polinomi  $Is^2 + K_v s + K_p$ , con  $I = eye(N)$ , risultino di Hurwitz.

In definitiva, il controllo proposto, del quale riportiamo lo schema di principio in fig.1.1, mostra come la perfetta conoscenza del modello dinamico di un manipolatore ne consenta la linearizzazione perfetta garantendo l'allocatione precisa dei poli del sistema a ciclo chiuso. È quindi garantita la possibilità di ottenere inseguimenti di posizione di giunto con esiguo tempo di assestamento e errore a regime nullo.

### 1.1.2 Controllo a Coppia Calcolata nello spazio operativo

Si vuole determinare la coppia di controllo  $\tau$  che garantisca l'inseguimento asintotico di una posizione cartesiana e angolare  $X_d$  da parte della posizione  $X$  dell'end-effector di un manipolatore. A tal fine è necessario determinare preliminarmente l'equazione della dinamica del manipolatore nello spazio operativo.

- **Dinamica di un Manipolatore nello Spazio Operativo**

Si consideri per semplicità il caso in cui il manipolatore in questione sia *quadrato* (i.e.  $J(q) \in R^{N \times N}$ ), e che durante il moto il manipolatore

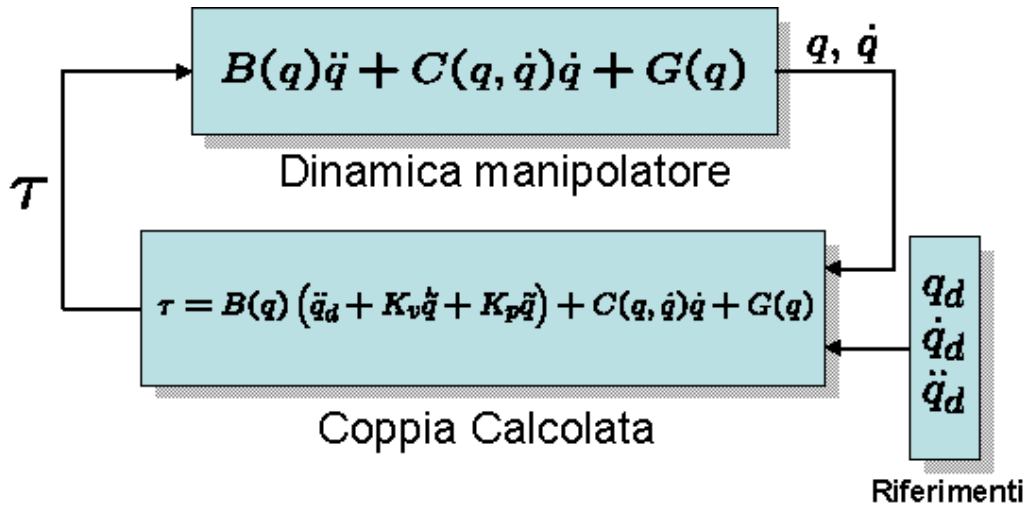


Figura 1.1: Sistema di controllo a coppia calcolata.

non si trovi in una configurazione singolare (i.e. esiste  $J^{-1}(q), \forall q$ ). In tal modo partendo dall'espressione della cinematica differenziale

$$\dot{X} = J(q)\dot{q}$$

si giunge, dopo derivazione e inversione dello Jacobiano, all'espressione della accelerazione di giunto

$$\ddot{q} = J^{-1}(q) (\ddot{X} - \dot{J}(q)\dot{q}) \quad (1.3)$$

funzione della accelerazione  $\ddot{X}$  dell'end-effector. Sostituendo la (1.3) nella (1.1) si ottiene

$$B(q)J^{-1}(q) (\ddot{X} - \dot{J}(q)\dot{q}) + h(q, \dot{q}) = \tau \quad (1.4)$$

dove  $h(q, \dot{q}) = C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q)$ .

A questo punto, al fine di ottenere l'espressione della dinamica nello spazio operativo è opportuno utilizzare il legame (in questo caso invertibile) tra le forze generalizzate  $F_{e-e}$  che agiscono sull'end-effector e le relative coppie  $\tau_g$  ai giunti

$$\tau_g = J^T(q)F_{e-e},$$

basti notare infatti che le coppie di controllo  $\tau$  ai giunti generano una forza all'end-effector  $F$  esprimibile con la

$$F = J^{-T}(q)\tau.$$

Quindi, premoltiplicando i termini della eq. (1.4) per  $J^{-T}(q)$ , si ottiene l'equazione della dinamica del manipolatore nello spazio operativo

$$\begin{aligned} J^{-T}(q)B(q)J^{-1}(q)\left(\ddot{X} - \dot{J}(q)\dot{q}\right) + J^{-T}(q)h(q, \dot{q}) &= J^{-T}(q)\tau \rightarrow \\ \Omega^{-1}(q)\ddot{X} + h(X, \dot{X}) &= F \end{aligned} \tag{1.5}$$

dove  $\Omega(q) = J(q)B^{-1}(q)J^T(q)$  viene detto *tensore di mobilità* del manipolatore, e  $h(X, \dot{X}) = J^{-T}(q)h(q, \dot{q}) - \Omega^{-1}(q)\dot{J}(q)\dot{q}$ .

Alla stregua di quanto esposto in precedenza, scegliamo la forza  $F$  linearizzante nella forma

$$F = \Omega^{-1}(q)\left(\ddot{X}_d + K_v\dot{\tilde{X}} + K_p\tilde{X}\right) + h(X, \dot{X})$$

che sostituita nella (1.5) porta alla dinamica dell'errore di posizione  $\tilde{X} = X_d - X$  nello spazio operativo

$$\ddot{\tilde{X}} + K_v\dot{\tilde{X}} + K_p\tilde{X} = 0,$$

che può essere resa asintoticamente stabile mediante una scelta opportuna delle matrici  $K_v$ ,  $K_p$ .

Infine, la coppia di controllo ai giunti risulta

$$\tau = J^T(q)F = J^T(q)\left(\Omega^{-1}(q)\left(\ddot{X}_d + K_v\dot{\tilde{X}} + K_p\tilde{X}\right) + h(X, \dot{X})\right).$$

### 1.1.3 Esempi

## 1.2 Controllo di Manipolatori con incertezze sulla dinamica

In questa sezione si esamina il problema di controllare in posizione un manipolatore nel caso in cui siano presenti incertezze nel vettore dei parametri dinamici  $\pi$ . In particolare, verranno esposti approcci al controllo sia di tipo *robusto*, che cioè eliminano l'influenza degli errori di modellazione sull'errore a regime mediante una opportuna scelta delle coppie di controllo  $\tau$ , sia di tipo *adattivo*, questi ultimi consentendo di eliminare gli errori di posizione a regime dovuti alle incertezze di modellazione grazie a opportune scelte per le evoluzioni temporali delle stime dei parametri dinamici.



### 1.2.1 Robustezza del controllo a coppia calcolata

Abbiamo mostrato in 1.1.1 che la perfetta conoscenza del modello dinamico di un manipolatore ne consente la linearizzazione esatta in retroazione, e quindi la scelta diretta di un opportuno controllo (1.2) che garantisce l'inseguimento asintotico di un riferimento di posizione ai giunti. Scopo della trattazione che ci accingiamo ad esporre è quello di evidenziare i disturbi che nascono da errori sulla stima dei parametri dinamici di un manipolatore e che affliggono la dinamica dell'errore di posizione, e di mostrare nel paragrafo successivo una variante robusta della coppia calcolata che permette di eliminare tali disturbi.

Scegliamo come coppia di controllo la

$$\tau = \bar{B}(q) (\ddot{q}_d + K_v \dot{\tilde{q}} + K_p \tilde{q}) + \bar{C}(q, \dot{q}) \dot{q} + \bar{G}(q) \quad (1.6)$$

dove  $\bar{B}(q)$ ,  $\bar{C}(q, \dot{q})$  e  $\bar{G}(q)$  rappresentano le stime delle matrici dinamica, di Coriolis e del vettore delle coppie gravitazionali del manipolatore. Sostituendo la (1.6) nella (1.1), e compiendo gli stessi passaggi riportati in 1.1.1 si ottiene

$$\ddot{\tilde{q}} + K_v \dot{\tilde{q}} + K_p \tilde{q} = \bar{B}(q)^{-1} (\tilde{B}(q) \ddot{q} + \tilde{C}(q, \dot{q}) \dot{q} + \tilde{G}(q)) \quad (1.7)$$

dove

$$\begin{cases} \tilde{B}(q) = B(q) - \bar{B}(q), \\ \tilde{C}(q, \dot{q}) = C(q, \dot{q}) - \bar{C}(q, \dot{q}), \\ \tilde{G}(q) = G(q) - \bar{G}(q) \end{cases}$$

rappresentano le matrici errore di stima. Si nota che la dinamica dell'errore nella (1.7) risulta eccitata da un disturbo  $\eta(t) = \bar{B}(q)^{-1} (\tilde{B}(q) \ddot{q} + \tilde{C}(q, \dot{q}) \dot{q} + \tilde{G}(q))$  funzione a sua volta dello stesso errore. Quest'ultima osservazione implica dunque che non si può dire nulla riguardo la stabilità del sistema se non si entra nel dettaglio delle particolari stime  $\tilde{B}(q)$ ,  $\tilde{C}(q, \dot{q})$ ,  $\tilde{G}(q)$  utilizzate. In presenza di errori di modello dobbiamo quindi porci i problemi seguenti

- **Stabilità Robusta:** Quali sono i margini di errore sulle stime che consentono di affermare la stabilità del sistema?
- **Prestazione Robusta:** Quali sono le prestazioni in presenza di tali errori? Ovvero, dato un livello massimo di degrado delle prestazioni, entro quali margini di errore riesco a garantirlo?
- **Sintesi Robusta:** È possibile realizzare un controllore più robusto?

Nel nostro specifico caso il sistema (1.7) può essere considerato nella forma che presenta due sistemi dinamici che si “eccitano” a vicenda essendo l’uno l’ingresso di disturbo dell’altro: la dinamica dell’errore di posizione, e il vettore  $\eta(t)$

$$\begin{cases} \ddot{\tilde{q}} + K_v \dot{\tilde{q}} + K_p \tilde{q} = \eta(t) \\ \eta(t) = \bar{B}(q)^{-1}(\tilde{B}(q)\ddot{q} + \tilde{C}(q, \dot{q})\dot{q} + \tilde{G}(q)). \end{cases} \quad (1.8)$$

Ci interesseremo del verificare che il sistema (1.8) sia stabile secondo la seguente definizione di stabilità

- **Stabilità Ingresso/Uscita:**

Un sistema si dice I/O (Ingresso/Uscita) stabile se ad ogni funzione di ingresso limitata in una opportuna norma

$$\|u(t)\|_p = \left( \int_0^\infty |u(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p \leq \infty \quad (1.9)$$

corrisponde una uscita limitata nella stessa norma.

Considereremo in particolare  $p = \infty$ , che impone  $\|u(t)\|_\infty = \sup_t |u(t)|$ . Dalla prima definizione della (1.8), se le matrici  $K_v, K_p$  risultano positive definite, si giunge alle disequaglianze

$$\begin{cases} \|\tilde{q}\|_\infty \leq \beta_1 \|u\|_\infty, \\ \|\dot{\tilde{q}}\|_\infty \leq \beta_2 \|u\|_\infty, \end{cases}$$

mentre la seconda espressione

$$f(q_d, \dot{q}_d, \ddot{q}_d, \tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) = \bar{B}(q)^{-1}(\tilde{B}(q)\ddot{q} + \tilde{C}(q, \dot{q})\dot{q} + \tilde{G}(q)) = \eta(t)$$

impone la disequaglianza

$$\|u\|_\infty \leq \alpha_1 + \alpha_2 \|\tilde{q}\|_\infty + \alpha_3 \|\dot{\tilde{q}}\|_\infty + \alpha_4 \|\dot{\tilde{q}}\|_\infty^2$$

con  $\alpha_i = \alpha_i(q_d, \dot{q}_d, \ddot{q}_d) = \alpha_i(q_d, \bar{B}(q), \bar{C}(q, \dot{q}), \bar{G}(q))$ .

Da queste relazioni, si ottiene

$$\begin{cases} \|\tilde{q}\|_\infty \leq \beta_1 \alpha_1 + \beta_1 \alpha_2 \|\tilde{q}\|_\infty + \beta_1 \alpha_3 \|\dot{\tilde{q}}\|_\infty + \beta_1 \alpha_4 \|\dot{\tilde{q}}\|_\infty^2, \\ \|\dot{\tilde{q}}\|_\infty \leq \beta_2 \alpha_1 + \beta_2 \alpha_2 \|\tilde{q}\|_\infty + \beta_2 \alpha_3 \|\dot{\tilde{q}}\|_\infty + \beta_2 \alpha_4 \|\dot{\tilde{q}}\|_\infty^2. \end{cases} \quad (1.10)$$

A seconda dei valori numerici che è possibile ottenere per le limitazioni  $\alpha_i, \beta_i$  (a loro volta dipendenti dalla bontà delle stime) le (1.10) rappresentano due luoghi nel piano  $(\|\tilde{q}\|_\infty, \|\dot{\tilde{q}}\|_\infty)$  del tipo riportato in fig.1.2.

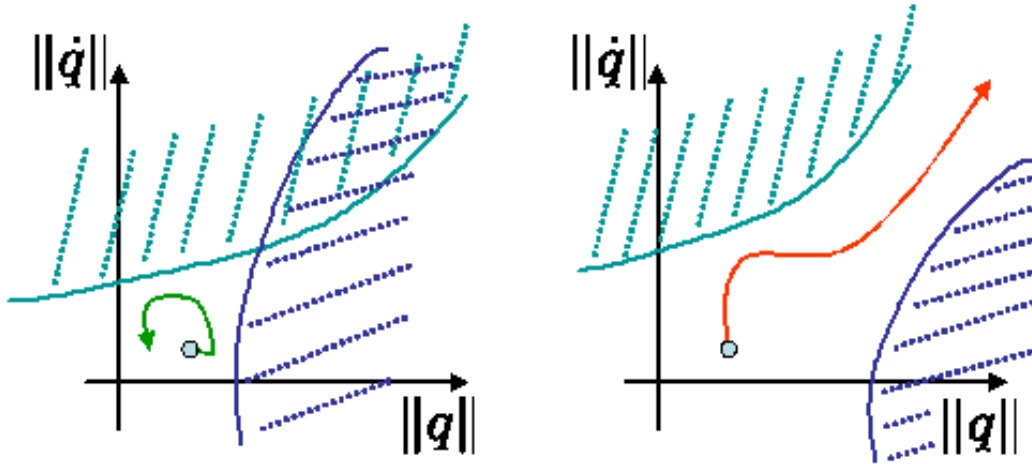


Figura 1.2: Possibili evoluzioni del vettore  $(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}})^T$ . (Sinistra): Le stime delle matrici sono tali da mantenere l'errore limitato, ma non nullo. (Destra): Le stime delle matrici non sono tali da garantire una evoluzione limitata dell'errore di posizione, che risulta quindi instabile.

### 1.2.2 Controllo alla Arimoto o PD ai giunti con compensazione di gravità

In questo paragrafo verrà esposto il controllo di posizione Proporzionale-Derivativo (PD) dei giunti di un manipolatore supposta la unica conoscenza esatta, e quindi la compensazione, delle coppie gravitazionali non lineari  $G(q)$  che compaiono nella dinamica (1.1).

Al fine di giungere alla espressione della coppia  $\tau$  di controllo PD verrà utilizzata la tecnica di controllo alla Lyapunov, previa definizione di una “energia”  $V(t) > 0$ , funzione della velocità dei giunti  $\dot{q}$  (il manipolatore sotto l'azione del controllo deve tendere asintoticamente ad una configurazione di equilibrio  $\dot{q} = 0$ ), e dell'errore di posizione  $\tilde{q} = q_d - q$  (l'errore di posizione a regime deve essere nullo), nella forma

$$V(t) = \frac{1}{2} \dot{q}^T B(q) \dot{q} + \frac{1}{2} \tilde{q}^T K_p \tilde{q}$$

dove l'energia cinetica  $T = \frac{1}{2} \dot{q}^T B(q) \dot{q} > 0$ , per  $\dot{q} \neq 0$ , e  $K_p > 0$ .

A questo punto si derivi la  $V(t)$  e, sfruttando la  $\dot{\tilde{q}} = \dot{q}_d - \dot{q} = -\dot{q}$  vera se  $q_d$  è costante (traiettorie di riferimento punto-punto) e l'espressione per il

termine  $B(q)\ddot{q}$  che compare nella (1.1), si giunge a

$$\begin{aligned}\dot{V}(t) &= \dot{q}^T (\tau - C(q, \dot{q})\dot{q} - G(q)) + \frac{1}{2}\dot{q}^T \dot{B}(q)\dot{q} - \tilde{q}^T K_p \dot{q} \rightarrow \\ \dot{V}(t) &= \frac{1}{2}\dot{q}^T (\dot{B}(q) - 2C(q, \dot{q}))\dot{q} + \dot{q}^T (\tau - G(q)) - \tilde{q}^T K_p \dot{q} \rightarrow \\ \dot{V}(t) &= \dot{q}^T (\tau - G(q)) - \tilde{q}^T K_p \dot{q}\end{aligned}\quad (1.11)$$

dove abbiamo utilizzato la nota proprietà  $\frac{1}{2}\dot{q}^T (\dot{B}(q) - 2C(q, \dot{q}))\dot{q} = 0$  che deriva dal principio di Hamilton di conservazione dell'energia.

Si sceglia a questo punto la coppia di controllo Proporzionale-Derivativa

$$\tau = K_p \tilde{q} - K_v \dot{q} + G(q) \quad (1.12)$$

e la sostituisca nella (1.11), ottenendo il risultato

$$\dot{V}(t) = -\dot{q}^T K_v \dot{q}$$

che impone  $\dot{V}(t) \leq 0$ . Questo risultato indica soltanto che il sistema tende ad una posizione di equilibrio ( $\dot{q} = 0$ ), ma per verificare se tale posizione di equilibrio risulta caratterizzata da un errore di posizione  $\tilde{q} = 0$  è necessario usufruire del lemma di Krasowskii.

A tal fine si sostituisca la (1.12) nella (1.1)

$$\begin{aligned}B(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) &= K_p \tilde{q} - K_v \dot{q} + G(q) \rightarrow \\ B(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} &= K_p \tilde{q} - K_v \dot{q}\end{aligned}$$

e, notando che in una configurazione di equilibrio si verifica  $\ddot{q} = 0$ , si ottiene

$$K_p \tilde{q} = 0$$

che impone, data l'invertibilità della matrice  $K_p$ , un errore a regime  $\tilde{q}$  nullo. Il controllo PD proposto (si veda fig.1.3) garantisce quindi l'inseguimento asintotico di traiettorie  $q_d$  punto-punto.

A questo livello, è necessario puntualizzare il fatto che la presenza di non linearità derivanti dal "disturbo"  $G(q)$  non esclude la asintotica stabilità di un controllo PD senza compensazioni gravitazionali, e che quindi ha l'espressione

$$\tau = -K_v \dot{q} + K_p \tilde{q}. \quad (1.13)$$

Per convincersi di ciò senza addentrarci in una dimostrazione rigorosa, basti pensare a che il controllo PD opera inserendo rigidzze  $K_p$  e viscosità  $K_v$  "virtuali" a livello di giunto: la forza elastica  $K_p \tilde{q}$  costringe la posizione di giunto  $q$  a inseguire il riferimento  $q_d$ , mentre la forza di attrito  $K_v \dot{q}$  tende a

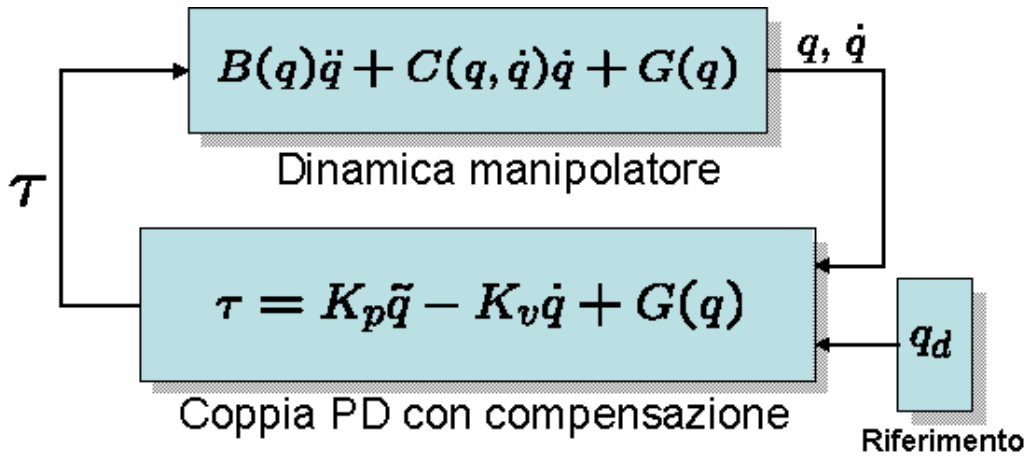


Figura 1.3: Schema di controllo di posizione ai giunti di tipo Proporzionale-Derivativo con compensazione di Gravità.

dissipare l'energia elastica accumulata durante l'evoluzione, e quindi a smorzare le oscillazioni (si veda fig.1.4).

Da questo si deduce che, utilizzando la (1.13) quale controllo, gli errori di posizione a regime dovuti alle non linearità possono essere resi piccoli a piacere mediante una opportuna scelta delle matrici  $K_p$ ,  $K_v$ . Inserendo inoltre un termine di compensazione integrale nella (1.13)

$$\tau = -K_v \dot{q} + K_p \tilde{q} + K_I \int_0^t \tilde{q}(t) dt,$$

l'asintotica convergenza a zero dell'errore di posizione  $\tilde{q}$  è garantita.

Per riallacciarsi a quanto esposto nella sezione precedente, si noti che il controllo PD con compensazione di gravità proposto è nella forma (1.6) dove sono utilizzate le seguenti approssimazioni delle matrici dinamica, di Coriolis e gravitazionale

$$\begin{cases} \bar{B}(q) = I, \\ \bar{C}(q, \dot{q}) = 0, \\ \bar{G}(q) = G(q). \end{cases}$$

In questo caso dunque è garantita l'asintotica stabilità del sistema perturbato (1.7).

Infine, è da notarsi che la scelta della matrice  $K_v$  nella (1.12) ha la proprietà di rendere più o meno elevata la velocità di convergenza a zero dell'errore di posizione  $\tilde{q}$  da parte del manipolatore. Essa infatti influenza direttamente la funzione quadratica  $\dot{V}(t)$ , e impone che a parità di  $\dot{q}$  più i

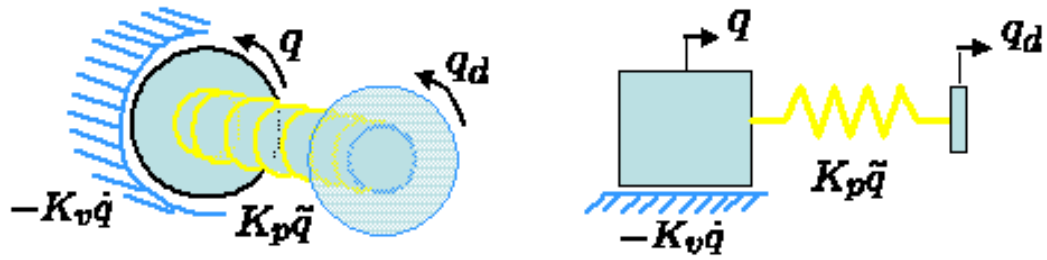


Figura 1.4: Schema esemplificativo del controllo di posizione PD senza compensazione di gravità, nel caso di giunto rotoidale (sinistra) e prismatico (destra). Sono evidenziati la molla e lo smorzatore inseriti virtualmente a livello di giunto dal controllo, e che garantiscono l'asintotica stabilità del sistema ad anello chiuso.

termini sulla diagonale di  $K_v$  risultano elevati, più risulta elevata la velocità di convergenza a zero dell'errore di posizione.

### 1.2.3 Controllo Robusto o a Struttura Variabile

Si prenda in considerazione l'espressione (1.6) del controllo a coppia calcolata con errori di stima, e si aggiunga ad essa un termine "correttivo"  $\bar{B}(q)\Delta(t)$  ottenendo

$$\tau = \bar{B}(q)\ddot{q}_d + \bar{C}(q, \dot{q})\dot{q} + \bar{G}(q) + \bar{B}(q) \left( K_v \dot{\tilde{q}} + K_p \tilde{q} + \Delta(t) \right), \quad (1.14)$$

la cui scelta di  $\Delta(t)$  ci riserbiamo di farla in modo da ottenere la prestazione desiderata (cioè l'inseguimento asintotico del riferimento di posizione  $q_d(t)$ ). Sostituita la (1.14) nella (1.1) si ottiene, dopo alcuni passaggi, la dinamica dell'errore

$$\ddot{\tilde{q}} + K_v \dot{\tilde{q}} + K_p \tilde{q} = \bar{B}(q)^{-1} \left( \tilde{B}(q)\ddot{q} + \tilde{C}(q, \dot{q})\dot{q} + \tilde{G}(q) \right) - \Delta(t) = \eta(t) - \Delta(t) \quad (1.15)$$

in cui  $\eta(t) = \bar{B}(q)^{-1} \left( \tilde{B}(q)\ddot{q} + \tilde{C}(q, \dot{q})\dot{q} + \tilde{G}(q) \right)$ , introdotto in precedenza, è assimilabile ad un disturbo cui  $\Delta$  deve opporsi. È da notarsi che  $\eta(t)$  è in modulo tanto più grande (nel caso peggiore) quanto più grandi sono gli errori relativi di modello  $\bar{B}(q)^{-1}\tilde{B}(q)$ ,  $\bar{B}(q)^{-1}\tilde{C}(q, \dot{q})$  e  $\bar{B}(q)^{-1}\tilde{G}(q)$ . Inoltre,  $\eta(t)$  dipende dalle traiettorie  $q(t)$  seguite dal braccio, essendo maggiore (nel caso peggiore) quanto più esse risultino veloci ed accidentate. Le  $q(t)$  a loro volta dipendono dai riferimenti  $q_d(t)$ , ma anche dalla stessa scelta di  $\Delta(t)$  ancora da farsi.

Verrà comunque

$$\|\eta(t)\| \leq \alpha \|\Delta(t)\| + \beta, \quad (1.16)$$

dove  $\alpha = \alpha(q_d(t), \bar{B}(q)^{-1} \tilde{B}(q), \dots)$ ,  $\beta = \beta(q_d(t), \bar{B}(q)^{-1} \tilde{B}(q), \dots)$ . Supporremo di scegliere modelli e traiettorie tali per cui  $\alpha > 1$ .

Si esprima il sistema (1.15) in forma di stato

$$\dot{\xi} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -K_p & -K_v \end{pmatrix} \xi + \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix} (\eta(t) - \Delta(t)),$$

con  $\xi = (\tilde{q}, \dot{\tilde{q}})^T$ , o in forma compatta

$$\dot{\xi} = A\xi + b(\eta(t) - \Delta(t)). \quad (1.17)$$

Sappiamo che il sistema, se non eccitato, è stabile asintoticamente. Data infatti una matrice  $Q \in \mathbf{R}^{2n \times 2n}$  positiva definita, sappiamo che esiste una matrice  $P \in \mathbf{R}^{2n \times 2n}$  positiva definita tale che

$$A^T P + P A = -Q$$

cosicchè, per il sistema

$$\dot{\xi} = A\xi,$$

la candidata  $V(t) = \xi^T P \xi$  è una funzione di Lyapunov, infatti calcolandone la derivata si ottiene

$$\dot{V}(t) = \xi^T P \dot{\xi} + \dot{\xi}^T P \xi = \xi^T (A^T P + P A) \xi = -\xi^T Q \xi < 0.$$

Utilizzando la stessa candidata per il sistema perturbato (1.17), si ottiene

$$\dot{V}(t) = -\xi^T Q \xi + 2\xi^T P b(\eta(t) - \Delta(t))$$

in cui il termine  $2\xi^T P b(\eta(t) - \Delta(t))$  può in generale avere segno qualsiasi, e non è più quindi garantita essere negativa definita. La tecnica di progetto "alla Lyapunov" consiste nell'applicare un  $\Delta(t)$  tale per cui si possa mostrare  $\dot{V}(t) < 0$ .

Per far ciò, definito il termine  $w(t) = b^T P \xi(t)$ , si considera il prodotto scalare  $w(t)^T (\eta(t) - \Delta(t))$  (si veda FIGURA). Il caso peggiore si ha quando  $\eta(t)$  è allineato a  $w(t)$ , cioè  $w(t)^T \eta(t) = \|w(t)\| \|\eta(t)\|$  è massimo.

Si sceglie quindi

$$\Delta(t) = \begin{cases} \rho(t) \frac{w(t)}{\|w(t)\|} & , \|w(t)\| \neq 0 \\ 0 & , \|w(t)\| = 0 \end{cases} \quad (1.18)$$

che impone  $\|\Delta(t)\| = \rho(t)$  per  $\|w(t)\| \neq 0$ .

Dalla (1.18), e scelta la funzione maggiorante  $\rho(t) \geq \eta(t)$  si ottiene

$$\begin{cases} w(t)^T(\eta(t) - \Delta(t)) \leq -\|w(t)\|(\rho(t) - \|\eta(t)\|) < 0 & , \|w(t)\| \neq 0 \\ w(t)^T(\eta(t) - \Delta(t)) = 0 & , \|w(t)\| = 0 \end{cases}$$

Da notare che una opportuna scelta per la funzione maggiorante può essere trovata sfruttando la (1.16)

$$\rho(t) \geq \alpha\|\Delta\| + \beta = \alpha\rho(t) + \beta$$

che conduce alla

$$\rho(t) \geq \frac{\beta}{1-\alpha} > 0,$$

significativa vista l'ipotesi preliminare  $\alpha < 1$ .

Si noti che la legge di controllo  $\Delta(t) = \rho(t)\frac{w(t)}{\|w(t)\|}$  è di tipo discontinuo, essendo infatti proporzionale alla derivata di un cono  $C = \sqrt{w(t)^T w(t)} \in \mathbf{R}^n$ . In  $\mathbf{R}^1$ ,  $\Delta$  è la funzione  $sign(w(t)) = \frac{w(t)}{|w(t)|} = \pm 1$ , che rappresenta il controllo *tutto-niente* (o *bang-bang*, o *a relay*).

Possono infine insorgere fenomeni di *chattering* nelle vicinanze della singolarità  $w(t) = 0$  che devono essere smorzati, ad esempio ponendo

$$\Delta = \rho(t) \frac{w(t)}{\sqrt{w(t)^T w(t) + \epsilon}}, \quad (1.19)$$

con  $\epsilon > 0$  piccolo. Si veda a tal proposito lo schema di controllo riportato in fig.1.5.

## 1.2.4 Controllo Adattivo alla Craig

Si scelga una coppia di controllo  $\tau$  della forma

$$\tau = \hat{B}(q) (\ddot{q}_d + K_v \dot{\tilde{q}} + K_p \tilde{q}) + \hat{C}(q, \dot{q}) \dot{q} + \hat{G}(q) \quad (1.20)$$

dove  $\hat{B}(q)$ ,  $\hat{C}(q, \dot{q})$  rappresentano rispettivamente le stime delle matrici dinamica e di Coriolis, e  $\hat{G}(q)$  è la stima delle coppie gravitazionali del manipolatore, e si sostituisca nella dinamica (1.1). In tal modo si ottiene

$$\begin{aligned} B(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) &= \hat{B}(q) (\ddot{q}_d + K_v \dot{\tilde{q}} + K_p \tilde{q}) + \hat{C}(q, \dot{q}) \dot{q} + \hat{G}(q) \rightarrow \\ (B(q) - \hat{B}(q))\ddot{q} + (C(q, \dot{q}) - \hat{C}(q, \dot{q}))\dot{q} + (G(q) - \hat{G}(q)) &= \\ \hat{B}(q) (\ddot{\tilde{q}} + K_v \dot{\tilde{q}} + K_p \tilde{q}) \rightarrow & \\ \hat{B}(q)^{-1} Y(q, \dot{q}, \ddot{q}) \tilde{\pi} = \ddot{\tilde{q}} + K_v \dot{\tilde{q}} + K_p \tilde{q} & \end{aligned} \quad (1.21)$$



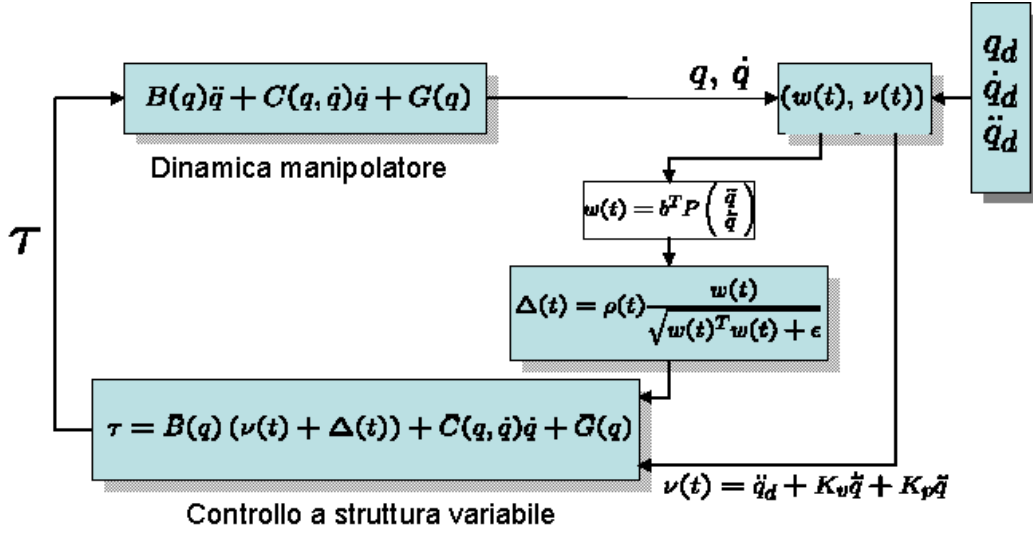


Figura 1.5: Schema di controllo a struttura variabile con la scelta (1.19) per  $\Delta(t)$ .

dove  $\tilde{\pi} = \pi - \hat{\pi}$  rappresenta l'errore di stima dei parametri dinamici, e avendo supposto l'invertibilità della stima  $\hat{B}(q)$  della matrice dinamica. Come evidenziato nella sezione 1.2.3, la dinamica dell'errore di posizione risulta affetta da un disturbo  $\eta = \hat{B}^{-1}(q) Y(q, \dot{q}, \ddot{q}) \tilde{\pi}$  che ne preclude l'asintotica convergenza a zero, e in alcuni casi la stabilità. Vedremo quindi come una scelta opportuna della dinamica  $\dot{\hat{\pi}}$  delle stime dei parametri dinamici garantisca la convergenza a zero dell'errore di stima. A tal proposito si sfrutta nuovamente il metodo diretto di Lyapunov.

Si esprima la (1.21) in forma di stato

$$\dot{\xi} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -K_p & -K_v \end{pmatrix} \xi + \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix} \hat{B}(q)^{-1} Y(q, \dot{q}, \ddot{q}) \tilde{\pi}$$

dove abbiamo posto  $\xi = (\tilde{q}, \dot{\tilde{q}})^T$ , e si scelga la funzione di Lyapunov

$$V(t) = \frac{1}{2} \xi^T P \xi + \frac{1}{2} \tilde{\pi}^T R \tilde{\pi}.$$

che derivata rispetto al tempo porta a

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \frac{1}{2} \dot{\xi}^T P \xi + \frac{1}{2} \xi^T P \dot{\xi} - \tilde{\pi}^T R \dot{\tilde{\pi}} \rightarrow \\ \dot{V}(t) &= \frac{1}{2} \xi^T (A^T P + P A) \xi + \tilde{\pi} (Y^T(q, \dot{q}, \ddot{q}) \hat{B}^{-T}(q) (0, I) P \xi - R \dot{\tilde{\pi}}) \rightarrow \\ \dot{V}(t) &= -\frac{1}{2} \xi^T Q \xi + \tilde{\pi} (Y^T(q, \dot{q}, \ddot{q}) \hat{B}^{-T}(q) (0, I) P \xi - R \dot{\tilde{\pi}}), \end{aligned} \quad (1.22)$$

dove abbiamo sfruttato l'equazione di Lyapunov  $A^T P + PA = -Q$ ,  $Q > 0$ . A questo punto si nota che scegliendo la dinamica per le stime dei parametri

$$\dot{\hat{\pi}} = R^{-1} Y^T(q, \dot{q}, \ddot{q}) \hat{B}^{-T}(q) (0, I) P \xi \quad (1.23)$$

la (1.22) diventa

$$\dot{V}(t) = -\frac{1}{2} \xi^T Q \xi \leq 0.$$

Questa espressione implica che, con la scelta della coppia  $\tau$  in (1.20) e della dinamica per le stime (1.23), il sistema a ciclo chiuso tende asintoticamente alla configurazione di equilibrio  $\xi^T = (\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) = (0, 0)$ , ma *non è garantita* la convergenza a zero dell'errore di stima  $\tilde{\pi}$ . A tal proposito mostriamo che l'errore di stima tende a zero solo per quelle traiettorie di riferimento che risultino *persistentemente eccitanti* per le dinamiche (1.23).

- **Condizione di eccitazione persistente**

Una funzione  $f(t)$  soddisfa la *condizione di eccitazione persistente* se

$$\int_t^{t+\delta} f(t)^T f(t) dt \geq \alpha I, \forall t, \quad (1.24)$$

dove  $\alpha, \delta > 0$ .

A tal proposito si nota che la (1.21) diventa, una volta raggiunto l'equilibrio (i.e.  $\langle \xi, \dot{\xi} \rangle = \langle 0, 0 \rangle$ ),

$$Y(q, \dot{q}, \ddot{q}) \tilde{\pi}(t) = 0 \quad (1.25)$$

che non implica la convergenza a zero dell'errore di stima  $\tilde{\pi}(t)$ , basta infatti che  $\tilde{\pi}(t) \neq 0 \in \text{Ker}\{Y(q, \dot{q}, \ddot{q})\}$ . Si può comunque notare che le dinamiche (1.23) delle stime dei parametri tendono a zero asintoticamente, vista l'asintotica convergenza a zero del vettore  $\xi$ , il che implica la costanza del vettore  $\tilde{\pi}(t) = \bar{\tilde{\pi}}$  per istanti temporali  $t$  grandi. Moltiplicando quindi la (1.25) per  $Y^T(q, \dot{q}, \ddot{q})$ , e integrandola in un intervallo temporale  $[t, t + \delta]$  si ottiene

$$\int_t^{t+\delta} Y^T(q, \dot{q}, \ddot{q}) Y(q, \dot{q}, \ddot{q}) dt \bar{\tilde{\pi}} = 0$$

che ha come unica soluzione  $\bar{\tilde{\pi}} = 0$  se è vera la (1.24).

In conclusione, è importante sottolineare che il controllo di Craig, il cui schema è riportato in fig.1.6, è affetto da alcuni problemi, quali la necessità di retroazionare le accelerazioni di giunto e la non sempre garantita invertibilità della matrice  $\hat{B}(q)$ . Tali problemi verranno superati dallo schema di controllo adattivo proposto nel paragrafo successivo.

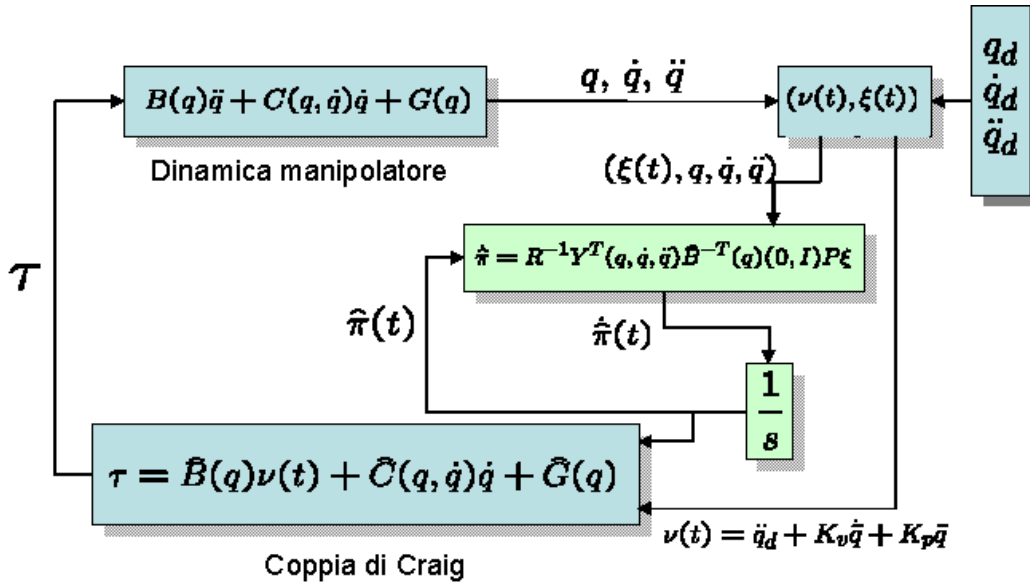


Figura 1.6: Schema di controllo adattivo alla Craig. In verde è evidenziata la parte relativa alla integrazione della dinamica della stima  $\hat{\pi}$  dei parametri dinamici.

### 1.2.5 Controllo Adattivo alla Li-Slotine

Per superare i limiti del controllo adattivo alla Craig, il controllo di Li-Slotine non si fonda sulla scelta di un controllo  $\tau$  del tipo a coppia calcolata, ma sfrutta la cosiddetta *velocità di riferimento*

$$\dot{q}_r = \dot{q}_d - \Lambda \tilde{q}$$

dove  $q_d$  è il riferimento di posizione dei giunti e  $\tilde{q} = q - q_d$  è il relativo errore di posizione. La differenza tra la velocità ai giunti  $\dot{q}$  e la velocità di riferimento  $\dot{q}_r$  è rappresentata da

$$s = \dot{q} - \dot{q}_r = \dot{\tilde{q}} + \Lambda \tilde{q}.$$

A questo punto si definisce una funzione

$$V(t) = \frac{1}{2} s^T B(q) s + \tilde{\pi}^T R \tilde{\pi},$$

dove in particolare  $R > 0$  e  $\tilde{\pi} = \pi - \hat{\pi}$ . Si noti che  $V(t)$ , che ha significato simile ad una candidata di Lyapunov, è soltanto *semi-definita positiva*, in quanto  $V(t) = 0 \rightarrow \tilde{\pi} = 0$ ,  $s = 0 \rightarrow \dot{\tilde{q}} = -\Lambda \tilde{q}$  che non implica  $(\dot{\tilde{q}}, \tilde{q}) = (0, 0)$ .

Passando comunque alla derivazione della  $V(t)$  si ottiene

$$\begin{aligned}\dot{V}(t) &= s^T B(q)\dot{s} + \frac{1}{2}s^T \dot{B}(q)s - \tilde{\pi} R \dot{\hat{\pi}} \rightarrow \\ \dot{V}(t) &= s^T B(q)(\ddot{q} - \ddot{q}_r) + \frac{1}{2}s^T \dot{B}(q)s - \tilde{\pi} R \dot{\hat{\pi}} \rightarrow \\ \dot{V}(t) &= s^T (B(q)\ddot{q} - B(q)\ddot{q}_r) + \frac{1}{2}s^T \dot{B}(q)s - \tilde{\pi} R \dot{\hat{\pi}} \rightarrow \\ \dot{V}(t) &= s^T (\tau - C(q, \dot{q})\dot{q} - G(q) - B(q)\ddot{q}_r) + \frac{1}{2}s^T \dot{B}(q)s - \tilde{\pi} R \dot{\hat{\pi}} \rightarrow \\ \dot{V}(t) &= s^T (\tau - C(q, \dot{q})\dot{q} - G(q) - B(q)\ddot{q}_r) + \frac{1}{2}s^T \dot{B}(q)s - \tilde{\pi} R \dot{\hat{\pi}} \rightarrow\end{aligned}$$

e sommando e sottraendo il termine  $s^T C(q, \dot{q})s$  si giunge alla

$$\begin{aligned}\dot{V}(t) &= s^T (\tau - C(q, \dot{q})\dot{q}_r - G(q) - B(q)\ddot{q}_r) - \tilde{\pi} R \dot{\hat{\pi}} \rightarrow \\ \dot{V}(t) &= s^T (\tau - Y(q, \dot{q}, \dot{q}_r, \ddot{q}_r)\pi) - \tilde{\pi} R \dot{\hat{\pi}}\end{aligned}\tag{1.26}$$

dove abbiamo supposto che la matrice  $C(q, \dot{q})$  sia stata calcolata utilizzando il metodo di Christoffel, che comporta  $s^T (\dot{B}(q) - 2C(q, \dot{q}))s = 0, \forall s$ .

Si scelga la coppia di controllo

$$\tau = \hat{B}(q)\ddot{q}_r + \hat{C}(q, \dot{q})\dot{q}_r + \hat{G}(q) - K_d s = Y(q, \dot{q}, \dot{q}_r, \ddot{q}_r)\hat{\pi} - K_d s$$

e la si sostituisca nella (1.26) ottenendo

$$\begin{aligned}\dot{V}(t) &= s^T (Y(q, \dot{q}, \dot{q}_r, \ddot{q}_r)(\hat{\pi} - \pi) - K_d s) - \tilde{\pi} R \dot{\hat{\pi}} \rightarrow \\ \dot{V}(t) &= s^T Y(q, \dot{q}, \dot{q}_r, \ddot{q}_r)\tilde{\pi} - s^T K_d s - \tilde{\pi} R \dot{\hat{\pi}} \rightarrow \\ \dot{V}(t) &= \tilde{\pi}^T (-Y^T(q, \dot{q}, \dot{q}_r, \ddot{q}_r)s - K_d \hat{\pi}) - s^T K_d s\end{aligned}$$

Scegliendo come dinamica per le stime  $\hat{\pi}$  la

$$\dot{\hat{\pi}} = -R^{-1}Y^T(q, \dot{q}, \dot{q}_r, \ddot{q}_r)s$$

si ottiene

$$\dot{V}(t) = -s^T K_d s \leq 0.$$

Al fine di garantire l'asintotica stabilità del sistema (i.e.  $(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) \rightarrow (0, 0)$ ) è necessario mostrare che  $\dot{V}(t) \rightarrow 0$ . Infatti

$$\begin{aligned}\dot{V}(t) = 0 &\rightarrow s = \dot{\tilde{q}} + \Lambda \tilde{q} = 0 \rightarrow \dot{\tilde{q}} = -\Lambda \tilde{q} \rightarrow \\ \tilde{q} &= \tilde{q}(0)e^{-\Lambda t}\end{aligned}$$

che impone  $(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) \rightarrow (0, 0)$  per  $t \rightarrow \infty$ .

Poichè la  $V(t)$  non rappresenta una candidata di Lyapunov in senso stretto è necessario ricorrere ad un tecnicismo particolare, quale il

- **Lemma di Barbalat:**

Se la funzione differenziabile scalare  $V(t)$  soddisfa le seguenti condizioni

$$\begin{cases} V(t) \geq 0 \\ \dot{V}(t) \leq 0 \\ |\dot{V}(t)| \leq M \end{cases} \quad (1.27)$$

in cui la terza condizione assicura l'uniforme continuità della  $\dot{V}(t)$ , allora  $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{V}(t) = 0$ .

Nel nostro caso è facile notare che la  $\ddot{V}(t)$  risulta inferiormente limitata. Infatti

$$\ddot{V}(t) = -2s^T K_d \dot{s} = -2(\dot{\tilde{q}} + \Lambda \tilde{q})^T K_d (\ddot{\tilde{q}} + \Lambda \dot{\tilde{q}}),$$

e le funzioni  $(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}, \ddot{\tilde{q}})$  da cui dipende sono limitate. Abbiamo quindi mostrato che il controllo proposto garantisce l'inseguimento asintotico dei riferimenti di posizione da parte dei giunti (resta il fatto che non garantisce l'asintotica convergenza a zero degli errori di stima, si veda a tal proposito i risultati riportati in 1.2.4).

Come anticipato, il controllo adattivo proposto (vedasi fig.1.7) risulta una tecnica di controllo adattivo preferibile allo schema presentato in 1.2.4, non richiedendo la retroazione della accelerazione  $\ddot{q}$  di giunto (in genere affetta da rumore), e principalmente l'inversione della stima della matrice dinamica  $\hat{B}(q)$ .

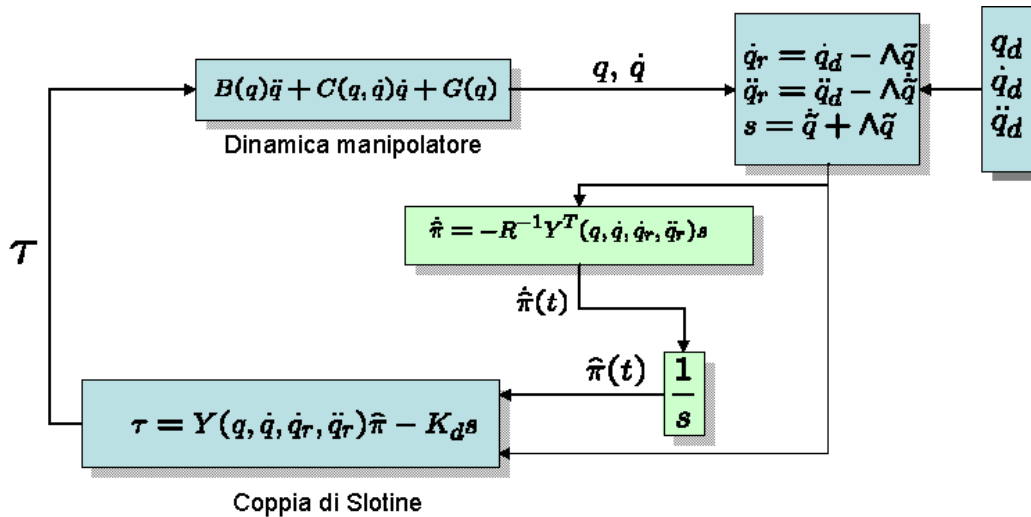


Figura 1.7: Schema di controllo adattivo alla Li-Slotine.



# Capitolo 2

## Sistemi non lineari.

### 2.1 Introduzione

I sistemi reali, salvo rare eccezioni, sono sistemi non lineari. Le tecniche di studio e progetto dei sistemi di controllo sinora studiate sono invece prevalentemente basate sullo studio di sistemi lineari.

La teoria dei controlli lineari è di enorme importanza perchè molti sistemi reali, in condizioni di normale operazione, sono ben approssimabili per linearizzazione. Gli strumenti offerti da questa teoria sono così potenti da poter trattare sistemi solo approssimativamente lineari in modo da dare sufficienti garanzie di funzionamento. Inoltre, la teoria lineare è la base e spesso il paradigma della teoria del controllo non lineare, che affronteremo in questa parte del corso.

Nella trattazione di sistemi non lineari si possono distinguere due diverse situazioni:

1. Si parla di **non linearità accidentali** per quei fenomeni non lineari che sono sostanzialmente delle perturbazioni di un comportamento di un sistema dinamico lineare;
2. Si dicono invece **non linearità intrinseche** quelle caratteristiche non lineari dei sistemi la cui sostituzione con una approssimazione lineare altera sostanzialmente le proprietà strutturali del sistema.

I sistemi interessati da non linearità accidentali vengono trattati per lo più con tecniche di controllo lineare robusto: tipiche ad esempio sono le estensioni del criterio di stabilità di Nyquist al caso di non linearità statiche nelle componenti dell'anello, mediante i criteri del cerchio o di Popov, la tecnica della funzione descrittiva, etc.. Lo studio di queste tecniche non viene affrontato qui. In queste note si tratteranno invece le non linearità

intrinseche, ed alcuni metodi per la analisi e il controllo di sistemi nonlineari (in particolare, sistemi meccanici utilizzati in Robotica) che non si basano su approssimazioni lineari.

### 2.1.1 Proprietà strutturali e nonlinearietà intrinseche di un sistema.

Si dicono proprietà strutturali di un sistema quelle proprietà che non vengono alterate dalla particolare rappresentazione di stato utilizzata. Sono quindi proprietà strutturali la stabilità, la controllabilità e la stabilizzabilità, la osservabilità e la detettabilità.

Dato un sistema non lineare nella forma

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x, u) & x(0) = x_0 \\ y = h(x, t, u) \end{cases}$$

considereremo quindi come queste proprietà possono venire alterate dalla approssimazione lineare, che porta il sistema nella forma

$$\begin{cases} \dot{z} = Az + Bu \\ w = Cz + Du \end{cases} .$$

## 2.2 Proprietà dei sistemi non lineari

### 2.2.1 Stabilità

Ricordiamo le relazioni tra la stabilità di un sistema non lineare  $\dot{x} = f(x)$  e quella del suo approssimante lineare  $\dot{x} = Ax$ .

1. se  $\dot{x} = Ax$  è asintoticamente stabile (A.S)  $\Rightarrow \dot{x} = f(x)$  A.S. localmente in  $x_0$ ;
2. se  $\dot{x} = Ax$  ha almeno un modo esponenzialmente divergente  $e^{\alpha t}$ ,  $\Re(\alpha) > 0 \Rightarrow \dot{x} = f(x)$  è instabile;
3. se  $\dot{x} = Ax$  è marginalmente stabile (se cioè è stabile ma ha almeno un modo  $e^{\alpha t}$ ,  $\Re(\alpha) = 0$ )  $\Rightarrow$  nulla si può dire su  $\dot{x} = f(x)$ .

**Esempio.** Il sistema non lineare

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1^3 + x_2 \\ -x_2^3 \end{pmatrix}$$



è stabile attorno al punto

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

come si può verificare con la funzione

$$V = \begin{cases} x_2^2 & |x_2| \geq |x_1^3| \\ (x_2 - x_1^3)^2(x_2 + x_1^3)^2 + x_2^2 & \text{altrove} \end{cases}$$

L'approssimazione lineare  $\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$  è instabile, e la soluzione del sistema lineare, data da

$$\begin{cases} x_2(t) = x_2(0) \\ x_1(t) = x_1(0) + x_2 t \end{cases} ,$$

diverge anche a partire da condizioni iniziali  $x_1(0), x_2(0)$  arbitrariamente vicine all'origine.

## 2.2.2 Controllabilità

Il concetto di controllabilità di un sistema  $\dot{x} = f(x, u)$  consiste nella possibilità di trovare una legge di controllo  $u(t)$ ,  $t \in [0, T]$  ( $T$  dato) tale che il sistema evolva da  $x(0)$  arbitraria data a  $x(T) = x_f$  arbitrariamente fissata.

Per il sistema tempo invariante

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad x \in \mathcal{R}^n \quad u \in \mathcal{R}^m$$

la proprietà di controllabilità è equivalente alla condizione

$$\text{rank}([ B \ : \ AB \ : \ A^2B \ : \ \dots \ : \ A^{n-1}B ]) = n$$

Questa definizione è di gran lunga troppo ambiziosa perché (ad oggi) esistono analoghi criteri nel caso non lineare.

Una versione più debole, locale, chiede solo che  $x_f$  sia scelto liberamente ma vicino a  $x(0)$ . In questo caso vale il seguente teorema il cui significato è intuitivo:

**Teorema 2.2.1** *Sia dato il sistema*

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{j=1}^m g_j(x)u_j \quad \text{con} \quad f(x_0) = 0$$

e siano

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_0 \\ u=0}} \quad B = [g_1(x_0) : \dots : g_m(x_0)]$$

le matrici della approssimazione lineare.

Se il sistema  $\dot{x} = Ax + Bu$  è controllabile, allora per ogni  $T$  esiste un intorno di  $x_0$  tale che per ogni suo punto  $x_f$  esiste un controllo  $u(t)$  tale per cui  $x(u(t), T) = x_f$ , inoltre il controllo è limitato.

Possiamo concludere dicendo che la controllabilità dell' approssimazione lineare implica la controllabilità del sistema originale, ma non è vero il viceversa. Per un sistema nonlineare controllabile, è possibile che la sua approssimazione lineare non lo sia. Tale sistema è quindi intrinsecamente non lineare.

Vediamo un esempio in cui con l'approssimazione lineare si perde la proprietà di controllabilità.

**Esempio.** Veicolo su Ruote (v.fig.1.3):

Siano  $\omega_1$  e  $\omega_2$  le velocità di rotazione delle due ruote, sia  $R$  il loro raggio e  $L$  il loro interasse. La velocità di avanzamento del veicolo è  $v = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} R$  e quella di rotazione è  $\Omega = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \frac{R}{L}$ .

Considerando solo il veicolo si ha:

$$\begin{cases} \dot{x} = \cos(\theta)v \\ \dot{y} = \sin(\theta)v \\ \dot{\theta} = \Omega \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad \dot{q} = g_1(q)u_1 + g_2(q)u_2$$

$$g_1(q) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} \quad g_2(q) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad q = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \theta \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} u_1 = v \\ u_2 = \Omega \end{pmatrix}$$

Essendo qualsiasi  $\bar{q}$  di equilibrio si può linearizzare il sistema ottenendo :

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial q} \right|_{\substack{q=\bar{q} \\ u=0}} = 0 ; \quad B = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{\substack{q=\bar{q} \\ u=0}} = \begin{bmatrix} \cos(\bar{\theta}_0) & 0 \\ \sin(\bar{\theta}_0) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Il sistema  $\dot{z} = Bu$  non è completamente raggiungibile infatti il rango della matrice di controllabilità non è pieno :

$$\text{rank}[ B : AB : A^2B ] = \text{rank}[B] = 2 < 3 = \text{dim}(q)$$

$$\mathcal{R}^\perp[B \cdots A^2 B] = \text{span} \begin{pmatrix} -\sin(\bar{\theta}_0) \\ \cos(\bar{\theta}_0) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ciò vuole dire che i moti possibili del sistema linearizzato sono paralleli all'asse delle due ruote. Il sistema originale è invece intuitivamente controllabile in quanto una posizione traslata nella direzione dell'asse può essere raggiunta facendo opportune manovre.

Si può concludere che in questo caso la linearizzazione ha distrutto la controllabilità.

### 2.2.3 Osservabilità

Come spesso accade, le osservazioni fatte per la raggiungibilità hanno una controparte nella osservabilità. Si consideri ad esempio di localizzare un mezzo mobile mediante triangolazione con due traguardi ottici, la cui posizione è nota a meno della distanza  $h$  tra i fari (v.fig 1.4):

$$q = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \theta \\ h \end{pmatrix} \quad \alpha_1 = \pi - \theta + \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \quad \alpha_2 = \pi - \theta + \arctan\left(\frac{(h-y)}{x}\right)$$

Assumendo per il veicolo una cinematica tipo unicycle si avrà :

$$\begin{cases} \dot{q} = g_1(q)u_1 + g_2(q)u_2 = \begin{pmatrix} \cos(q_3) \\ \sin(q_3) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} u_2 \\ \alpha_1 = \pi - q_3 + \arctan\left(\frac{q_2}{q_1}\right) \\ \alpha_2 = \pi - q_3 - \arctan\left(\frac{(q_4 - q_2)}{q_1}\right) \end{cases}$$

È noto dalla pratica della navigazione che triangolando da almeno due posizioni diverse è possibile ricostruire la posizione e l'orientazione del veicolo.

Se linearizzo ottengo :

$$\begin{cases} \dot{z} = \begin{pmatrix} \cos(z_1) & 0 \\ \sin(z_1) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} u \\ y = Cz \end{cases}$$

$$C = \begin{bmatrix} \frac{\partial \alpha_1}{\partial x} & \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} & \frac{\partial \alpha_1}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \alpha_2}{\partial x} & \frac{\partial \alpha_2}{\partial y} & \frac{\partial \alpha_2}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} & -1 \\ \frac{1-y}{x^2+(1-y)^2} & \frac{x}{x^2+(1-y)^2} & -1 \end{bmatrix}$$

Il sistema ha un sottospazio non osservabile di dimensione 2 infatti:

$$\ker \{ [C^T \ A^T C^T \ A^{2T} C^T]^T \} \neq 0$$

si vede perciò che linearizzando un sistema non lineare si può perdere l'osservabilità.

### 2.2.4 Stabilizzabilità

**Def :** Un sistema  $\dot{x} = f(x, u)$  è detto stabilizzabile se esiste una legge di retroazione degli stati  $u = u(x)$  tale che il sistema autonomo  $\dot{x} = f(x, u(x))$  sia stabile.

È noto dalla teoria dei sistemi che per un sistema lineare esiste una matrice  $K$  di retroazione  $u = Kx$  che rende tutti i poli di  $A + BK$  a parte reale negativa se e solo se tutti gli autovalori di  $A$  a parte reale non negativa sono interni al sottospazio di raggiungibilità. Questo accade se per la decomposizione di Kalman

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix} u$$

gli autovalori della matrice  $A_{22}$  sono a parte reale negativa.

**Teorema 2.2.2** *Se l' approssimazione lineare di un sistema  $\dot{x} = f(x, u)$  è stabilizzabile  $\Rightarrow$  anche il sistema originale lo è mediante la stessa legge  $u(x) = Kx$ .*

Questo risultato segue direttamente dalla applicazione del metodo di Lyapunov al sistema  $\dot{x} = f(x, -Kx)$ .

**Teorema 2.2.3** *Se il linearizzato è non stabilizzabile a causa della presenza di un autovalore a parte reale positiva in  $A_{22} \Rightarrow$  anche il sistema non lineare è non stabilizzabile.*

Se  $A_{22}$  ha uno o più autovalori a parte reale nulla, può esservi non linearità intrinseca:

**Esempio.** dato il sistema non lineare

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 u \\ \dot{x}_2 = -x_2 u \end{cases} \xrightarrow{\text{appr. lineare in } z_0} \begin{cases} \dot{z}_1 = -z_{10} u \\ \dot{z}_2 = -z_{20} u \end{cases} \quad \begin{matrix} A = 0 \\ B = - \begin{pmatrix} z_{10} \\ z_{20} \end{pmatrix} \\ K = (k_1 k_2) \end{matrix}$$

Il sistema bilineare di partenza ha un equilibrio indifferente per  $u = 0$  e può essere stabilizzato per  $u = \text{cost} > 0$ . Il sistema linearizzato ha  $\text{rank}(BK) = 1$  quindi è non stabilizzabile.

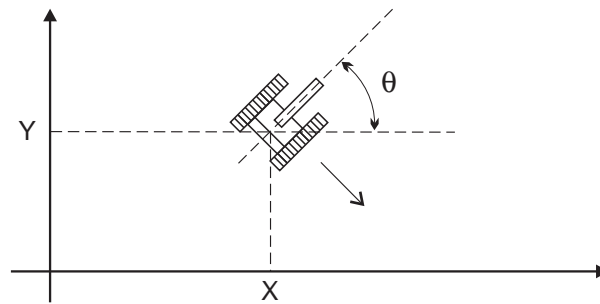


Figura 2.1: Veicolo su due ruote (controllabilità)

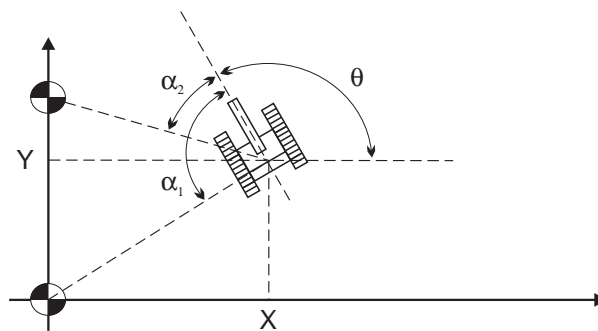


Figura 2.2: Veicolo su due ruote(osservabilità)





## Capitolo 3

# Sistemi Nonlineari: Scatola degli attrezzi matematici

Per studiare i sistemi nonlineari sono necessari alcuni strumenti matematici diversi da quelli della teoria dei sistemi lineari, che spesso ne sono una generalizzazione.

Si seguirà un approccio utilitaristico all'apprendimento di alcuni di questi strumenti rimandando a testi specialistici le definizioni e le dimostrazioni più rigorose.

Con qualche sacrificio di generalità si tratteranno solo sistemi affini nel controllo, cioè nella forma :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g_1(x)u_1(t) + g_2(x)u_2(t) + \cdots + g_m(x)u_m(t) \\ y = h(x) \end{cases}$$

Il vettore di stato  $\underline{x}$  è un elemento di uno spazio a  $n$  dimensioni. Il termine di *deriva*,  $f(x)$  è quindi un vettore di  $n$  funzioni in  $n$  variabili. Lo stesso vale per  $g_i(x)$ . Questi vettori di funzioni sono chiamati **campi vettoriali**.

Nel modello considerato, vi sono  $m$  campi vettoriali di ingresso  $g_1(x) \cdots g_m(x)$ , associati a funzioni  $u_1(t) \cdots u_m(t)$  che fungono da **controlli** del sistema. Sulle  $u_i(t)$  si assumerà che siano almeno **continue a tratti** a volte si chiederà la continuità o la differenziabilità.

Nello studio dei sistemi non lineari di nostro interesse, è frequente il caso che l'insieme delle configurazioni da rappresentare non sia semplicemente  $\mathbb{R}^n$ , spazio delle  $n$ -uple di numeri reali (ciò che avviene nei sistemi lineari). Più generalmente dovremo supporre che  $x \in M$ , dove  $M$  è una superficie curva a  $n$  dimensioni, immersa in uno spazio  $\mathbb{R}^N$  con  $N \geq n$ .

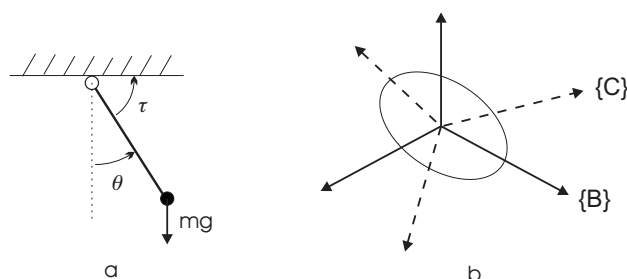


Figura 3.1: Esempi di sistemi meccanici

**Esempio** Si consideri il semplice pendolo riportato in figura

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \in S^1 \times \mathbb{R}^1 \neq \mathbb{R}^2 \quad S^1 = \mathbb{R} \pmod{2\pi}$$

$$ml^2\ddot{\theta} = mgl \sin(\theta) + \tau \quad \begin{cases} x_1 = \theta \\ x_2 = \dot{\theta} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{g}{l} \sin x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{ml^2} \end{bmatrix} \tau$$

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{g}{l} \sin x_1 \end{bmatrix} \quad g_1(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{ml^2} \end{bmatrix}$$

**Esempio** Rotazioni di corpo rigido;

L'orientazione del corpo C, che ruota attorno al centro del riferimento {B} è descritto dalla orientazione della terna {C} rispetto a {B}. La matrice di rotazione espressa in termini dei versori principali delle due terne,  $\underline{i} \underline{j} \underline{k}$ , descrive completamente tale orientazione.

$${}^B R^C = \begin{bmatrix} i_C^T i_B & j_C^T i_B & k_C^T i_B \\ i_C^T j_B & j_C^T j_B & k_C^T j_B \\ i_C^T k_B & j_C^T k_B & k_C^T k_B \end{bmatrix}$$

$${}^B R_C = \left[ {}^B i_C \ : \ {}^B j_C \ : \ {}^B k_C \right]$$

I nove parametri che appaiono in  $R \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  sono ovviamente ridondanti per esprimere l'orientazione. Valgono infatti le relazioni:

$$\begin{cases} {}^B i_C^T {}^B i_C = {}^B j_C^T {}^B j_C = {}^B k_C^T {}^B k_C = 1 \\ {}^B i_C^T {}^B j_C = {}^B i_C^T {}^B k_C = {}^B j_C^T {}^B k_C = 0 \end{cases}$$

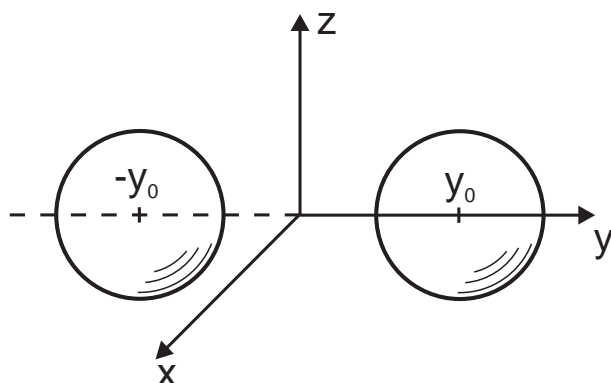


Figura 3.2: Esempio

equivalenti alla relazione di ortonormalità matriciale

$$RR^T = I \Rightarrow R^T = R^{-1}$$

Vi è per il vero una ulteriore relazione che impone che la terna  $\{C\}$  sia destrorsa, cioè  ${}^B i_C \times {}^B j_C = {}^B k_C$  (nota che le relazioni precedenti già implicano  ${}^B i_C \times {}^B j_C = \pm {}^B k_C$ , quindi questa relazione impone solo il **segno** di  ${}^B k_C$  . In termini matriciali, questo vincolo si esprime come  $\det R = 1$ . Le sei relazioni tra le nove variabili definiscono una superficie in  $\mathbb{R}^9$  a due componenti non connesse analogamente a quanto l'equazione seguente fa in  $\mathbb{R}^3$ :  $x^2 + (y \pm y_0)^2 + z^2 = R^2$ .

La relazione  $\det R = 1$  sceglie una delle due falde sulla quale il punto rappresentativo vive (v.fig. 1.6)

La dimensione della superficie è  $9 - 6 = 3$  ( nell'esempio delle sfere ho  $3 - 1 = 2$  ). Ciò induce a pensare che esistano descrizioni della orientazione di una terna più compatte, che usino solo tre parametri. Tali sono ad esempio gli angoli di Eulero, di Roll Pitch Yaw, etc. Nell'analogia con la sfera in  $\mathbb{R}^3$ , questo significherebbe prendere 2 parametri ( ad esempio, latitudine e longitudine ) per rappresentare i punti della sfera. In tal modo ad ogni coppia di parametri corrisponde uno ed un solo punto sulla sfera; non vale il viceversa per il polo nord e il polo sud. L'identificazione dello spazio dei parametri ( $\mathbb{R}^3$ ) e la sfera ( $S^2$ ) non è quindi perfetto. Lo stesso succede per le rappresentazioni minime delle orientazioni, che necessariamente presentano singolarità. Ovviamente è possibile usare due rappresentazioni delle orientazioni con singolarità in configurazioni diverse , e cambiare rappresentazione nei pressi di una singolarità secondo opportunità. Questo è il concetto alla base delle definizioni della **geometria delle varietà** o **manifolds** regolari.

Un *manifold* può essere visto come uno spazio, o varietà a  $n$  dimensioni, inserito in uno spazio più vasto  $\mathbb{R}^m$   $m \geq n$ , ma tale che, per ogni suo punto, esista una funzione carta che mappi un intorno del punto in un dominio di  $\mathbb{R}^n$  in modo continuo e invertibile.

Consideriamo uno spazio  $M$  (manifold) (v.fig. 1.7). Supponiamo che  $\forall p \in M$  esista un insieme aperto  $U \subset M$  (contenente  $p$ ) e una bijezione  $\varphi$  che mappa  $U$  in un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^n$ . Su  $\mathbb{R}^n$  abbiamo le funzioni delle coordinate naturali per cui

$$r_i(a_1, \dots, a_n) = a_i \quad i \in \{1 \dots n\}$$

Attraverso la composizione con  $\varphi$  otteniamo le funzioni di coordinate

$$x_i = r_i \circ \varphi$$

in questo modo una griglia definita su  $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$  attraverso le funzioni di coordinate  $r_i$  si trasforma in una griglia su  $U \subset M$ .

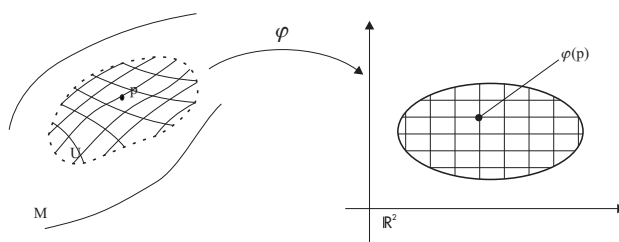


Figura 3.3: Manifolds e carta delle coordinate

L'insieme aperto  $U$  e la mappa  $\varphi$  sono dette Carta delle coordinate e hanno la seguente proprietà :

$\forall(U, \varphi)$   $\varphi$  é un omeomorfismo cioè  $\varphi$  e  $\varphi^{-1}$  sono continue. Quindi possiamo dire che un generico sistema non lineare può essere espresso nella seguente forma

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ y = h(x, u) \end{cases}$$

dove  $f$  e  $h$  sono mappe definite su un insieme aperto  $U$  del manifold dello spazio di stato. Qualora si voglia studiare il sistema in un punto non appartenente a  $U$  occorre scegliere una nuova carta delle coordinate che ne cambia la rappresentazione. Verranno scelti infatti un nuovo insieme  $V \in M$  che contiene il punto in studio e due nuove mappe  $\bar{f}$  e  $\bar{h}$ . Può succedere che due diverse carte siano definite su insiemi la cui intersezione non é nulla quindi é necessaria una certa compatibilità. Questo vuol dire che se ho una

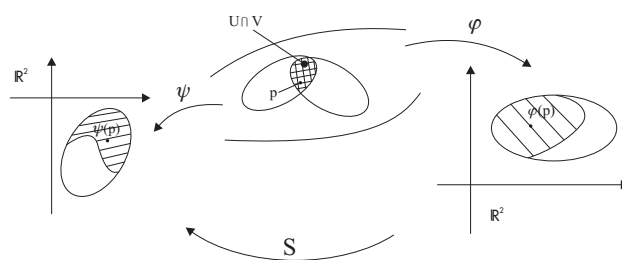


Figura 3.4: Trasformazione tra carte delle coordinate

carta  $(U, \varphi)$  e una carta  $(V, \psi)$  con  $U \cap V \neq \emptyset$  la mappa  $S = \psi \circ \varphi^{-1}$  è  $C^\infty(\text{smooth})$  (v.fig. 1.8).

$S$  è una trasformazione di coordinate da  $x = (x_1, \dots, x_n)$  a  $z = (z_1, \dots, z_n)$  con  $x_i = r_i \circ \varphi$  e  $z_i = r_i \circ \psi$  quindi possiamo scrivere  $z_i = S_i(x_1, \dots, x_n)$ .  $M$  con le sue carte delle coordinate  $C^\infty$  è detto smooth manifold o varietà regolare.

**Def:** un sottoinsieme  $P \subset M$  è chiamato Submanifold di dimensione  $m < n$  se  $\forall p \in P$  esiste una carta delle coordinate per  $M$  tale che

$$P \cap U = \{q \in U, x_i(q) = x_i(p), i = m + 1, \dots, n\}$$

Gli strumenti della teoria dei manifolds sono preziosi per studiare le proprietà globali dei sistemi non lineari che evolvono su spazi di struttura geometrica complessa. In ogni modo, nel seguito, ci limiteremo a considerare l'evoluzione di sistemi in intorni del punto iniziale che siano piccoli abbastanza da non coinvolgere cambiamenti di carte. Fissata una carta, cioè un sistema di coordinate, potremo dunque studiare il sistema attraverso la sua immagine su  $\mathbb{R}^n$ .

**Def:** sia data una funzione  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Una funzione è  $C^k$  se è  $k$  volte differenziabile e continua nelle sue derivate. Se una funzione è  $C^k \forall k$  allora si dice liscia ( $f \in C^\infty$ ). Inoltre  $f$  si dice analitica ( $f \in C^\omega$ ) se è espandibile in serie di potenze (di Taylor) in ogni suo argomento su ogni punto di  $A$ .

Ricordiamo dall'analisi che esistono funzioni lisce ma non analitiche. Ad esempio:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \end{cases}$$

Noi assumeremo che le funzioni che appaiono nelle definizioni dei sistemi non lineari con cui trattiamo siano analitiche. Una eccezione si avrà nel caso di funzioni di ingresso costanti a tratti, che ovviamente non sono analitiche.

Torniamo a considerare il sistema :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g_1(x)u_1(t) + g_2(x)u_2(t) + \cdots + g_m(x)u_m(t) \\ y = h(x) \end{cases}$$

dove le funzioni vettoriali  $f(\cdot)$  e  $g_i(\cdot)$  sono assunte essere mappe in  $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  regolari (cioè  $C^\infty$ ) su tutto il dominio dello spazio di stato di nostro interesse. Inoltre, le funzioni  $h_i(\cdot)$  sono assunte essere mappe  $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^1$  regolari anch'esse.

Nello studio dei sistemi nonlineari di nostro interesse incontriamo tre oggetti fondamentali:

**1 - Funzioni dello stato**, che associano agli stati valori nei reali:

$$\begin{aligned} \lambda : M &\rightarrow \mathbb{R} \\ p &\mapsto \lambda(p) \end{aligned} .$$

In coordinate locali ( $p = \phi(x)$ ) la funzione (che continuiamo a chiamare con lo stesso nome) associa al vettore di stato uno scalare:  $\lambda : x \in \mathbb{R}^n \mapsto \lambda(x) \in \mathbb{R}$ .

**Esempio:** Un vincolo olonomo su un sistema meccanico descritto dal vettore di configurazione generalizzata  $q$ , è scritto come una funzione dello stato  $C(q) = 0$ .

**2 - Campi vettoriali**, che associano agli stati vettori dello spazio tangente alla varietà:

$$\begin{aligned} f : M &\rightarrow TM \\ p &\mapsto f(p) \end{aligned}$$

In ogni punto  $p \in M$ ,  $f(p) \in T_pM$  è un elemento dello spazio tangente alla superficie  $M$  in  $p$  ( $TM$  denota l'insieme degli spazi  $T_pM$  tangenti a  $M$  in  $p$ , al variare di  $p \in M$ ). In coordinate locali si ha  $f : x \in \mathbb{R}^n \mapsto f(x) \in \mathbb{R}^n$ . In questo caso, scriveremo i campi vettoriali in notazione matriciale come vettori colonna.

**Esempio:** Si consideri la equazione differenziale

$$\dot{x} = f(x), \quad x(0) = x_0.$$

Il campo vettoriale  $f(x)$  può essere visto come il vettore velocità associato alla traiettoria  $\Phi(t, x_0)$  che risolve la equazione differenziale, cioè tale per cui

$$\frac{d\Phi}{dt} = f(\Phi) ; \quad \Phi(0, x_0) = x_0.$$

Si noti che anche se, in coordinate, gli spazi di dominio e codominio dei campi vettori possono essere entrambe descritti come  $\mathbb{R}^n$ , la natura dei due spazi può essere ben diversa. Ad esempio, nella descrizione del moto di un

punto, il dominio è un insieme di punti, mentre il codominio è un insieme di vettori.

**3 - Campi covettoriali**, che associano agli stati elementi dello spazio cotangente alla varietà:

$$\begin{aligned} \omega : M &\rightarrow T^*M \\ p &\mapsto \omega(p) \end{aligned}$$

Lo spazio cotangente  $T^*M$  denota l'insieme di tutti degli spazi  $T_p^*M$  cotangenti ad  $M$  nei punti  $p \in M$ . Questi spazi sono formati da applicazioni che associano ad un campo vettore dello spazio tangente una funzione scalare. In altri termini, un covettore  $\omega(p) \in T_p^*M$  associa ad ogni vettore  $f(p) \in T_pM$  uno scalare  $\mu(p) = \langle \omega(p), f(p) \rangle$ .

In coordinate locali si ha  $\omega : x \in \mathbb{R}^n \mapsto \omega(x) \in \mathbb{R}^n$ . Per sfruttare la notazione matriciale, esprimeremo i covettori come vettori riga. In questo modo, lo scalare ottenuto dalla applicazione di un covettore ad un vettore si valuta con la consueta convenzione del prodotto riga per colonna:

$$\mu(x) = \omega(x)f(x) = \sum_{i=1}^n \omega_i(x)f_i(x)$$

**Esempio:** La operazione di gradiente su una funzione scalare  $V(x)$  risulta in un covettore

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \left[ \frac{\partial V(x)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial V(x)}{\partial x_n} \right]$$

Pertanto, se  $m$  vincoli geometrici  $C(q) = 0$  sono espressi in forma cinematica, cioè scrivendo  $\frac{\partial C}{\partial q} \dot{q} = A(q)\dot{q} = 0$ , la matrice dei vincoli  $A(q) \in \mathbb{R}^{m \times n}$  può essere vista come una collezione di  $m$  covettori.

Si noti che possono essere dati campi covettoriali che *non* derivano da una operazione di gradiente quale quella sopra indicata: questo è il caso dei vincoli anolonomi.

Un particolare campo covettoriale  $\omega(x) = [\omega_1(x), \dots, \omega_n(x)]$  che (eventualmente moltiplicato per un opportuno fattore integrante  $\nu(x)$ ) corrisponda al gradiente di qualche funzione  $\lambda(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , viene detto *integrabile*, ovvero che è un *differenziale esatto*.

Una condizione necessaria e sufficiente perché  $\omega(x)$  sia un differenziale esatto è che

$$\frac{\partial \omega_i(x)}{\partial x_j} = \frac{\partial \omega_j(x)}{\partial x_i} \quad (3.1)$$

**Esempio:** Per un veicolo nel piano con configurazioni  $q = [x, y, \theta]$ , un vincolo che impone la costanza della orientazione  $\theta = 0$  può venire descritto

da  $A(q)\dot{q} = 0$ , con  $A(q)$  un covettore

$$A(q) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

che verifica la condizione (3.1), ed è ovviamente integrabile nella forma  $C(q) = \theta - \theta_0 = 0$  con  $\theta_0$  costante arbitraria.

Nel vincolo di un unicycle appare invece il covettore

$$A(q) = \begin{bmatrix} \sin\theta & -\cos\theta & 0 \end{bmatrix}$$

che non verifica la condizione (3.1), e pertanto non è integrabile (sappiamo che il vincolo è anolonomo).

• La condizione (3.1) si applica solo al caso di un solo covettore, mentre si possono avere sistemi meccanici sottoposti a più vincoli contemporaneamente, che possono combinarsi in modo non ovvio. Si consideri ad esempio il sistema costituito da un unicycle con il vincolo aggiuntivo che la sua direzione di marcia sia costante, cioè

$$A(q) = \begin{bmatrix} \sin\theta & -\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

In questo esempio, i due vincoli (che separatamente considerati sono rispettivamente anolonomo e olonomo) se posti insieme sono entrambe integrabili, quindi olonomi. Il numero di configurazioni indipendenti necessarie a descrivere il sistema è infatti ridotto a uno (il sistema può essere visualizzato come in moto su un binario rettilineo).

Per saper distinguere vincoli anolonomi da vincoli olonomi in forma cinematica, sarà necessario trovare condizioni più generali.

Definiamo ora alcune operazioni su funzioni e campi in  $\mathbb{R}^n$  di utilità nello studio di sistemi non lineari:

1. **Derivata di una funzione lungo un campo vettoriale** Data una funzione scalare  $\lambda(x)$  e un campo vettoriale  $f(x)$ , si definisce *derivata direzionale di  $\lambda(x)$  lungo  $f(x)$*  la funzione scalare

$$L_f \lambda(x) = \frac{\partial \lambda}{\partial x} f(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} f_i(x)$$

2. **Prodotto di Lie (o Lie Bracket)** Con questo nome viene indicata comunemente la derivata direzionale di un campo vettoriale lungo un campo vettoriale (la notazione corrispondente  $L_f g$  è poco usata). Il



prodotto di Lie associa a due campi vettoriali  $g_1(x)$ ,  $g_2(x)$  un terzo campo  $g_3(x) = [g_1, g_2]$  dove

$$[g_1, g_2] = \frac{\partial g_2(x)}{\partial x} g_1(x) - \frac{\partial g_1(x)}{\partial x} g_2(x)$$

Si noti che  $\frac{\partial g_i(x)}{\partial x}$  rappresenta, per ogni  $x$ , una matrice (Jacobiana)  $n \times n$ .

Oltre che col simbolo  $[\cdot, \cdot]$  il prodotto di Lie può essere indicato con

$$[f(x), g(x)] = ad_f g(x)$$

in modo da condensare l'espressione di una Lie bracket iterata

$$\overbrace{[f, [f, [\dots [f, g]]]]}^{k \text{ volte}} = ad_f^k g(x)$$

### 3. Derivata di un campo covettoriale lungo un campo vettoriale

Associa a un campo covettoriale  $\omega(x)$  e ad un campo vettoriale  $f(x)$  un nuovo campo covettoriale definito come

$$L_f \omega = f^T \left[ \frac{\partial \omega^T}{\partial x} \right]^T + \omega \frac{\partial f}{\partial x}$$

Tra i precedenti operatori, le Lie-Brackets hanno un ruolo fondamentale nello studio dei sistemi nonlineari. Esse possiedono alcune proprietà la cui conoscenza si rivela utile:

1. **proprietà di bilinearità:** per ogni  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$  vale

$$[\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2, g_1] = \alpha_1 [f_1, g_1] + \alpha_2 [f_2, g_1]$$

$$[f_1, \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2] = \alpha_1 [f_1, g_1] + \alpha_2 [f_1, g_2]$$

2. **proprietà di anticommutatività**

$$[f, g] = -[g, f]$$

3. **identità di Jacobi**

$$[f, [g, h]] + [h, [f, g]] + [g, [h, f]] = 0$$

Vale inoltre la seguente relazione per Lie-Brackets tra campi moltiplicati per funzioni scalari:

$$[\alpha(x)g_1(x), \beta(x)g_2(x)] = \alpha\beta[g_1, g_2] + \alpha L_{g_2}\beta g_1 - \beta L_{g_1}\alpha g_2$$

Consideriamo per esempio alcune funzioni, campi vettoriali e covettoriali lineari:

$$\lambda(x) = c^T x, \quad c \in \mathbb{R}^n, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

$$f(x) = Ax, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$g(x) = Bx, \quad B \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$\omega(x) = x^T C, \quad C \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

Si ha

$$L_f \lambda(x) = \frac{\partial \lambda}{\partial x} f = c^T Ax$$

$$[f, g] = \frac{\partial g}{\partial x} f - \frac{\partial f}{\partial x} g = (BA - AB)x$$

$$[g, f] = (AB - BA)x = -[f, g]$$

$$L_f \omega = f^T \left[ \frac{\partial \omega^T}{\partial x} \right]^T + \omega \frac{\partial f}{\partial x} = x^T (A^T C + CA)$$

Consideriamo adesso il modello dell'uniciclo

$$\dot{x} = g_1(x)u_1 + g_2(x)u_2$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \\ 0 \end{bmatrix} u_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_2$$

La Lie bracket di  $g_1(x)$  con  $g_2(x)$  è data da

$$[g_1, g_2] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} g_1 - \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\sin(\theta) \\ 0 & 0 & \cos(\theta) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin(\theta) \\ -\cos(\theta) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Si ha poi

$$[g_1, [g_1, g_2]] = \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} \sin(\theta) \\ \cos(\theta) \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\sin(\theta) \\ 0 & 0 & \cos(\theta) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin(\theta) \\ \cos(\theta) \\ 0 \end{bmatrix}$$

da cui

$$[g_1, [g_1, g_2]] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cos(\theta) \\ 0 & 0 & -\sin(\theta) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \\ 0 \end{bmatrix} - 0 = 0$$

$$[g_2, [g_1, g_1]] = \left[ g_2, \frac{\partial g_1}{\partial x} g_1 - \frac{\partial g_1}{\partial x} g_1 \right] = 0$$

verificando così l'identità di Jacobi. Inoltre si ha :

$$[g_2, [g_1, g_2]] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cos(\theta) \\ 0 & 0 & -\sin(\theta) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ -\sin(\theta) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$[g_2, [g_2, g_1]] = -[g_2, [g_1, g_2]]$$

$$[g_1, [g_2, g_2]] = 0$$

### 3.1 Distribuzioni e Codistribuzioni

Ad un numero  $d$  di campi vettoriali  $g_1(p), \dots, g_d(p)$ , in un punto  $p \in M$ , corrisponde un sottospazio dello spazio tangente descritto da

$$\Delta(p) = \text{span} [g_1(p), \dots, g_d(p)] \subset T_p M$$

In coordinate si ha analogamente

$$\Delta(x) = \text{span} (g_1(x), \dots, g_d(x)) \subset \mathbb{R}^n$$

L'insieme di tutti i sottospazi  $\Delta$  forma una *distribuzione* su  $M$ .

La *dimensione* di una distribuzione in un punto  $p$  è pari alla dimensione del sottospazio  $\Delta(p)$ , ovvero, in coordinate, al rango della matrice :

$$G(x) = [g_1(x), \dots, g_d(x)]$$

Una distribuzione può essere identificata con lo spazio immagine di  $G(x)$ , dove si pensi a combinazioni lineari delle sue colonne con coefficienti che possono essere funzioni dello stato  $x$ .

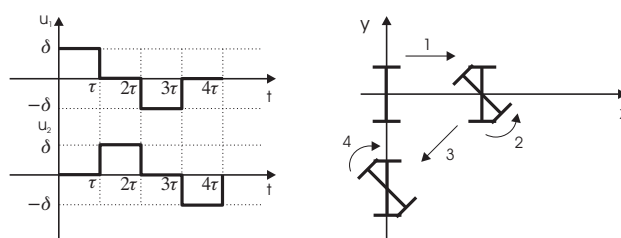


Figura 3.5: Veicolo su due ruote

Una distribuzione si dice **non singolare** su un dato insieme aperto di  $M$  se la sua dimensione è costante in ogni punto dell'insieme.

Un punto di  $M$  è detto *regolare* se  $\Delta(p)$  è non singolare in un suo intorno, altrimenti è detto punto di *singularità*.

Se la dimensione di  $M$  è  $n$ , si dice che  $\Delta(p)$  ha *codimensione*  $n - d$ . Una distribuzione generata dai vettori di controllo di un sistema del tipo

$$\dot{x} = g_1(x)u_1 + \cdots + g_m(x)u_m$$

ha l'evidente significato di individuare, in ogni punto  $x$ , il sottospazio a cui appartengono i vettori tangenti alle traiettorie seguite dal sistema quando  $u_1(t) = u_2(t) = \cdots = u_{k-1}(t) = 0$ ,  $u_k(t) = \bar{u}_k \neq 0$ ,  $u_{k+1}(t) = \cdots = u_m(t) = 0$ , al variare di  $k$ . Di conseguenza la distribuzione di controllo contiene direzioni di moto che, almeno in piccolo, possono essere realizzate dal sistema, scegliendo opportune combinazioni degli ingressi.

Una distribuzione di controllo può però non contenere *tutte* le possibili direzioni di moto. Si consideri ad esempio il modello cinematico di un unicycle. La distribuzione dei vettori di controllo è

$$\Delta(x) = \text{span} \left\{ \begin{array}{cc} \cos(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right\}$$

ed è ovviamente regolare ovunque, con dimensione 2, codimensione 1. Le direzioni di moto rese possibili dai vettori appartenenti alla distribuzione di controllo coincidono con quelle possedute dal modello linearizzato approssimato nel punto considerato.

Si pensi ora di applicare ingressi della forma riportata in figura a partire dalla configurazione  $q_0 = (x = 0, y = 0, \theta = 0)$ .

Integrando le equazioni cinematiche

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \\ 0 \end{bmatrix} u_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_2$$

si ottiene facilmente

$$\begin{cases} x(\tau) = \delta\tau \\ y(\tau) = 0 \\ \theta(\tau) = 0 \end{cases} ; \begin{cases} x(2\tau) = \delta\tau \\ y(2\tau) = 0 \\ \theta(2\tau) = \delta\tau \end{cases} ; \begin{cases} x(3\tau) = -\sin(\delta\tau) + \delta\tau \\ y(3\tau) = \cos(\delta\tau) - 1 \\ \theta(3\tau) = \delta\tau \end{cases}$$

e infine

$$\begin{cases} x(4\tau) = -\sin(\delta\tau) + \delta\tau \\ y(4\tau) = \cos(\delta\tau) - 1 \\ \theta(4\tau) = 0 \end{cases}$$

Consideriamo ora il caso di piccoli ingressi e/o intervalli temporali  $\tau$  brevi, così che  $\delta\tau \rightarrow 0$ . Sviluppando in serie di Taylor fino al secondo ordine si ha:

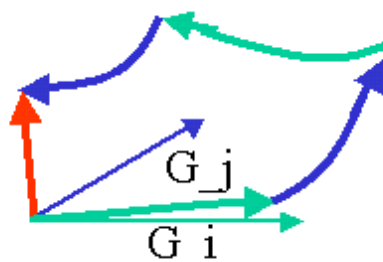
$$\begin{cases} x(4\tau) = 0 + [(1 - \cos(\delta\tau))]_{\delta\tau=0}\delta\tau + \frac{\delta^2\tau^2}{2}[\sin \delta\tau]_{\delta\tau=0} + O(\delta^3\tau^3) = O(\delta^3\tau^3) \\ y(4\tau) = 0 + [-\sin(\delta\tau)]_{\delta\tau=0}\delta\tau + \frac{\delta^2\tau^2}{2}[-\cos(\delta\tau)]_{\delta\tau=0} + O(\delta^3\tau^3) = -\frac{\delta^2\tau^2}{2} + O(\delta^3\tau^3) \end{cases}$$

Trascurando gli infinitesimi di ordine superiore al secondo è possibile vedere che, pur localmente, (cioè con moti arbitrariamente piccoli), il movimento risultante del veicolo è stato nella direzione del vettore

$$\begin{bmatrix} x(4\tau) \\ y(4\tau) \\ \theta(4\tau) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \\ \theta(0) \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

che **non** risulta contenuto in  $\Delta(x(0))$ :

$$\Delta(x_0) = \text{span} \left[ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right]$$



Osserviamo — per ora solo incidentalmente — che la direzione del moto in cui é evoluto il sistema all'istante  $4\tau$  é invece contenuta in

$$[g_1, g_2] = \begin{bmatrix} \sin \theta \\ -\cos \theta \\ 0 \end{bmatrix}_{(0,0,0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ci chiediamo, piú generalmente, se da un punto  $x_0$  possiamo muoverci lungo direzioni non contenute in  $\Delta(x_0)$ . Questo é possibile come visto nell'esempio: l'idea base é quella di scegliere opportune combinazioni degli ingressi  $u_1, \dots, u_m$  in modo da *commutare* i campi vettoriali  $g_1, \dots, g_m$  (vedi figura).

Si osservi il fatto importante che il moto nella direzione della Lie bracket, esterna al sottospazio di raggiungibilitá del sistema linearizzato, é stato ottenuto senza allontanarsi da un intorno del punto iniziale, ed infatti risulta da una analisi locale.

L'osservazione fatta nell'esempio dell'uniciclo ha valore piú generale: si può dimostrare con facili passaggi che applicando ingressi alternati del tipo sopra descritto al sistema

$$\dot{x} = g_1(x)u_1 + g_2(x)u_2$$

e utilizzando il fatto che soluzioni di  $\dot{x} = g_i(x)u_i$ ,  $x(0) = x_0$  possono essere scritte come

$$x(t) = x(0) + \dot{x}(0)t + \ddot{x}(0)\frac{t^2}{2} + O(t^3) = x(0) + g_i(x_0)t + \frac{t^2}{2} \left. \frac{\partial g_i}{\partial x} \right|_{x_0} g_i(x_0) + O(t^3)$$

si ha che

$$x(4\tau) = x_0 + [g_1, g_2]_{x=x_0} \frac{\delta^2 \tau^2}{2} + O(\delta^3 \tau^3)$$

Questo significa che in prima approssimazione possiamo muovere il sistema da  $x_0$  lungo direzioni stabilite dal vettore generato dalla Lie bracket  $[g_1, g_2]$  calcolato in  $x_0$ .

(il calcolo di questo risultato è facilitato se, senza perdere generalità, si assumono coordinate per il sistema tali per cui uno dei campi vettoriali sia costante.)

Questo non è tutto perché il termine  $O(\tau^3)$ , se sviluppato, contiene le Lie brackets composte come

$$[g_1, [g_1, g_2]], [[g_1, g_2], [g_1, [g_1, g_2]]], \text{ etc.}$$

queste generano direzioni di moto che possono essere prese dal sistema commutando opportunamente gli ingressi.

Nel caso in cui consideri sistemi in cui il termine di deriva  $f$  non è nullo devo considerare anche le Lie brackets che lo interessano.

In un certo senso la Lie bracket di due campi vettoriali misura la loro *non commutatività*; è evidente che questo operatore differenziale giocherà un ruolo importante nei problemi di controllabilità.

Una distribuzione si dice **involutiva** se la Lie bracket di qualsiasi due campi vettoriali che le appartengono, le appartiene ancora; cioè se

$$\tau_1(x) \in \Delta(x) ; \tau_2(x) \in \Delta(x) \Rightarrow [\tau_1, \tau_2] \in \Delta(x)$$

Nell'esempio precedente  $\Delta_1(x) = \text{span} \left\{ \begin{array}{l} \cos(\theta) \quad \vdots \quad 0 \\ \sin(\theta) \quad \vdots \quad 0 \\ 0 \quad \quad \quad \vdots \quad 1 \end{array} \right\}$  non è involutiva.

È invece involutiva la distribuzione

$$\Delta_2(x) = \text{span} \{g_1, g_2, [g_1, g_2]\} = \text{span} \left\{ \begin{array}{l} \cos(\theta) \quad \vdots \quad 0 \quad \vdots \quad \sin(\theta) \\ \sin(\theta) \quad \vdots \quad 0 \quad \vdots \quad -\cos(\theta) \\ 0 \quad \quad \quad \vdots \quad 1 \quad \vdots \quad 0 \end{array} \right\}$$

come si constata facilmente osservando che  $\Delta_2(x)$  ha dimensione 3 in ogni punto dello spazio di stato.

La condizione che il rango della matrice associata ad una distribuzione sia pieno non è comunque necessaria: ad esempio, qualsiasi distribuzione generata da campi vettoriali costanti è certamente involutiva, essendo  $[a, b] = 0$ ,  $a, b = \text{costanti}$ .

Altro caso particolare, le distribuzioni generate da un solo campo vettoriale  $\Delta(x) = \text{span} \{g_1(x)\}$  sono ovviamente involutive, in quanto

$$[ag_1(x), bg_1(x)] = 0, \forall a, b \in \mathbb{R}^1$$

Data una distribuzione  $\Delta(x)$ , risulta naturale introdurre il concetto di **chiusura involutiva** di  $\Delta(x)$ , come la distribuzione minima che contiene  $\Delta(x)$  e che è involutiva.

L'oggetto analogo delle distribuzioni per i campi covettoriali è definito **codistribuzione**. Indicheremo con

$$\Omega(p) = \text{span} \{ \omega_1(p), \dots, \omega_l(p) \}$$

la codistribuzione associata ai covettori  $\omega_1(p), \dots, \omega_l(p)$ , cioè l'insieme di tutti i covettori formati per combinazione lineare (a coefficienti funzioni dello stato) dei covettori dati.

In coordinate, le codistribuzioni possono essere identificate con lo **spazio-riga** di una matrice che per righe ha le  $\omega_i$ .

È naturale pensare una analogia al noto teorema dell'algebra lineare, per il quale, per ogni matrice costante  $A$ , vale

$$N(A^T) = R(A)^\perp$$

$$N(A) = R(A^T)^\perp$$

dove  $\perp$  indica il complemento ortogonale di un sottospazio. Similarmente per una distribuzione  $\Delta(x)$  si definisce il suo **annichilatore**

$$\Delta^\perp(x) = \{ \omega : \omega v = 0, v \in \Delta(x) \}$$

cioè l'insieme dei covettori che danno prodotto interno nullo con qualsiasi vettore di  $\Delta(x)$ . Essendo  $\Delta^\perp(x)$  uno spazio aggiunto di  $\mathbb{R}^n$ , esso è certamente una codistribuzione.

Analogamente data la codistribuzione  $\Omega(x)$ , si può costruire una distribuzione **annichilatrice**

$$\Omega^\perp(x) = \{ v \in \mathbb{R}^n : \langle \omega, v \rangle = 0, \omega \in \Omega(x) \}$$

Si ha che

$$\dim(\Omega(x)) + \dim(\Omega^\perp(x)) = n$$

e ovviamente lo stesso vale per

$$\dim(\Delta(x)) + \dim(\Delta^\perp(x)) = n.$$

Nei sistemi meccanici con vincoli in forma cinematica  $A(q)\dot{q} = 0$ , la matrice  $A(q)$  definisce chiaramente una *codistribuzione* dei vincoli. La espressione della stessa cinematica in termini di quasi velocità,  $\dot{q} = S(q)\nu$ , esemplifica l'uso della distribuzione annichilatrice  $\text{span } S(q)$ .



Vale il seguente risultato: Se una distribuzione  $\Delta(x)$  è regolare e non singolare in  $x_0$ , allora anche  $\Delta^\perp(x)$  lo è; vale anche il viceversa.

Infine accenniamo il fatto che per ogni distribuzione a  $d$  dimensioni  $\Delta(x)$  non singolare ogni suo campo vettoriale può essere espresso come

$$\tau \in \Delta(x) \Rightarrow \tau = \sum_{i=1}^d c_i(x) f_i(x)$$

dove  $f_i(x)$  sono campi vettoriali regolari che formano una *base*, tali cioè che

$$\Delta(x) = \text{span} \{f_1(x), \dots, f_d(x)\}$$

Supponiamo ora di avere una distribuzione  $\Delta(x)$  definita su uno spazio a  $n$ -dimensioni con dimensione  $d < n$ . La codistribuzione annichilatrice  $\Delta^\perp(x)$  ha dimensione  $n - d$ , e può essere scritta come

$$\Delta^\perp(x) = \text{span} \{\omega_1(x), \dots, \omega_{n-d}(x)\}$$

Ci chiediamo quando questi campi covettoriali siano in effetti **differenziali esatti**, cioè esistano  $(n - d)$  funzioni indipendenti  $\lambda_i(x)$  tali che:

$$\omega_i = \frac{\partial \lambda_i}{\partial x}$$

Tale condizione è detta di **completa integrabilità** per la  $\Delta(x)$ . Se la  $\Delta(x)$  è espressa come

$$\Delta(x) = \text{span} \{f_1(x), \dots, f_d(x)\} = \text{Im}F(x)$$

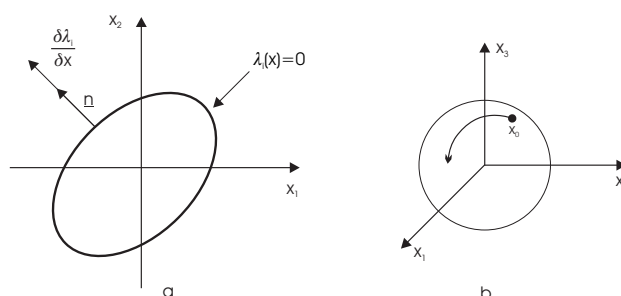
le funzioni cercate dovranno verificare le equazioni differenziali alle derivate parziali

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial x} F(x) = 0, \quad \forall i, \quad \forall x$$

Il problema chiaramente ci interessa ai fini della discriminazione dei vincoli cinematici tra olonomi ed anolonomi; ma vedremo che esso ha importanza più generale, coinvolgendo tutta la analisi di raggiungibilità di sistemi nonlineari.

Si consideri il luogo dei punti  $\lambda_i(x) = \text{cost}$  in  $\mathbb{R}^n$ . Il gradiente  $\frac{\partial \lambda_i}{\partial x}(x)$  può essere visto geometricamente come un vettore in  $x$  e orientato come la normale  $n(x)$  al luogo. La condizione che

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial x} f_j(x) = 0, \quad \forall i, j, \quad \forall x$$



equivale a imporre che ognuno dei vettori  $f_j(x)$ , e ogni loro combinazione lineare, sia perpendicolare alla normale al luogo in quel punto, cioè **tan-**  
**gente** al luogo. In tal caso risulta evidente che un sistema il cui vettore  
velocità  $\dot{x}$  appartenga a  $\Delta(x)$  sarebbe costretto a rimanere su  $\lambda_i(x) = \text{cost}$   
indefinitamente qualora vi si venga a trovare in qualsiasi istante. È pertanto  
fondamentale il seguente

*Teorema di Frobenius* Una distribuzione è completamente inte-  
grabile se e solo se è involutiva.

Il teorema di Frobenius ha conseguenze immediate sulla raggiungibilità  
del sistema. Se infatti per un sistema, la distribuzione di controllo ha di-  
mensione  $d < n$  ed è integrabile, esisteranno  $n - d$  superfici in  $M$  definite  
da  $\lambda_i(x) = c_i = \text{cost}$ . che il sistema non può abbandonare (le costanti dipen-  
dendo dalle condizioni iniziali). Il sistema non potrà raggiungere nessun  
punto che si trovi al di fuori della superficie intersezione (che ha dimensione  
 $d$ ), e non sarà quindi certamente completamente raggiungibile.

Partendo da condizioni iniziali diverse, si avranno traiettorie giacenti su  
superfici di equazione  $\lambda_i(x) = c'_i$  con  $c' \neq c$  ma ancora costante. Queste  
superfici sono parallele tra loro (nel senso che i piani tangenti sono paralleli),  
e formano una *foliazione* di superfici.

Il teorema di Frobenius vale **localmente** cioè  $\Delta(x)$  è integrabile in un  
intorno di  $x_0$  se e solo se è involutiva nell'intorno. Questo significa che il  
sistema potrebbe ancora uscire dalla intersezione delle superfici integrali,  
allontanandosi sufficientemente dal punto iniziale. Per avere un risultato  
valido *in grande* ho bisogno di una delle ulteriori condizioni

1.  $\Delta(x)$  **analitica** (cioè tutti i suoi campi vettoriali sono analitici) su  $M$   
analitico, ovvero
2.  $\Delta(x) \in C^\infty$  su  $M \in C^\infty$ , con  $\dim \Delta(x) = \text{cost}$

In queste ipotesi,  $\forall x_0 \in M$  esiste una *sottosuperficie integrale massima* che  
non può essere abbandonata dal sistema.

**Esempio**  $x \in \mathbb{R}^3$

$$g_1(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ x_3 \\ -x_2 \end{bmatrix}; \quad g_2(x) = \begin{bmatrix} -x_3 \\ 0 \\ x_1 \end{bmatrix}$$

$\Delta(x) = \text{span} \{g_1, g_2\}$  ha dimensione 2 eccetto in  $x_3 = 0$ .

$$g_3 = [g_1, g_2] = \begin{bmatrix} +x_2 \\ -x_1 \\ 0 \end{bmatrix} = -\frac{x_1}{x_3}g_1 - \frac{x_1}{x_3}g_2 \in \Delta(x)$$

eccetto in  $x_3 = 0$ .

Per il teorema di Frobenius, ci attendiamo l'esistenza di una varietà integrale di dimensione 2: infatti, le superfici sferiche  $\lambda(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \text{cost.}$  sono tali per cui

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x} \begin{bmatrix} g_1(x) & g_2(x) \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -x_3 \\ x_3 & 0 \\ -x_2 & x_1 \end{bmatrix} = 0$$

È possibile vedere facilmente che la evoluzione di un sistema dinamico  $\dot{x} = g_1(x)u_1 + g_2(x)u_2$ , non abbandonerebbe mai la superficie sferica sulla quale si trovano le sue condizioni iniziali: infatti, sarebbe  $\dot{\lambda} = \frac{\partial \lambda}{\partial x} \dot{x} = 0$ , per qualsiasi valore dei controlli  $u_1(t), u_2(t)$ .

## 3.2 Raggiungibilità dei Sistemi Nonlineari

Torniamo ora al sistema in forma affine nel controllo

$$\dot{x} = f(x) + g_1(x)u_1(t) + g_2(x)u_2(t) + \dots + g_m(x)u_m(t)$$

Una definizione di raggiungibilità per questo sistema potrebbe essere data così:

*Un sistema è raggiungibile se  $\forall x_1, x_2 \in X$  esiste  $T(< \infty)$ ,  $u : [0, T] \rightarrow U$  tale che  $x(T, x_1, u) = x_2$ .*

Per questa definizione “in grande” di raggiungibilità non esistono, al momento attuale, criteri di verifica di facile e generale applicabilità.

Perfino per una versione “locale” del tipo

*Un sistema è localmente raggiungibile in  $x_1$  se,  $\forall x_2$  in un intorno di  $x_1$ , esiste  $T(< \infty)$ ,  $u : [0, T] \rightarrow U$  tale che  $x(T, x_1, u) = x_2$ .*

non si hanno al momento soddisfacenti criteri di verifica. Il problema è che la possibilità di poter raggiungere un punto anche vicino può dipendere per

sistemi nonlineari generali anche dal comportamento del sistema in regioni lontane: ad esempio, si consideri il sistema in  $\mathbb{R}^2$

$$\dot{x} = \begin{cases} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_1, & x_1 < 1 \\ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_2, & x_1 \geq 1 \end{cases}$$

in cui tutti i punti di un intorno dell'origine sono raggiungibili, ma solo dopo aver raggiunto il semipiano chiuso  $x_1 \geq 1$ . L'analisi di sistemi discontinui come questo è un argomento di ricerca attualmente ancora molto aperto.

Questo tipo di difficoltà è legata al fatto che i sistemi nonlineari possono non essere analitici. I sistemi analitici sono quelli in cui i campi vettoriali di deriva e di controllo sono tutti esprimibili in serie di Taylor attorno al punto iniziale. Questo significa che l'informazione locale sul sistema (cioè il valore dei campi e di tutte le loro derivate nel punto iniziale) è sufficiente a determinare tutto l'andamento del campo anche a distanza finita dal punto iniziale. Si può notare che l'esempio precedente non è analitico. Considereremo quindi una ulteriore restrizione del concetto di raggiungibilità, detta raggiungibilità *locale–locale*.

Introduciamo la notazione  $R_T^V(x_0)$  per indicare l'insieme dei punti raggiungibili da  $x_0$  al tempo  $T > 0$  seguendo traiettorie che rimangono, per  $t \leq T$ , contenute nell'intorno  $V$  di  $x_0$ .

*Un sistema non lineare è detto*

- raggiungibile localmente–localmente (*in sigla, l.l.c.*) da  $x_0$  se, per ogni intorno  $V$  (arbitrariamente piccolo) esiste  $T$  tale che  $R_T^V(x_0)$  contiene un intorno di  $x_0$ ;
- raggiungibile localmente in tempo breve (*“small-time locally controllable”, o s.t.l.c.*) da  $x_0$  se, per ogni  $V$  e per ogni  $T$  (arbitrariamente piccoli),  $R_T^V(x_0)$  contiene un intorno di  $x_0$ ;

Nelle definizioni appena date, si sostituisce la parola “raggiungibile” con la parola “accessibile” quando si possa solo dimostrare che  $R_T^V(x_0)$  contiene un insieme aperto non vuoto di  $M$  (cioè, non un intorno).

Si è visto in precedenza come le direzioni indicate dalle Lie bracket tra i campi vettori della distribuzione di controllo siano anch'esse possibili “direzioni di moto” locali del sistema. È naturale perciò considerare la seguente

catena (o “filtrazione”) di distribuzioni

$$\begin{aligned}\Delta_0 &= \text{span}(g_1, \dots, g_m); \quad \Delta = \text{span}(f, g_1, \dots, g_m) \\ \Delta_1 &= \text{span}(g_1, \dots, g_m, [f, g_1], \dots, [f, g_m], \\ &\quad [g_1, g_2], \dots, [g_1, g_m], \dots) = \\ &= [\Delta_0, \Delta] + \Delta_0 \\ &\vdots = \vdots \\ \Delta_k &= \Delta_{k-1} + [\Delta_{k-1}, \Delta]\end{aligned}$$

La dimensione di  $\Delta_k(p)$  in un punto  $p$  è non decrescente, e limitata superiormente (dalla dimensione dello spazio di stato).

Se tutte le distribuzioni ottenute sono non-singolari in  $p$ , allora la dimensione di  $\Delta_k$  è strettamente crescente sino a che, per qualche  $k$ , si avrà  $\dim \Delta_k = \dim \Delta_{k-1}$ . A questo  $k$  la filtrazione si arresta (ogni successiva iterata offrirebbe ancora la stessa distribuzione). Si noti che  $k \leq n - m + 1$ , quindi la procedura è computabile in un numero finito di passi. La distribuzione  $\Delta_k$  viene detta *distribuzione di accessibilità* per il sistema.

Se le distribuzioni ottenute sono singolari in  $p$ , la filtrazione deve procedere sinché non si giunge ad una distribuzione nonsingolare di dimensione pari alla successiva. In questo caso, il numero  $k$  di passi necessari alla procedura non è superiormente limitabile a priori.

In termini della distribuzione di accessibilità si può formulare il seguente

**Teorema di Chow.** Se  $\dim \Delta_k(p) = \dim \Delta_{k-1}(p) = n$  allora il sistema è l.l. accessibile.

Se  $\dim \Delta_k = \dim \Delta_{k-1} = r < n$  in tutti i punti di un intorno di  $p$ , l'insieme raggiungibile l.l. in tempo  $T$   $R_T^V$  è contenuto in una sottosuperficie  $S_p$  di dimensione  $r$  dello spazio di stato.  $R_T^V$  contiene un sottoinsieme aperto di  $S_p$ , quindi il sistema ristretto su  $S_p$  è l.l. accessibile.

In generale la accessibilità di un sistema non implica la raggiungibilità. Ad esempio si consideri il seguente sistema

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2^2 \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2^2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

Il sistema è localmente accessibile da  $p$ , come si verifica dal teorema di Chow:

a) Per  $p_2 \neq 0$ ,  $\dim \Delta_1(p) = 2$ ;

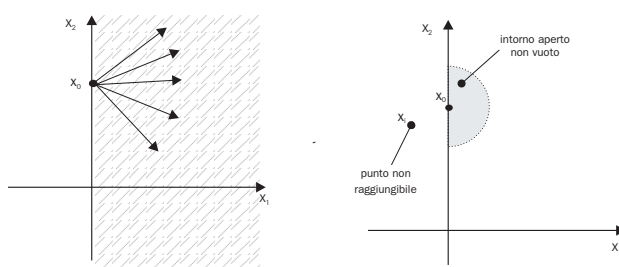


Figura 3.6: Sistema accessibile ma non raggiungibile

- b) Per  $p_2 = 0$ ,  $\Delta_1 = \text{span} \{g, [f, g]\}$  è singolare in  $p$ , ma  $\Delta_2 = \text{span} \{g, [f, g], [g, [f, g]]\}$  ha dimensione 2 ovunque.

Dalla definizione di locale accessibilità,  $R_T^V(p)$  contiene un insieme aperto non vuoto di  $M$  (un sottoinsieme del semipiano destro). Il sistema non è però raggiungibile perché non posso raggiungere punti, anche arbitrariamente vicini al punto iniziale, appartenenti al semipiano sinistro (quindi  $R_T^V(p)$  non contiene un intorno): infatti le evoluzioni dello stato, a partire da punti  $p = (p_1, p_2)$ , appartengono al semipiano a destra della retta  $x = p_1$  perché  $\dot{x}_1$  è sempre positivo.

In certi casi si può decidere la raggiungibilità (anche in tempo breve) data la accessibilità (l.l.). In particolare, è ovvio che la accessibilità è condizione necessaria per la raggiungibilità. In termini semplificativi, la raggiungibilità sarà possibile quando gli effetti del vettore di deriva possono essere “annullati” dal controllo. Si può dimostrare che le seguenti, assieme alla condizione di accessibilità, sono condizioni sufficienti (di crescente generalità e complessità) per la raggiungibilità in tempo breve a partire da un punto  $p$ :

1.  $f(x) \equiv 0, \forall x \in B_\epsilon(p)$ ;
2.  $f(x) \in \text{span} [g_1(x) \cdots g_m(x)], \forall x \in B_\epsilon(p)$ ;
3.  $f(p) = 0$  e  $\dim \Delta_L(p) = n$ , dove  $\Delta_L = \text{span} \{g_i, [f, g_i], \dots, \text{ad}_f^{\mu_i} g_i, \dots\}$ , con  $i = 1, \dots, m$  e per qualsiasi  $\mu_i \in \mathbb{N}$ ;
4.  $f(p) = 0$  e  $\dim (\Delta_L(p) + \Delta_{G1}(p)) = n$ , dove  $\Delta_{G1} = \text{span} \{[g_i, g_j]\}$ , per tutti gli  $i, j$  da 1 a  $m$ ;
5.  $f(p) = 0$ , e ogni Lie bracket tra le  $f$  e le  $g$  in cui appaiano un numero dispari di  $f$  e un numero pari (diverso da zero) di  $g$  (“bad” brackets), sia combinazione lineare di bracket con un minor numero totale di  $f$  e  $g$ .

Si noti che i criteri 1, 2, sono molto più restrittivi perché richiedono proprietà che devono essere verificate su tutto un intorno di  $p$ , mentre le altre condizioni vengono valutate solo in  $p$  stesso.

La condizione 1) è particolarmente interessante per lo studio della olonomia di vincoli cinematici. Vediamo esplicitamente la procedura di analisi in questo caso.

Sia dato un sistema meccanico con  $n$  configurazioni  $q$ , sottoposto a  $m$  vincoli cinematici in forma di Pfaff,  $A(q)\dot{q} = 0$ . Si consideri la distribuzione  $\mathcal{S} = \mathcal{A}^\perp$  che annichila la distribuzione dei vincoli  $\mathcal{A}(q) = \text{rowspan } A(q)$ . Sia  $S(q)$  una base di  $\mathcal{S}$ , e siano  $s_i(q)$  i campi vettori che ne formano le colonne. La forma di controllo per il sistema in esame è pertanto

$$\dot{q} = s_1(q)u_1 + \cdots + s_{n-m}(q)u_{n-m}$$

Si costruisca la filtrazione

$$\begin{aligned} \Delta_0 &= \text{span}(s_1, \dots, s_{n-m}) \\ \Delta_1 &= [\Delta_0, \Delta_0] + \Delta_0 \\ &\vdots \\ \Delta_k &= \Delta_{k-1} + [\Delta_{k-1}, \Delta_0] \end{aligned}$$

Sia  $d = \dim \Delta_k$  costante in un intorno di un punto  $\bar{q}$ . Allora, le configurazioni del sistema non possono abbandonare (almeno localmente) una superficie di dimensione  $d$  nello spazio di stato, il che implica che

- $n - d$  degli  $m$  vincoli sono olonomi;
- i restanti  $m - (n - d)$  sono anolonomi;

Si dice in questo caso che il sistema ha grado di anolonomia  $m - n + d$ . Nel caso  $d = n$ , il sistema (completamente raggiungibile) è detto massimamente anonomo.

Per quanto riguarda la condizione 2), la sua interpretazione è evidente:  $f(x)$  in questo caso può essere “neutralizzato” da opportuni controlli, e l’analisi viene ricondotta al caso precedente.

Per quanto riguarda la condizione 3), si consideri un sistema lineare

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m$$

come sistema nonlineare, cioè  $f(x) = Ax$  e  $g_i(x) = B_i$ ,  $i$ -esima colonna di  $B$ .

Svolgendo i calcoli si ottiene  $[g_i, g_j] = 0$  e  $ad_f^k g_i = (-1)^k A^k B_i$ . Infatti,  $[g_i, ad_f^k g_j] = 0$ ,  $\forall i, j, k$  e  $[f, g] = [Ax, b_i] = -Ab_i$ ,  $[f, [f, g]] = [Ax, -Ab_i] = A^2 b_i$ , e  $[g_i, g_j] = [b_i, b_j] = 0$

Pertanto se la distribuzione

$$\begin{aligned}\Delta_k &= \text{span} \left[ g_1 : [f, g_1] : \dots : \text{ad}_f^k(g_1) : \dots : g_2 : [f, g_2] : \dots : \text{ad}_f^k(g_2) : \dots \right] \\ &= \text{span} [B, AB, \dots, A^k B]\end{aligned}$$

ha rango  $n$  per qualche  $k$ , il sistema è raggiungibile. Ci si riconduce quindi al consueto test lineare. Per Cayley-Hamilton, sappiamo che è sufficiente studiare  $\Delta_{n-1} = \Delta_L$ .

Si consideri ora un sistema  $\dot{x} = f(x) + G(x)u$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$  che abbia equilibrio nell'origine (dopo eventuale traslazione), e lo si scriva nella forma

$$\dot{x} = f(x) + G(x)u = Ax + p(x) + (B + r(x))u$$

con  $\|p(x)\|, \|r(x)\|$  infinitesimi di ordine almeno due.

Si può mostrare facilmente che questa coincide, a meno di infinitesimi di ordine superiore, con quella della approssimazione lineare. Pertanto, la raggiungibilità della approssimazione lineare in un punto di equilibrio è sufficiente per la raggiungibilità locale in tempo breve del sistema nonlineare originale.

Infine, l'applicazione all'esempio bidimensionale con termine di deriva sopra riportato della condizione 5) e' possibile solo per  $p_2 = 0$ ; la condizione non è soddisfatta proprio a causa della bad bracket  $[g, [f, g]]$ .

### Accessibilità in senso Debole

La distribuzione su cui si stabilizza la filtrazione di accessibilità,  $\Delta_k$ , coincide dunque per i sistemi lineari con la immagine della matrice di raggiungibilità

$$R = [B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B]$$

che è a sua volta uguale al sottospazio raggiungibile dall'origine (in un tempo arbitrario)  $\mathcal{R}_0 = \text{span } R$ .

In generale, l'insieme di raggiungibilità entro il tempo  $T$  da un punto  $x_0 \neq 0$ , per un sistema lineare  $\dot{x} = Ax + Bu$  non completamente raggiungibile, è dato da

$$\mathcal{R}(x_0, T) = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n | \bar{x} = \exp(A\tau)x_0 + v, 0 \leq \tau \leq T, v \in \mathcal{R}_0\}.$$

Questo tipo di raggiungibilità è da considerarsi più debole di quella ottenuta dalla origine per i punti in  $\mathcal{R}_0$ , nel senso che alcuni punti possono essere raggiungibili solo in un tempo  $\tau$  fissato.



Per il caso nonlineare, si consideri dunque l'insieme

$$R^V(x_0, T) = \bigcup_{\tau \leq T} R^V(x_0, \tau),$$

ovvero l'insieme degli  $x$  che possono essere raggiunti in tempo  $t \leq T$  restando vicini (dentro  $V$ ) a  $x_0$ .

Le definizioni sopra date di accessibilità e raggiungibilità locale-locale si applicano in senso debole se vi si considera  $R^V(x_0, T)$  al posto di  $R_T^V(x_0)$ . Ovviamente, se un sistema è accessibile (nel primo senso, "forte"), esso è anche accessibile in senso debole.

Un test di accessibilità debole nei sistemi nonlineari è basato sulla filtrazione

$$\begin{aligned} \Gamma_0 &= \text{span}(f, g_1, \dots, g_m) \\ \Gamma_1 &= \Gamma_0 + [\Gamma_0, \Gamma_0] \\ &\vdots \\ \Gamma_k &= \Gamma_{k-1} + [\Gamma_{k-1}, \Gamma_0] \end{aligned}$$

che si interrompe quando  $\dim \Gamma_k = \dim \Gamma_{k-1} = d$  quindi il sistema è l.l.d.a. se e solo se  $d = n$ .

**Esempio:** Differenze tra la locale forte accessibilità e la locale accessibilità. Limitiamo lo studio ad un sistema lineare del tipo

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} u$$

questo sistema non è raggiungibile perché la matrice di raggiungibilità ha rango pari a 1

$$[BAB] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

L'evoluzione libera del sistema è

$$\begin{cases} x_1(t) = x(0)e^t \\ x_2(t) = x(0)e^t \end{cases}$$

la traiettoria del sistema in evoluzione libera è una retta di pendenza  $\frac{\pi}{4}$  sul piano  $(x_1, x_2)$ . La distribuzione  $(n-1)$ -sima relativa al test di locale debole accessibilità sarà

$$\Gamma_{n-1} = \text{span}[Ax] + \text{span}[B, AB]$$

mentre la distribuzione  $(n-1)$ -sima relativa al test di locale forte accessibilità è

$$\Delta_{n-1} = \text{span}[B, AB]$$

Ad esempio, ci chiediamo se a partire dallo stato iniziale  $x_0 = (1, 1)$  possiamo raggiungere un punto  $x_c = (0, 4)$  ad un tempo  $T$  arbitrariamente fissato. Questo non è possibile perché dal test di locale forte accessibilità vediamo che le direzioni possibili per questo tipo di controllo appartengono allo  $\text{span} [BAB]$ . Questo non vuol dire che il punto  $x_c$  non sia raggiungibile (infatti lo è al tempo  $T \log(2)$ ): il test di locale accessibilità in  $x_c$  infatti indica  $\Gamma_1 = \text{span} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ .

**Esempio** Sistemi lineari tempo varianti

Possiamo riportarci ad un sistema non lineare tempo invariante ponendo un nuovo vettore di stato  $z \in \mathbb{R}^{n+1}$ :

$$z = \begin{bmatrix} x \\ t \end{bmatrix} ; \dot{z} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{t} \end{bmatrix} = f(z) + g(z)u = \begin{bmatrix} A(t)x \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B(t) \\ 0 \end{bmatrix} u$$

Calcoliamo adesso le Lie brackets:  $[g_i, g_j] = 0$ ,

$$\begin{aligned} [f, g_i] &= \begin{bmatrix} 0 & B_i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Ax \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A & \dot{Ax} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_i \\ 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \dot{B}_i - AB_i \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left[ \frac{d}{dt} - A \right] B_i \\ 0 \end{bmatrix} \\ [f, [f, g_j]] &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{d}{dt} [B - AB] \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Ax \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A & \dot{Ax} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{B} - AB \\ 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \left[ \frac{d}{dt} - A \right] \left[ \dot{B} - AB \right] \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left[ \frac{d}{dt} - A \right]^2 B \\ 0 \end{bmatrix} \\ [g_i, [g, g_j]] &= 0 \quad ad_f^K g = \begin{bmatrix} \left[ \frac{d}{dt} - A \right]^k B \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Indicando con  $\Delta$  l'operatore differenziale  $\left[ \frac{d}{dt} - A \right]$ , il sistema è dunque raggiungibile se

$$\text{rank} \left[ \left[ B : \Delta B : \Delta^2 B : \dots \right] \right] = n$$

**Esempio** Raggiungibilità sistema altalena

Supponiamo che un bambino di massa  $m$  si alzi e si abbassi sulla altalena, variando così la lunghezza  $l$ . Le equazioni del moto sono ottenute facilmente con il metodo di Eulero-Lagrange,

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin \theta - 2\frac{\dot{\theta}}{l} \dot{l}$$

e ponendo

$$\theta = x_1, \dot{\theta} = x_2, l = x_3, \dot{l} = u$$

si ha in forma di controllo

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u; \quad f(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -g \frac{\sin x_1}{x_3} \\ 0 \end{bmatrix}; \quad g(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \frac{x_2}{x_3} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Si ottiene poi

$$[f, g] = \begin{bmatrix} -2 \frac{x_2}{x_3} \\ g \frac{S_1}{x_3^2} \\ 0 \end{bmatrix}; \quad [f, [f, g]] = \begin{bmatrix} g \frac{S_1}{x_3^2} \\ -g C_1 \frac{x_2}{x_3} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{span} \{f, g, [f, g], [f, [f, g]]\} = 3$$

eccetto che nei punti per cui  $x_2 = 0$ ,  $x_1 = 0 + k\pi$ ; quando l'altalena si trova in queste condizioni occorre uno start per iniziare a muoversi.

**Esempio** Sistemi in forma concatenata

Un sistema non lineare del tipo

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u_1 \\ \dot{x}_2 = u_2 \\ \dot{x}_3 = x_2 u_1 \\ \dot{x}_4 = x_3 u_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n = x_{n-1} u_1 \end{cases}$$

si dice in forma concatenata. Alcuni importanti sistemi robotici possono essere scritti in questa forma, come ad esempio un veicolo a singolo asse o unicyclo ( $n = 3$ ), un veicolo a doppio asse ( $n = 4$ ), e un veicolo a doppio asse con  $m$  rimorchi ( $n = 4 + m$ ). È un sistema senza deriva, con campi di controllo

$$g_1 = (1 \ 0 \ x_2 \ x_3 \ \cdots \ x_{n-1})^T; \quad g_2 = (0 \ 1 \ 0 \ 0 \ \cdots \ 0)^T$$

Calcolando le Lie brackets si ha

$$[g_1, g_2] = -\frac{\partial g_1}{\partial x} g_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = e_3$$

$$[g_2, [g_1, g_2]] = 0 ; [g_1, [g_1, g_2]] = -\frac{\partial g_1}{\partial x} [g_1, g_2] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = e_4$$

e in generale

$$ad_{g_1}^k g_2 = e_{k+2}$$

Al (n-2)-esimo livello di Lie Brackets si ottiene quindi la completa raggiungibilità. Ne consegue che è possibile “parcheggiare” in configurazione arbitraria un veicolo con un numero arbitrariamente elevato di rimorchi (naturalmente, le manovre risulteranno molto complesse, ricorrendo a commutatori di ordine tanto più elevato quanto più alto è il numero di rimorchi).

### 3.3 Osservabilità

Riprendiamo lo studio del modello completo:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x)u_i \\ y_j = h_j(x) \quad , j = 1 \dots p \end{cases}$$

**Def:** Due stati sono detti **indistinguibili**, se per ogni  $u \in U$ , insieme dei controlli ammissibili, le evoluzioni a partire da  $x_1$  e  $x_2$  danno la stessa uscita  $y(t)$ .

Anche in questo caso la definizione si specializza in senso locale considerando in  $U$  solo controlli che, per  $T$  piccoli, non facciano allontanare  $x(t)$  da un intorno di  $x_1$  (e di  $x_2$ ). Per verificare l’uguaglianza di due funzioni  $y(x_1, u_1)$  e  $y(x_2, u_2)$ , in ogni istante  $t$ , è sufficiente ( se sono analitiche ) confrontare i valori di tutte le loro derivate in  $t = 0$ . Sarà dunque

$$y_i(0) = h_i(x_0)$$

$$\dot{y}_i(0) = \left. \frac{\partial h_i}{\partial x} \dot{x} \right|_0 = \left. \frac{\partial h_i}{\partial x} f(x) + \sum_j \frac{\partial h_i}{\partial x} g_j(x) u_j \right|_0 = L_g h_i(x_0) + \sum_j L_g h_i u_j(0)$$

e così via .

**Def:** Chiamo **Spazio di osservazione** lo spazio lineare di funzioni che contiene  $h_1, \dots, h_p$  e tutte le derivate di Lie  $L_{x_1}, \dots, L_{x_k} h_j$ , con

$$\begin{cases} x_i = f, g_1, \dots, g_m \\ k = 1, 2, \dots \end{cases} .$$

In altre parole, tutte le funzioni (dello stato) che appaiono nelle uscite, moltiplicate per funzioni degli ingressi ( $u_i, \dot{u}_i, \dot{u}_i^2$ , etc. ). Questo spazio è anche lo spazio delle funzioni del tipo

$$L_{z_1} L_{z_2} \dots L_{z_k} h_j(x) \quad k = 1, 2, \dots$$

con

$$z_i = f(x) + \sum_{j=1}^m g_j(x) u_j^{(i)} \quad , \quad \underline{u}^{(i)} \text{ vettore costante}$$

Cioè esplicitamente lo spazio delle variazioni delle uscite corrispondenti a ingressi costanti atratti, di piccola durata. Infatti

$$L_{x_1+x_2} \lambda = \frac{\partial \lambda}{\partial x}(x_1 + x_2) = L_{x_1} \lambda + L_{x_2} \lambda$$

$$L_x(\lambda_1 \lambda_2) = L_x \lambda_1 + L_x \lambda_2$$

Quindi essendo ogni  $z_i$  combinazione lineare di  $x_i$  e viceversa, anche le  $L_{z_i}$  e  $L_{x_i}$  lo sono. Lo spazio di ossevabilità  $\Theta$  contiene tutte le funzioni  $h(x)$  e le loro derivate di ogni ordine calcolate lungo le traiettorie del sistema. Intuitivamente se le funzioni in  $\Theta$  sono indipendenti la loro eguaglianza per ogni  $u$  implica che sono applicate alla stessa  $x$ .

**Esempi:**

In un intorno di 0, in  $\mathbb{R}^1$ ,  $\sin(x)$  è invertibile.

$$\sin(x_1) = \sin(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \text{ ( localmente )}$$

invece  $\cos(x)$  non lo è.

In  $\mathbb{R}^2$  le funzioni  $\begin{cases} \sin(x+y) \\ x \end{cases}$  sono indipendenti e

$$\begin{cases} \sin(x_1 + y_1) = \sin(x_2 + y_2) \\ x_1 = x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases}$$

mentre per le funzioni  $\begin{cases} \sin(x+y) \\ x^2 \end{cases}$  questa proprietà non vale.

Un metodo per stabilire l'indipendenza di funzioni è dato dal teorema del Dini. infatti

$$J \begin{bmatrix} \sin(x+y) \\ x \end{bmatrix} \Big|_0 = \begin{bmatrix} \cos(x+y) & \cos(x+y) \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Big|_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J \begin{bmatrix} \sin(x+y) \\ x \end{bmatrix} \Big|_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Si può notare come lo jacobiano nel primo caso generi due vettori linearmente indipendenti mentre nel secondo caso generi vettori linearmente dipendenti. Da questo esempio risulta chiara l'importanza delle derivate  $\frac{\partial}{\partial x}$  nel decidere l'indipendenza di funzioni.

Due funzioni  $f_1(x)$ ,  $f_2(x)$  si dicono indipendenti se i covettori

$$df_1(x) = \frac{\partial f_1}{\partial x} ; df_2(x) = \frac{\partial f_2}{\partial x}$$

sono indipendenti ( in un punto o in un insieme )

**Def:** si definisce la **Codistribuzione di osservabilità** come

$$d\mathcal{O} = \text{span} \left\{ \frac{\partial h_1}{\partial x} , \dots , \frac{\partial h_p}{\partial x} , \frac{\partial L_f h}{\partial x} , \dots \right\} = \text{span} \{ d\lambda(x), \lambda \in \theta \}$$

Se  $\dim d\mathcal{O} = n$ , il sistema è localmente osservabile (in un punto o in un insieme) , cioè tra i punti vicini a  $x_0$ , l'unico indistinguibile è  $x_0$  stesso.

Si definisce  $\Omega$  la matrice tale che  $\text{rowspan } \Omega = d\mathcal{O}$ .

Se  $\Omega$  ha rango  $n$  in  $\bar{x}$ ,  $\Omega^\perp = \mathcal{N}(\Omega) = 0$  e quindi non esiste alcuno stato  $\bar{x} + \delta x$  in un intorno di  $\bar{x}$  tale che  $y(\bar{x} + \delta x, u) - y(\bar{x}, u) = \Omega \delta x = 0$ , cioè che lasci le funzioni  $y(t), \dot{y}(t), \dots$  invariate .

Se invece  $\dim(d\mathcal{O}) = k < n$  con  $k = \text{cost}$  esisteranno  $k$  funzioni  $\lambda(x)$  tali che  $d\mathcal{O} = \text{span} \{ d\lambda_1 \dots d\lambda_k \}$ . Le superfici  $\lambda(x) = \text{cost}$  sono tali per cui traiettorie uscenti da due stati appartenenti all'intersezione di tutte le superfici sono indistinguibili dall'uscita.

L'osservabilità locale è una proprietà che non implica l'osservabilità globale, come è giustificato attendersi per sistemi non lineari.

Ad esempio il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = u & f(x) = 0 & g(x) = 1 \\ y_1 = \sin \alpha x \\ y_2 = \cos \alpha x \end{cases}$$

ha spazio di osservabilità

$$d\mathcal{O} = \{ \sin \alpha x, \cos \alpha x, L_f y_1 = 0, L_f y_2 = 0, L_g y_1 = \alpha \cos \alpha x, L_g y_2 = -\alpha \sin \alpha x \}$$

la corrispondente codistribuzione di osservabilità è data da

$$d\mathcal{O} = \text{span} \{ \cos \alpha x, \sin \alpha x \}$$

da cui  $\dim(d\mathcal{O}) = 1$ , per ogni valore di  $x$ . Il sistema è localmente osservabile ovunque; comunque gli stati iniziali  $x_0$  e  $x_1 = x_0 + \frac{2K\pi}{\alpha}$  **non** sono distinguibili.

**Esempio** Caso lineare

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu & f(x) = Ax & g_i(x) = b_i \\ y = Cx & h_i(x) = c_i x \end{cases}$$

Lo spazio di osservabilità sarà

$$\theta = \{ c_1 x, \dots, c_m x, L_f h_1 = c_1 A x, \dots, L_{g_i} h_j = c_j b_i u, \dots, L_f L_f h_1 = c_1 A^2 x, \dots \}$$

la codistribuzione di osservabilità

$$d\mathcal{O} = \text{span} \{ c_1; \dots; c_m; c_1 A; \dots; c_m A; c_1 A^2; \dots \}$$

Il rango della codistribuzione coincide col rango della matrice

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \dots \end{bmatrix}$$

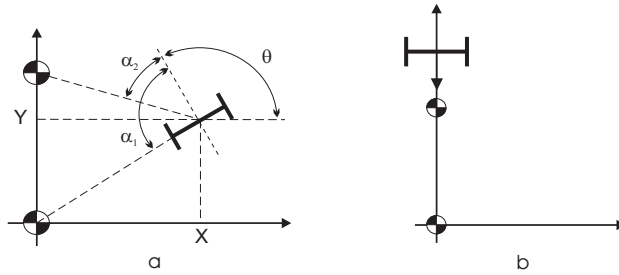
e quindi col classico criterio ( di Kalman ) di osservabilità.

Si noti infine che se  $\text{rank} d\theta < n$  in un punto isolato ( di singolarità ), non si può escludere la locale osservabilità .

**Esempio**

$$\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ y = x^3 \end{cases}$$

questo sistema è osservabile ma  $\dim d\mathcal{O} = \dim x^3 = 0$  in  $x = 0$ .



Se il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g_1(x)u_1 + \dots \\ y_1 = h_1(x) \\ y_2 = \dots \end{cases}$$

è localmente accessibile e analitico, e  $M$  è convesso, allora è localmente osservabile se e solo se tiene la condizione di rango ( la codistribuzione non è singolare ).

### Esempio

Consideriamo ancora il modello semplificato di un'auto assieme a due equazioni di misura degli angoli sotto i quali una telecamera a bordo del veicolo osserva due punti fissi di traguardo.

$$q = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta \end{bmatrix} \quad \alpha_1 = \pi - \theta + \arctan \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix} \quad \alpha_2 = \pi - \theta + \arctan \begin{bmatrix} (1-y) \\ x \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{q} = g_1(q)u_1 + g_2(q)u_2 = \begin{bmatrix} \cos(q_3) \\ \sin(q_3) \\ 0 \end{bmatrix} u_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_2 \\ \alpha_1 = \pi - q_3 + \arctan \begin{bmatrix} q_2 \\ q_1 \end{bmatrix} \\ \alpha_2 = \pi - q_3 - \arctan \begin{bmatrix} (1-q_2) \\ q_1 \end{bmatrix} \end{cases}$$

Lo spazio di osservazione contiene

$$L_{g_1}h_1 = \frac{\partial h_1(x)}{\partial x} g_1(x) = \frac{x \sin \theta - y \cos \theta}{x^2 + y^2}$$

$$L_{g_2}h_1 = -1$$



$$L_{g_1} h_2 = \frac{(d-y) \cos \theta + x \sin \theta}{x^2 + (y-d)^2}$$

$$L_{g_2} h_2 = -1$$

$$L_{g_2} L_{g_1} h_1 = \frac{x \cos \theta + y \sin \theta}{x^2 + y^2}$$

Gli elementi fino ad ora calcolati permettono di scrivere

$$\Theta = h_1, h_2, L_{g_2} h_1, L_{g_1} h_2, L_{g_2} h_2, L_{g_2} L_{g_1} h_1,$$

Non tutte queste funzioni sono indipendenti, infatti

$$\frac{\partial h_1}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{-y}{x^2 + y^2} & \frac{x}{x^2 + y^2} & -1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial h_2}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{d-y}{x^2 + (d-y)^2} & \frac{x}{x^2 + (d-y)^2} & -1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial L_{g_1} h_1}{\partial x} = \left[ \frac{\sin \theta [x^2 + y^2] - 2x[x \sin \theta - y \cos \theta]}{[x^2 + y^2]^2}, \frac{-\cos \theta [x^2 + y^2] - 2y[x \sin \theta - y \cos \theta]}{[x^2 + y^2]^2}, \frac{x \cos \theta + y \sin \theta}{x^2 + y^2} \right]$$

$$\frac{\partial L_{g_2} h_1}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial L_{g_1} h_2}{\partial x} = \left[ \frac{\sin \theta [x^2 + (d-y)^2] - 2x[x \sin \theta + (d-y) \cos \theta]}{[x^2 + (d-y)^2]^2}, \frac{-\cos \theta [x^2 + (d-y)^2] - 2(d-y)[x \sin \theta + (d-y) \cos \theta]}{[x^2 + (d-y)^2]^2}, \right. \\ \left. \frac{x \cos \theta - (d-y) \sin \theta}{x^2 + (d-y)^2} \right]$$

$$\frac{\partial L_{g_2} h_2}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial L_{g_2} L_{g_1} h_1}{\partial x} = \left[ \frac{\cos \theta [x^2 + y^2] - 2x[x \cos \theta + y \sin \theta]}{[x^2 + y^2]^2}, \frac{\sin \theta [x^2 + y^2] - 2y[x \cos \theta + y \sin \theta]}{[x^2 + y^2]^2}, \frac{-x \sin \theta + y \cos \theta}{x^2 + y^2} \right]$$

I campi covettoriali di  $d\theta$  calcolati hanno rango 3 laddove uno almeno dei seguenti determinanti é diverso da zero

$$D_1 = \det \begin{bmatrix} dh_1 \\ dh_2 \\ dL_{g_1} h_1 \end{bmatrix} = \frac{d(y-d)(y \cos \theta - x \sin \theta)}{[x^2 + (y-d)^2] [x^2 + y^2]^2}$$

$$D_2 = \det \begin{bmatrix} dh_1 \\ dh_2 \\ dL_{g_1} h_2 \end{bmatrix} = \frac{dy((y-d)\cos\theta - x\sin\theta)}{[x^2 + (y-d)^2][x^2 + y^2]^2}$$

$$D_3 = \det \begin{bmatrix} dh_1 \\ dh_2 \\ dL_{g_2} L_{g_1} h_1 \end{bmatrix} = -\frac{d(y-d)(y\sin\theta + x\cos\theta)}{[x^2 + (y-d)^2][x^2 + y^2]^2}$$

Si noti che i punti in cui sono situati i markers sono da escludersi perché in questi punti le funzioni  $h_1$  e  $h_2$  non sono definite.

Svolgendo i calcoli sui determinanti ottengo i seguenti risultati

$$D_1 = 0 \quad \text{se} \quad \begin{cases} y = d \\ d = 0 \\ \frac{y}{x} = \tan\theta \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} \theta = k\pi + \frac{\pi}{2} \\ x = 0 \end{cases}$$

$$D_2 = 0 \quad \text{se} \quad \begin{cases} y = 0 \\ d = 0 \\ \frac{y-d}{x} = \tan\theta \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} \theta = k\pi + \frac{\pi}{2} \\ x = 0 \end{cases}$$

$$D_3 = 0 \quad \text{se} \quad \begin{cases} y = d \\ d = 0 \\ \frac{y}{x} = -\tan\theta \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} \theta = k\pi + \frac{\pi}{2} \\ y = 0 \end{cases}$$

I tre minori si annullano contemporaneamente quando  $d = 0$ , cioè i markers sono coincidenti. Quindi se i markers coincidono il sistema non è osservabile e gli stati indistinguibili appartengono alla superficie  $\theta - \tan\frac{y}{x} = \pi$ .

Infine osserviamo che se rinunciamo ad uno degli ingressi ottengo

1. caso in cui rinuncio a ruotare

$$\omega = \dot{\theta} = 0 \rightarrow \det \begin{bmatrix} dh_1 \\ dh_2 \\ dL_{g_1} h_1 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} dh_1 \\ dh_2 \\ dL_{g_1} h_2 \end{bmatrix} = 0 \quad \text{per} \quad \begin{cases} \theta = k\pi + \frac{\pi}{2} \\ x = 0 \end{cases}$$

cioè siamo nella seguente situazione

2. caso in cui rinuncio a avanzare

$$v = 0 \rightarrow \begin{bmatrix} dh_1 \\ dh_2 \\ dL_{g_2} h_1 \end{bmatrix} = 0 \quad \text{sempre}$$

quindi il sistema non è osservabile solo ruotando.

# Capitolo 4

## Controllo di Sistemi Nonlineari

### 4.1 Introduzione

Vi sono due problemi fondamentali:

- Stabilizzazione
- Inseguimento (tracking)

La stabilizzazione consiste nel trovare un ingresso  $u(x)$  tale da rendere il sistema nonlineare  $\dot{x} = f(x, u(x))$ , asintoticamente (esponenzialmente) stabile attorno ad un punto di equilibrio  $x_0$ .

Il tracking si riferisce a un modello ingresso-uscita

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ y = h(x) \end{cases}$$

e cerca di trovare  $u(x)$  tale che  $y(t) \rightarrow y_d(t)$  asintoticamente.

Ricordiamo che la stabilizzabilità si può ottenere con metodi lineari “robusti”, localmente: ( $\dot{x} = Ax + Bu + \text{hot}$ ) se  $(A, B)$  è stabilizzabile.

I metodi di linearizzazione feedback sono più potenti perché:

- a) valgono anche per sistemi con linearizzato che abbia poli non controllabili, marginalmente stabili;
- b) pur se si ottengono ancora risultati solo locali, sono spesso più ampi.

### 4.2 Linearizzazione Input-Stati

L'idea è quella, dato un sistema nonlineare del tipo

$$\dot{x} = f(x) + \sum_j g_j(x)u_j$$

e un punto di equilibrio

$$f(x_0) = 0,$$

di trovare un cambio di variabili  $z = \Phi(x)$  tale che

$$\Phi(x_0) = 0$$

e

$$\dot{z} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \Big|_{x=\Phi^{-1}(z)} \dot{x} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \Big|_{x=\Phi^{-1}(z)} (f(\Phi^{-1}(z)) + \sum_j g_j(\Phi^{-1}(z))u_j) = Az + Bu$$

con  $z(0) = 0$ .

Cioè ottenere un sistema lineare nelle nuove variabili di stato  $z$  equivalente a quello iniziale, con punto di equilibrio in  $z(0)$ .

Questi sistemi sono sostanzialmente lineari, anche se appaiono in forma “travisata”.

Riconoscerli può non essere banale. Una condizione necessaria e sufficiente per capire se ci troviamo di fronte ad un sistema di questo tipo o meno, ci viene dal seguente teorema:

**Theorem 1 (H. Nijmijer, A.J. Van der Schaft)** *Dato il sistema*

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x)u_i$$

con  $f(x_0) = 0$ , esiste un cambiamento di variabili  $\Phi(x) = z$  tale che  $\dot{z} = Az + Bu$ , con  $(A, B)$  coppia controllabile, se e solo se

- a)  $\dim(\text{span}\{ad_f^j g_i(x), i = 1, \dots, m; j = 0, 1, \dots, n-1\}) = n \forall x \in \mathcal{B}(x_0)$ ;
- b)  $[ad_f^k g_i, ad_f^l g_j] = 0 \forall i, j, k, l; x \in \mathcal{B}(x_0)$ .

La condizione (a) corrisponde a chiedere che il linearizzato approssimante sia controllabile. La condizione (b) esclude tutti i sistemi onolomi.

Comunque i casi in cui si verificano queste ipotesi sono molto rari. In effetti, avendo il progettista a disposizione gli ingressi, egli ha la possibilità di riportare il sistema ad una forma lineare nella quale applicare le tecniche note del controllo lineare.

**Esempio.**

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\cos(\arcsin x_1)[x_2^{\frac{1}{3}} - u_1] \\ \dot{x}_2 = 3x_2^{\frac{2}{3}} \arcsin x_1 + 3x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{z}_1 = \arcsin x_1 \\ \dot{z}_2 = x_2^{\frac{1}{3}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} \dot{z}_1 &= \frac{1}{\cos(\arcsin x_1)} \dot{x}_1 \Big|_{x=\Phi^{-1}(z)} = -x_2^{\frac{1}{3}} + u_1 \Big|_{x=\Phi^{-1}(z)} = -z_2 + u_1 \\ \dot{z}_2 &= \frac{1}{3} x_2^{-\frac{2}{3}} \Big|_{x=\Phi^{-1}(z)} \dot{x}_2 = z_1 + z_2 \end{aligned}$$

cioè

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u$$

\*\*\*

Un problema di maggior interesse pratico è quello della linearizzazione in retroazione.

Si consideri ad esempio lo schema (SISO) in figura, nel quale l'ingresso  $u$  è ottenuto mediante retroazione (nonlineare) degli stati come

$$u(x) = \alpha(x) + \beta(x)v, \quad \beta(x) \neq 0 \text{ con } v \text{ nuovo riferimento.}$$

Vediamo quando è possibile trovare funzioni  $\alpha(x)$ ,  $\beta(x)$  e coordinate  $z = \Phi(x)$  tali che nelle nuove coordinate il sistema sia lineare

$$\dot{z} = Az + Bv$$

e controllabile <sup>1</sup>.

### Esempio.

Scriviamo l'equazione della dinamica di un link collegato a un motore elettrico:

$$\tau = I\ddot{q} + mgL \sin q.$$

Pongo

$$\tau = mgL \sin q + Iv \Rightarrow \ddot{q} = v$$

cioè

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} q \\ \dot{q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ \dot{q} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} v$$

---

<sup>1</sup> Siccome ci è data la possibilità di scegliere una retroazione degli stati sugli ingressi, possiamo sempre imporre la posizione dei poli di  $A$ , in particolare chiederemo che siano tutti nell'origine e che la coppia  $(A, B)$  sia in forma canonica di controllo:

$$A = \left( \begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ \vdots & & I & \\ 0 & & & \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right); \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**Esempio.**

Si supponga adesso che il link collegato al motore abbia una certa cedevolezza.

Le equazioni del sistema diventano

$$\begin{cases} I\ddot{q}_1 + mgL \sin q_1 + k(q_1 - q_2) = 0 \\ J\ddot{q}_2 - k(q_1 - q_2) = \tau \end{cases}$$

cioè

$$\begin{array}{l} x_1 = q_1 \\ x_2 = \dot{q}_1 \\ x_3 = q_2 \\ x_4 = \dot{q}_2 \end{array} \Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -\frac{mgL}{I} \sin x_1 - \frac{k}{I}(x_1 - x_3) \\ x_4 \\ \frac{k}{J}(x_1 - x_3) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{J} \end{pmatrix} \tau$$

Il controllo entra nella seconda equazione, e la nonlinearità nella prima.

Tipicamente, lo scopo è controllare il link  $q_1$ .

Si consideri l'uscita

$$y = q_1 = x_1$$

e le sue derivate

$$\dot{y} = x_2$$

$$\ddot{y} = -a \sin x_1 - b(x_1 - x_3)$$

$$y^{(iii)} = -a \cos x_1 \dot{x}_1 - b\dot{x}_1 + b\dot{x}_3 = -a \cos x_1 x_2 - bx_2 + bx_4$$

$$\begin{aligned} y^{(iv)} &= a \sin x_1 x_2^2 - a \cos x_1 \dot{x}_2 - b\dot{x}_2 + b\dot{x}_4 = \\ &= [a \sin x_1 x_2^2 + (a \cos x_1 + b)(a \sin x_1 + b(x_1 - x_3))] + b\frac{k}{J}(x_1 - x_3) + \frac{b}{J}\tau \end{aligned}$$

dove  $a = \frac{mgL}{I}, b = \frac{k}{I}$ .

Ponendo

$$\tau = -[a \sin x_1 x_2^2 + (\dots)(\dots) + b\frac{k}{J}(x_1 - x_3)]\frac{J}{b} + \frac{J}{b}v$$

si ottiene

$$y^{(iv)} = v.$$

Per stabilizzare  $q_1$ , basterà quindi porre

$$v = -c_0 y - c_1 \dot{y} - c_2 \ddot{y} - c_3 y^{(iii)}$$

da cui si ha

$$y^{(iv)} + c_3 y^{(iii)} + c_2 \ddot{y} + c_1 \dot{y} + c_0 y = 0$$

in questo modo, scegliendo i  $c_i$  opportunamente, si può fissare la posizione dei poli.

Si noti che sostanzialmente se scrivo

$$\begin{cases} z_1 = y = q_1 = x_1 \\ z_2 = \dot{z}_1 \\ z_3 = \dot{z}_2 \\ z_4 = \dot{z}_3 \end{cases} \quad \text{ottengo} \Rightarrow \dot{z} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} v$$

e la retroazione è  $v = kz$ ,  $k = -(c_0 \ c_1 \ c_2 \ c_3)$ .

\*\*\*

Vediamo il caso generale (SISO):

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u \\ y = h(x) \end{cases}$$

se il sistema è di questo tipo l'uscita non contiene  $u$ . Deriviamo l'uscita  $y$ :

$$\dot{y} = \frac{\partial h}{\partial x} \dot{x} = \frac{\partial h}{\partial x} (f(x) + g(x)u) = L_f h + L_g h u.$$

Se  $L_g h = 0$ , anche la derivata prima dell'uscita non contiene l'ingresso; calcoliamo le derivate successive dell'uscita

$$\begin{aligned} \ddot{y} &= \frac{\partial L_f h}{\partial x} \dot{x} = L_f^2 h + L_g L_f h u \\ &\vdots \\ y^{(r)} &= L_f^{(r)} h + L_g L_f^{(r-1)} h u \end{aligned}$$

Supponiamo che:

- $L_g L_f^i h = 0, \quad i = 0, 1, \dots, r-2$
- $L_g L_f^{(r-1)} h \neq 0$

sotto queste ipotesi il sistema si dice *di grado relativo*  $r$  (C.N.S.).

Quindi il grado relativo di un sistema rappresenta il numero di volte che si deve derivare la sua uscita per far comparire l'ingresso  $u$ .

Anche per i sistemi lineari può essere calcolato il grado relativo <sup>2</sup>.

---

<sup>2</sup> In questo caso corrisponde alla differenza poli-zeri nella funzione di trasferimento

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

Ricavando  $u$  dalla derivata  $r$ -esima di  $y$  e ponendo  $v = y^{(r)}$  otteniamo un ingresso in controreazione del tipo scelto all'inizio

$$u = -\frac{L_f^r h}{L_g L_f^{r-1} h} + \frac{1}{L_g L_f^{r-1} h} v = \alpha(x) + \beta(x)v$$

$$\alpha(x) = -\frac{L_f^r h}{L_g L_f^{r-1} h} \quad \beta(x) = \frac{1}{L_g L_f^{r-1} h}$$

con  $v = y^{(r)}$ .

Possiamo allora usare le derivate successive di  $y$  per un cambio di variabili

$$\begin{aligned} z_1 &= y = h(x) \\ z_2 &= \dot{y} = L_f h(x) \\ &\vdots \\ z_r &= y^{(r-1)} = L_f^{r-1} h(x) \end{aligned}$$

Nel caso in cui  $r = n$  resta solo da verificare che

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} h(x) \\ L_f h(x) \\ L_f^2 h(x) \\ \vdots \\ L_f^{r-1} h(x) \end{pmatrix}$$

sia un cambio di variabili ammissibile, cioè che le  $r$  funzioni siano *indipendenti*; ovvero le righe  $[dh(x_0), dL_f h(x_0), \dots, dL_f^{r-1} h(x_0)]$  sono indipendenti se  $r$  è il grado relativo <sup>3</sup>. Dunque, se il sistema iniziale ha grado relativo  $r = n$  rispetto all'uscita  $y$  e il cambio di variabili è ammissibile, posso scrivere il sistema nelle nuove coordinate <sup>4</sup> ed ottenere una *linearizzazione esatta*

$$\left. \begin{array}{l} L_g(Cx) = CB = 0 \\ L_g L_f(Cx) = CAB = 0 \\ \vdots \\ L_g L_f^{r-1}(Cx) = CA^{r-1}B \neq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow G(s) = \frac{b_0 + b_1 s + \dots + b_{n-r+1} s^{n-r}}{a_0 + a_1 s + \dots + a_n s^n}.$$

Infatti come è noto dalla teoria dei sistemi lineari, il grado relativo  $r$  è indicato dal primo coefficiente di Markov non nullo.

<sup>3</sup> Per la dimostrazione vedi Lemma 4.1.1 sul testo *Nonlinear Control Systems* di A. Isidori.

<sup>4</sup> Se  $L_g L_f^k h = 0, \forall k \Rightarrow h(x)$  non dipende da  $u$ ; infatti sotto queste ipotesi lo sviluppo in serie di Taylor di  $h(x)$  attorno ad un punto  $x_0$  assume la forma:

$$\sum_{k=0}^{\infty} L_f^k h(x)|_{x=x_0} \frac{(t-t_0)^k}{k!}.$$



in feedback

$$\begin{cases} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \vdots & \\ \dot{z}_{n-1} &= z_n \\ \dot{z}_n &= b(z) + a(z)u \end{cases}$$

che corrisponde ad un sistema lineare con reazione del tipo scelto,  $u = -\frac{b(z)}{a(z)} + \frac{v}{a(z)}$ .

Il fatto che il sistema abbia grado relativo  $r = n$ , non dipende solamente dalla forma del sistema, ma anche dalla funzione di uscita  $h(x)$  scelta.

In effetti, è facile dimostrare che  $\dot{x} = f(x) + g(x)u$  è linearizzabile in feedback se e solo se esiste una funzione  $\lambda(x)$  (che potrei non conoscere), che dà grado relativo  $r = n$ . Cerchiamo di capire per quali sistemi è possibile trovare  $\lambda(x)$ , che possa soddisfare:

$$\begin{cases} L_g h(x) = L_g L_f h(x) = \dots = L_g L_f^{n-2} h(x) = 0 \\ L_g L_f^{n-1} h(x) \neq 0 \end{cases}$$

equivalente a

$$\begin{cases} L_g \lambda(x) = L_{ad_f g} \lambda(x) = \dots = L_{ad_f^{n-2} g} \lambda(x) = 0 \\ L_{ad_f^{n-1} g} \lambda(x) \neq 0 \end{cases}$$

(abbiamo supposto  $r = 1$ , allora  $n - r - 1 = n - 2$ ).

**Theorem 2** *Condizione Necessaria e Sufficiente affinché esista una funzione  $\lambda(x)$  che, presa come uscita del sistema  $\dot{x} = f(x) + g(x)u$  con  $f(x_0) = 0$ , dia grado relativo  $n$*

ovvero

*affinché esistano un cambiamento di variabili  $\Phi(x)$  e le funzioni di retroazione statica  $\alpha(x)$  e  $\beta(x)$  tali da linearizzare il sistema detto*

è che

A)  $\text{rank}[g(x_0) \ ad_f g(x_0) \ \dots \ ad_f^{n-1} g(x_0)] = n;$

B)  $\text{span}\{g, \ ad_f g, \ \dots, \ ad_f^{n-2} g\}$  sia involutivo.

Nel caso SISO, la condizione IFF composta da:

a)  $\dim \text{span}\{g, \ ad_f g, \ \dots, \ ad_f^{n-1} g\} = n;$

b) la distribuzione  $\{g, ad_f g, \dots, ad_f^{n-1} g\}$  è involutiva.

In alcuni casi l'idea è banale.

**Esempio.**

Riprendiamo l'equazione della dinamica di un link collegato a un motore:

$$\tau = I\ddot{q} + mgL \sin q.$$

Pongo

$$\begin{aligned} x_1 &= q \\ x_2 &= \dot{q} \\ u &= \tau \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -\frac{mgL}{I} \sin x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{I} \end{pmatrix} u$$

Se faccio  $u = mgL \sin x_1 + Iv$  ottengo

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} v$$

A questo punto, disegno  $v$  con metodi lineari, per ottenere comportamenti arbitrari.

**Esempio.**

Nel caso del link con cedevolezza la cosa è meno banale:

$$\begin{cases} I\ddot{q}_1 + mgL \sin q_1 + k(q_1 - q_2) = 0 \\ J\ddot{q}_2 - k(q_1 - q_2) = \tau \end{cases}$$

Si può notare che in questo caso si ha la nonlinearietà nella prima equazione e il controllo nella seconda. Pongo

$$x = \begin{pmatrix} q_1 \\ \dot{q}_1 \\ q_2 \\ \dot{q}_2 \end{pmatrix}$$

e

$$f = \begin{pmatrix} x_2 \\ -\frac{mgL}{I} \sin x_1 - \frac{k}{I}(x_1 - x_3) \\ x_4 \\ \frac{k}{J}(x_1 - x_3) \end{pmatrix} \quad g = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{J} \end{pmatrix}$$

allora ottengo

$$\left[ g, [f g], [f[f g]], [f[f[f g]]] \right] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{k}{IJ} \\ 0 & 0 & \frac{k}{IJ} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{J} & 0 & \frac{k}{J^2} \\ \frac{1}{J} & 0 & -\frac{k}{J^2} & 0 \end{pmatrix}$$

matrice che ha rango 4 per  $k \neq 0$  e  $IJ < \infty$ . Inoltre  $g$ ,  $ad_f g$ ,  $ad_f^2 g$  sono costanti e di conseguenza sono involutivi.

Quindi deve essere possibile trovare  $\lambda(x)$ . Come si trovano  $\Phi(x)$ ,  $\alpha(x)$  e  $\beta(x)$ ?

La prima componente di  $\Phi(x)$ ,  $z_1 = \Phi_1(x)$ , è scelta come quella superficie tangente a  $g$ ,  $[f g]$ ,  $\dots$ ,  $ad_f^{n-2} g$  (che sicuramente esiste), ma naturalmente non a  $ad_f^{n-1} g$ .

Quindi

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} g = 0$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} [f g] = 0$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} [f[f g]] = 0$$

⋮

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} ad_f^{n-2} g = 0$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} ad_f^{n-1} g \neq 0$$

Nel nostro caso si ha

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} g = 0 \Rightarrow \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_4} = 0$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} [f g] = 0 \Rightarrow \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_3} = 0$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} [f[f g]] = 0 \Rightarrow \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_2} = 0$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} ad_f^3 g \neq 0 \Rightarrow \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} \neq 0$$

$\Phi_1$  deve essere funzione di  $x_1$  solamente. Ad esempio  $\Phi_1(x) = x_1$ . Le altre componenti di  $\Phi$  si ottengono così:

$$\Phi_2 = \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} f = x_2 = L_f \Phi_1(x)$$

$$\Phi_3 = \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} f = -\frac{mgL}{I} \sin x_1 - \frac{k}{I}(x_1 - x_3) = L_f^2 \Phi_1(x)$$

$$\Phi_4 = \frac{\partial \Phi_3}{\partial x} f = -\frac{mgL}{I} x_2 \cos x_1 - \frac{k}{I}(x_2 - x_4) = L_f^3 \Phi_1(x)$$

Infine

$$\begin{cases} \alpha(x) = \frac{L_f^n \Phi_1}{L_g L_f^{n-1} \Phi} = \frac{L_f^4 \Phi_1}{L_g L_f^3 \Phi_1} \\ \beta(x) = \frac{1}{L_g L_f^{n-1} \Phi_1} = \frac{1}{L_g L_f^3 \Phi_1} \end{cases}$$

Nel nostro esempio

$$u = \frac{IJ}{k}(v - a(x)) = -\frac{a(x)}{\frac{k}{IJ}} + \frac{1}{\frac{k}{IJ}}v$$

$$a(x) = \frac{mgL}{I} \sin x_1 (x_2^2 + \frac{mgL}{I} \cos x_2 + \frac{k}{I}) + \frac{k}{I}(x_1 - x_3) (\frac{k}{I} + \frac{k}{J} + \frac{mgL}{I} \cos x_1)$$

e si ottiene

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= x_2 \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ \dot{z}_3 &= z_4 \\ \dot{z}_4 &= v \end{aligned}$$

$$L_f^4 \Phi_1(x) = a(x)$$

$$L_g L_f^3 \Phi_1(x) = \frac{k}{IJ}$$

### 4.2.1 Procedura Operativa (Sistemi SISO)

Riassumiamo i passi da compiere per trovare un ingresso linearizzante e un cambio di coordinate:

- calcolare  $ad_f^i g$ ,  $i = 0, \dots, n-1$ ;
- verificare le condizioni necessarie e sufficienti (A) e (B);
- dalle equazioni differenziali alle derivate parziali

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x} [g(x) \dots ad_f^{n-2} g] = 0$$

integrare  $\lambda(x)$

- porre

$$\alpha(x) = -\frac{L_f^n \lambda(x)}{L_g L_f^{n-1} \lambda(x)}$$

$$\beta(x) = -\frac{1}{L_g L_f^{n-1} \lambda(x)}$$

- cambiare le coordinate con

$$\Phi(x) = (\lambda(x), L_f \lambda(x), \dots, L_f^{n-1} \lambda(x))$$

**Esempio.**

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin x_2 \\ \sin x_3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

$$[f \ g] = \begin{pmatrix} 0 \\ -c_3 \\ 0 \end{pmatrix}; [f \ [f \ g]] = \begin{pmatrix} c_2 c_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{rank} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 3; [g \ [f \ g]] = \begin{pmatrix} 0 \\ s_3 \\ 0 \end{pmatrix} \in \text{span}\{g, [f \ g]\}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \lambda}{\partial x_3} = 0 \\ \frac{\partial \lambda}{\partial x_2} c_3 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \lambda = x_1 = z_1 \\ L_f \lambda = s_2 = z_2 \\ L_f^2 \lambda = c_2 s_3 = z_3 \\ L_f^3 \lambda = -s_3^2 s_2 \\ L_g L_f^2 \lambda = c_2 c_3 \end{cases}$$

quindi

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v = s_3 T_2 T_3 + \frac{1}{c_2 c_3} v$$

definito su

$$\begin{aligned} -\frac{\pi}{2} < x_2 < \frac{\pi}{2} \\ -\frac{\pi}{2} < x_3 < \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Il nostro sistema, con una retroazione opportuna,  $v = kz$ , ha tutti i poli in  $-1$ :

$$\begin{aligned} (s+1)^3 &= s^3 + 3s^2 + 3s + 1 \\ k &= (-1 \quad -3 \quad -3). \end{aligned}$$

\*\*\*

**Osservazione:** la completa controllabilità dell'approssimazione lineare è condizione necessaria alla linearizzazione in retroazione.

Infatti, supponiamo che  $f(0) = 0$  (se  $f(x_0) = 0$ , traslo gli stati) ed effettuiamo la seguente scomposizione

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \Leftrightarrow \dot{x} = Ax + \hat{f}(x) + \hat{g}(x)u + Bu$$

con

$$\begin{aligned} \hat{f}(0) &= 0 & \hat{g}(0) &= 0 \\ B &= g(0) \\ A &= \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x=0} \Rightarrow \frac{\partial \hat{f}}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0 \end{aligned}$$

Calcolando

$$[f, g] = [Ax + \hat{f}, B + \hat{g}] = \frac{\partial \hat{g}}{\partial x} Ax + \frac{\partial \hat{g}}{\partial x} \hat{f} - AB - A\hat{g} - \frac{\partial \hat{f}}{\partial x} B - \frac{\partial \hat{f}}{\partial x} \hat{g}$$

troviamo

$$[f, g]|_0 = -AB$$

e in generale  $ad_f^k g = (-1)^k A^k B + p_k(x)$ , dove  $p_k(0) = 0$ .

Quindi

$$\text{rank}\{g, ad_f g, \dots, ad_f^{n-1} g\} \Big|_0 = \text{rank}[B, AB, \dots, A^{n-1} B]$$

Ciò significa che imporre la condizione (A) equivale a richiedere la completa controllabilità. Questo riduce il vantaggio della linearizzazione in retroazione (ingresso-stati), perché modi marginalmente stabili non-controllabili (ad esempio poli complessi coniugati posti sull'asse immaginario), ne impediscono l'applicazione. <

## 4.2.2 Linearizzazione Ingresso-Uscita

La linearizzazione esatta in retroazione (ingresso-stati) può essere inapplicabile in certi casi:

- a) se  $\dot{x} = f(x) + g(x)u$  non soddisfa le condizioni necessarie e sufficienti di esistenza di una funzione di “uscita”  $\lambda(x)$  con grado massimo;
- b) se il sistema ha una uscita  $h(x)$  con significato fisico tale da imporne la scelta (soprattutto in problemi di inseguimento);
- c) se non si vuole o non si riesce a integrare il sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali che definiscono l’uscita di grado relativo massimo.

In questi casi, si può comunque procedere a una linearizzazione esatta, ancorché parziale (talvolta detta ingresso-uscita):

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u \\ y = h(x) \end{cases}$$

$$L_g L_f^i h(x) = 0 \quad i = 0, 1, \dots, r-2$$

$$L_g L_f^{r-1} h(x) \neq 0$$

$$r < n.$$

Posso ancora utilizzare le  $r$  funzioni indipendenti di cui dispongo come parte di un cambiamento di variabili:

$$\begin{aligned} z_1 &= \Phi_1(x) = h(x) \\ z_2 &= \Phi_2(x) = L_f h(x) \\ &\vdots \\ z_r &= \Phi_r(x) = L_f^{r-1} h(x) \end{aligned}$$

Ma restano da trovare  $n - r$  funzioni indipendenti da queste. Questo in sé non è difficile, spesso basta prendere alcuni dei “vecchi” stati. Procedendo come fatto nel caso  $r = n$ , la dinamica delle nuove  $r$  variabili è

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)\dot{x} = L_f h = z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ &\vdots \\ \dot{z}_{r-1} &= z_r \\ \dot{z}_r &= L_f^r h(x) + L_g L_f^{r-1} h(x)u \Big|_{x=\Phi^{-1}(z)} \\ &= b(z) + a(z)u \end{aligned}$$

mentre per le restanti  $n - r$  non ci possiamo aspettare nulla di speciale:

$$\begin{aligned}\dot{z}_{r+1} &= q_{r+1}(z) + p_{r+1}(z)u \\ &\vdots \\ \dot{z}_n &= q_n(z) + p_n(z)u\end{aligned}$$

L'uscita del nuovo sistema è naturalmente ancora

$$y = h(x) = z_1.$$

La dinamica delle variabili del secondo gruppo dunque non influenza questa uscita (dopo la retroazione).

La scelta delle  $n - r$  variabili "complementari" deve solo soddisfare la condizione di costruire, con le prime  $r$  funzioni, un cambiamento di variabili lecito (invertibile), cioè

$$\det \left[ \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \vdots \\ \Phi_n \end{pmatrix} \right] \neq 0$$

nella regione d'interesse.

È comodo peraltro scegliere le variabili complementari  $\Phi_{r+1} \dots \Phi_n$  in modo che

$$L_g \Phi_i(x) = 0 \quad r + 1 \leq i \leq n.$$

Infatti, in questo caso si ha

$$\begin{aligned}\dot{z}_{r+1} &= \frac{\partial \Phi_{r+1}}{\partial x} \dot{x} = L_f \Phi_{r+1}(x) + L_g \Phi_{r+1}(x)u = q_{r+1}(z) \\ &\vdots \\ z_n &= q_n(z)\end{aligned}$$

con  $x = \Phi^{-1}(z)$ .

Cosicchè, la dinamica delle variabili complementari oltrechè ininfluenza sull'uscita, è indipendente dagli ingressi.

Nelle nuove coordinate, possiamo dunque riscrivere il sistema nella forma "normale"

$$\begin{cases} \dot{\xi} = A_0 \xi + b_0 v \\ \dot{\eta} = q(\xi, \eta) \end{cases} \quad y = \xi_1 = c_0 \xi$$

dove

$$\xi = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_r \end{pmatrix}; \quad \eta = \begin{pmatrix} z_{r+1} \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix};$$



$$A_0 = \left( \begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ \vdots & & I & \\ 0 & & & \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right); \quad b_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$c_0 = (1 \ 0 \ \dots \ 0);$$

e l'ingresso in retroazione linearizzato è

$$u = -\frac{b(\xi, \eta)}{a(\eta, \xi)} + \frac{1}{a(\xi, \eta)}v$$

Se per le variabili  $\eta$  non vale  $L_g \Phi_{r-1}(x) = 0$ , si avrà più in generale

$$\dot{\eta} = q(\xi, \eta) + p(\xi, \eta)v$$

da un punto di vista ingresso-uscita, il sistema è linearizzato; la sua f.d.t. è

$$\frac{y(s)}{v(s)} = \frac{1}{s^r}$$

Resta però la dinamica “interna”, delle variabili  $\eta$ .

La stabilizzazione del sottosistema linearizzato è solo “esterna” e non implica che il sistema nel suo complesso non possa avere componenti divergenti e quindi inaccettabili.

È quindi fondamentale studiare cosa accade della dinamica delle variabili  $\eta$ .

Per far questo, studiamo il problema:

$$\begin{cases} \dot{\xi} = A_0 \xi + b_0 v \\ v = k \xi \\ \dot{\eta} = p(\xi, \eta) \end{cases}$$

determinando quali stati iniziali  $(\eta_0, \xi_0)$  e quali controlli mantengono l'uscita costantemente a zero; questo perchè le evoluzioni a partire da questi stati iniziali e con quei controlli rappresentano i “modi” della parte inaccessibile  $\eta_0(t)$ .

Ricordando che

$$y \equiv \xi_1 \equiv 0 \Rightarrow \xi_2 \equiv \dot{\xi}_1 \equiv 0 \Rightarrow \xi_3 \equiv \dot{\xi}_2 \equiv 0 \Rightarrow \dots \Rightarrow \xi_r \equiv \dot{\xi}_{r-1} \equiv 0$$

perciò

$$\xi_0 = \xi(t) = 0$$

$$\xi_r = v \Rightarrow v \equiv 0 \Rightarrow u = -\frac{b(0, \eta)}{a(0, \eta)}$$

resta dunque

$$\dot{\eta} = q(0, \eta) \quad \eta_0 \text{ qualsiasi.}$$

Questa equazione in  $\eta$  viene chiamata *Zero Dinamica*.

Il nome Zero Dinamica deriva dall'analogia con il comportamento dei sistemi lineari che possiedono un polinomio degli zeri:

$$G(s) = k \frac{b_0 + b_1 s + \dots + b_{n-r-1} s^{n-r-1} + s^{n-r}}{a_0 + a_1 s + \dots + a_{n-1} s^{n-1} + s^n}$$

realizzato in forma minima (canonica di controllo) come

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

$$A = \left( \begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ \vdots & & I & \\ 0 & & & \\ \hline -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-1} \end{array} \right); \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ k \end{pmatrix}; \quad C = (b_0 \dots b_{n-r-1} \ 1 \ 0 \ \dots \ 0).$$

Trattando  $\dot{x} = Ax + Bu$ ,  $y = Cx$  come sistema non lineare, la sua forma normale è ottenuta ponendo

$$\begin{aligned} \xi_1 &= y = Cx = b_0 x_1 + \dots + x_{n-r+1} \\ \xi_2 &= \dot{y} = CAx = B_0 x_2 + \dots + x_{n-r+2} \\ &\vdots \\ \xi_r &= y^{(r-1)} = CA^{r-1}x = B_0 x_r + \dots + x_n \end{aligned}$$

e scegliendo per complemento

$$\begin{aligned} \eta_1 &= x_1 \\ &\vdots \\ \eta_{n-r} &= x_{n-r}. \end{aligned}$$

Per questa scelta, si ha

$$\frac{\partial}{\partial x} \Phi(x) = \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \xi(x) \\ \eta(x) \end{pmatrix} = \left( \begin{array}{cccc|cccc} b_0 & b_1 & \dots & b_{n-r-1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_0 & \dots & b_{n-r-2} & b_{n-r-1} & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & b_0 & b_{r+1} & \dots & b_{n-r-1} & 1 \\ \hline 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array} \right)$$

quindi lo jacobiano è sicuramente non-singolare e inoltre  $L_g\eta(x) = (I_{n-r} \mid 0)B = 0$ .

La forma normale è dunque

$$\begin{cases} \dot{\xi} = A_0\xi + b_0v \\ \dot{\eta} = q(\xi, \eta) = P\xi + Q\eta \end{cases}$$

La dinamica di  $\eta$  è infatti certamente lineare; per di più vale

$$Q = \left( \begin{array}{c|cccc} 0 & & & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & I & \\ \hline -b_0 & -b_1 & \dots & -b_{n-r-1} & \end{array} \right)$$

infatti

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_1 &= \dot{x}_1 = x_2 = \eta_2 \\ &\vdots \\ \dot{\eta}_{n-r-1} &= \eta_{n-r} \\ \dot{\eta}_{n-r} &= \dot{x}_{n-r} = x_{n-r+1} = \\ &= \xi_1 - b_0\eta_1 - b_1\eta_2 - \dots - b_{n-r-1}\eta_{n-r} \end{aligned}$$

La Zero Dinamica è quindi

$$\dot{\eta} = q(0, \eta) = Q\eta$$

cioè, ha polinomio caratteristico

$$b_0 + b_1s + \dots + b_{n-r-1}s^{n-r-1} + s^{n-r}$$

ovvero il polinomio degli zeri di  $G(s)$ . Gli zeri di trasmissione sono proprio quei valori di  $s \in \mathcal{C}$  per i quali esistono condizioni iniziali tali per cui l'ingresso  $e^{st}$  lascia invariata l'uscita.

L'importanza dello studio della zero dinamica discende dal seguente teorema.

**Theorem 3** *Con riferimento alla forma normale*

$$\begin{cases} \dot{\xi} = A_0\xi + b_0v \\ \dot{\eta} = q(\xi, \eta) \\ y = \xi_1 \end{cases}$$

*una retroazione  $v = v(\xi) = k\xi$ , con  $k = (-k_0 \dots -k_r)$  coefficienti di un polinomio a radici con parte reale negativa, rende certamente asintoticamente stabile il sistema non lineare originale se la Zero Dinamica  $\dot{\eta} = q(0, \eta)$  è asintoticamente stabile (in  $\eta_0 = 0$ ).*

Il controllo che effettivamente stabilizza il sistema originale

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u \\ y = h(x) \end{cases}$$

è

$$u(x) = -\frac{L_f^r h(x)}{L_g L_f^{r-1} h(x)} + \frac{1}{L_g L_f^{r-1} h(x)} (-k_0 \Phi_1(x) - \dots - k_{r-1} \Phi_{r-1}(x)).$$

Il risultato è quasi banale se l'approssimazione lineare del sistema è stabilizzabile. Il linearizzato approssimante è infatti

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ \star & Q \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_0 \\ 0 \end{pmatrix} u$$

con autovalori unione di quelli di  $A$  e quelli di  $Q$  (con  $Q$  vuota se il sistema originario è controllabile e  $Q$  stabile se il sistema originario è stabilizzabile). Il punto importante è che la zero dinamica può esser dimostrata stabile anche quando la sua linearizzazione è solo marginalmente stabile; cioè possono essere resi asintoticamente stabili anche sistemi la cui approssimazione lineare possiede autovalori sull'asse immaginario.

### Esempio.

Prendiamo un sistema con:

$$f(x) = \begin{pmatrix} x_3 - x_2^3 \\ -x_2 \\ x_1^2 - x_3 \end{pmatrix}; \quad g(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad y(x) = x_1.$$

Calcoliamo il grado relativo

$$\begin{aligned} h(x) &= x_1 \\ L_f h(x) &= (1 \ 0 \ 0) f(x) = x_3 - x_2^3 \\ L_g h(x) &= (1 \ 0 \ 0) g(x) = 0 \\ L_f^2 h(x) &= (0 \ -3x_2^2 \ 1) f(x) = 3x_2^3 + x_1^2 - x_3 \\ L_g L_f h(x) &= (0 \ -3x_2^2 \ 1) g(x) = 3x_2^2 + 1 \neq 0 \\ &\Rightarrow r = 2 \end{aligned}$$

Esiste un'altra uscita con  $r = 3$ ?

Verifichiamo le condizioni (A) e (B):

$$ad_f g = [f \ g] = - \begin{pmatrix} 0 & -2x_2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2x_1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3x_2^2 - 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$ad_f^2 g = \begin{pmatrix} 3x_2^2 - 1 \\ -1 \\ 6x_1x_2 + 2x_1 + 1 \end{pmatrix}$$

$$[g [f g]] = \begin{pmatrix} 6x_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in span \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -3x_2^2 - 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

La condizione (B) è verificata, ma la (A) non lo è ...

$$rank [g(x) ad_f g(x) ad_f^2 g(x)]|_{x=0} = 2$$

Non esiste allora una funzione  $\lambda(x)$  che dia grado relativo massimo per effettuare una linearizzazione esatta.

Scegliamo le nuove coordinate:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= x_1 \\ \xi_2 &= L_f h = x_3 - x_2^3 \end{aligned}$$

$\eta_1(x)$ :

$$L_g \eta_1 = 0$$

$$d\eta_1 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \begin{cases} \nearrow \eta_1 = \alpha x_1 \\ \searrow \eta_1 = \alpha x_2 + \alpha x_3 \end{cases}$$

la scelta  $\eta = \alpha x_1$  non è indipendente da  $\xi_1 = x_1$ ; quindi scelgo  $\eta = x_2 + x_3$  (con la costante  $\alpha = 1$ ).

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 - x_2^3 \\ x_2 + x_3 \end{pmatrix};$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3x_2^2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Forma normale:

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 &= (x_1^2 + 3x_2^3 + x_3) + (3x_2^2 + 1)u \\ \dot{\eta}_1 &= \frac{\partial \Phi_3}{\partial x} (f + gu) = x_1^2 - x_2 - x_3 = \xi_1^2 - \eta_1 \\ y &= \xi_1 \end{aligned}$$

Zero dinamica:

$$y \equiv 0 \Rightarrow \xi_1 \equiv 0, \xi_2 \equiv 0 \Rightarrow \dot{\eta}_1 = -\eta_1, \forall \eta_1(0)$$

$$\begin{cases} u = -\frac{x_1^2 + 3x_2^3 - x_3}{3x_2^2 + 1} + \frac{1}{3x_2^2 + 1}v \\ v = (k_1 \ k_2) \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$\Rightarrow$  Il sistema è asintoticamente stabile (esternamente e internamente).

### 4.3 Inseguimento di traiettorie

Supponendo che il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u \\ y = h(x) \end{cases}$$

abbia grado relativo  $r$  e che sia stato posto nella forma normale

$$\begin{cases} \dot{\xi} = A_0\xi + b_0\nu \\ \dot{\eta} = q(\eta, \xi) + p(\eta, \xi)\nu \end{cases}$$

utilizzando l'ingresso linearizzante

$$u = -\frac{b(\eta, \xi)}{a(\eta, \xi)} + \frac{1}{a(\eta, \xi)}\nu,$$

desideriamo inseguire una traiettoria assegnata per l'uscita

$$y(t) = \hat{y}(t).$$

Perché l'inseguimento sia perfetto, dovremo supporre

$$y(0) = h(x_0) = \hat{y}(0),$$

e se definisco il vettore

$$\hat{\xi} = \begin{pmatrix} \hat{y} \\ \dot{\hat{y}} \\ \vdots \\ \hat{y}^{(r-1)} \end{pmatrix}$$

si ha che

$$y(t) \equiv \hat{y}(t), \forall t \Leftrightarrow \xi(t) = \hat{\xi}(t).$$

In pratica tutto ciò implica che le variabili di stato  $\xi$  coincidano con l'uscita e le sue derivate in un intorno di  $t = 0$ .

In questo caso, scegliendo l'ingresso  $\nu = \hat{y}^{(r)}$ , cioè

$$u = -\frac{b(\eta, \hat{\xi})}{a(\eta, \hat{\xi})} + \frac{1}{a(\eta, \hat{\xi})} \hat{y}^{(r)}.$$

con  $\eta$  soluzione di

$$\dot{\eta} = q(\hat{\xi}, \eta) + p(\hat{\xi}, \eta) \hat{y}^{(r)}$$

otteniamo lo scopo:

$$\dot{y}^{(r)} = \dot{\xi}_{r-1} = b(\xi, \eta) + a(\xi, \eta) \left\{ -\frac{b(\xi, \eta)}{a(\xi, \eta)} + \frac{1}{a(\xi, \eta)} \hat{y}^{(r)} \right\} = \hat{y}^{(r)}.$$

Naturalmente, nella pratica è difficile poter fissare gli stati iniziali del sistema e allo stesso tempo condizioni iniziali sbagliate non permetterebbero di ottenere questo risultato. In tale caso, quanto di meglio si può chiedere è un inseguimento asintotico cioè tale che  $\|y(t) - \hat{y}(t)\| \rightarrow 0$  per  $t \rightarrow \infty$ .

Questo si ottiene sfruttando il controllo "lineare"  $\nu$ :

$$\nu = \hat{y}^{(r)} - c_{r-1}(\xi_r - \hat{\xi}_r) - \dots - c_0(\xi_1 - \hat{\xi}_1)$$

Fissato

$$e = \xi - \hat{\xi}$$

il vettore di errore, ho

$$\nu = \hat{y}^{(r)} - c^T e \text{ con } c^T = (c_0 \ c_1 \ \dots \ c_{r-1})$$

$$\dot{\xi}_r = \hat{y}^{(r)} - c^T e \Rightarrow e_1^{(r)} + c_{r-1} e_1^{(r-1)} + \dots + c_0 e_1 = 0.$$

Scegliendo i coefficienti  $c_i$  in modo opportuno, l'errore di inseguimento viene fatto convergere a zero con dinamica arbitraria (lineare).

Riconsideriamo la dinamica delle variabili  $\eta$ :

$$\dot{\eta} = q(\xi, \hat{\xi}) + p(\eta, \hat{\xi}) \hat{y}^{(r)}$$

e l'ingresso

$$u = -\frac{b(\xi, \eta)}{a(\xi, \eta)} + \frac{1}{a(\xi, \eta)} \hat{y}^{(r)}$$

Notando che  $\hat{y}(t)$  (quindi  $\hat{y}^{(r)}$ ,  $\hat{\xi}(t)$ ) sono assegnati, posso vederlo come un sistema che, prendendo le uscite desiderate per ingresso, fornisce come uscita gli ingressi necessari all'inseguimento, usando come stati gli  $\eta$ : *Sistema Inverso*.

Il problema residuo nell'inseguimento è la limitatezza di  $\eta$ ,  $\xi$  ed  $u$ .

**Theorem 4** *Sotto le seguenti ipotesi:*

- se  $\hat{y}(t), \dot{\hat{y}}(t), \dots, \hat{y}^{(r)}$  sono sufficientemente "piccoli",
- se  $\dot{\eta} = f(\eta, \hat{y})$  è asintoticamente stabile e limitata,
- e se  $c$  ha coefficienti Hurwitz,

$\Rightarrow \eta, \xi$  sono limitati.

## 4.4 Linearizzazione in retroazione MIMO

Consideriamo un sistema "quadrato"

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x)u_i \\ y_1 = h_1(x) \\ \vdots \\ y_m = h_m(x) \end{cases}$$



e procediamo, analogamente al caso SISO, a differenziare le uscite finché non appare esplicitamente almeno uno degli ingressi:

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1 = h_1(x) \\ \dot{y}_1 = L_f h_1(x) \\ \vdots \\ y_1^{(r_1)} = L_f^{r_1} h_1(x) + L_{g_1} L_f^{r_1-1} h_1(x) u_1 + \dots + L_{g_m} L_f^{r_1-1} h_1(x) u_m \\ \\ \text{(dove almeno una delle } L_{g_i} L_f^{r_1-1} h_1(x) \neq 0) \\ \\ y_2 = h_2(x) \\ \dot{y}_2 = L_f h_2(x) \\ \vdots \\ y_2^{(r_2)} = L_f^{r_2} h_2(x) + \sum_{i=1}^m L_{g_i} L_f^{r_2-1} h_2(x) u_i \\ \\ \text{(dove almeno una delle } L_{g_i} L_f^{r_2-1} h_2(x) \neq 0) \\ \\ \vdots \\ \vdots \\ \\ y_m = h_m(x) \\ \dot{y}_m = L_f h_m(x) \\ \vdots \\ y_m^{(r_m)} = L_f^{r_m} h_m(x) + \sum_{i=1}^m L_{g_i} L_f^{r_m-1} h_m(x) u_i \\ \\ \text{(dove almeno una delle } L_{g_i} L_f^{r_m-1} h_m(x) \neq 0) \end{array} \right.$$

Consideriamo le ultime equazioni di queste catene in forma matriciale; si ha

$$\begin{pmatrix} y_1^{(r_1)} \\ \vdots \\ y_m^{(r_m)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_f^{r_1} h_1(x) \\ \vdots \\ L_f^{r_m} h_m(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} L_{g_1} L_f^{r_1-1} h_1(x) & \dots & L_{g_m} L_f^{r_1-1} h_1(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ L_{g_1} L_f^{r_m-1} h_m(x) & \dots & L_{g_m} L_f^{r_m-1} h_m(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}$$

$$\underline{y} = \Gamma(x) + E(x)\underline{u}$$

Se la matrice  $E(x)$  è invertibile (in un intorno di un punto  $x_0$ ), si dice che il sistema ha grado relativo vettoriale

$$\underline{r} = (r_1 \dots r_m)^T$$

e grado relativo totale  $r = \sum_{i=1}^m r_i$ .

Se questo accade posso definire  $r$  funzioni dei vecchi stati

$$\begin{array}{lll} \xi_1^1 = \xi_1 = h_1(x) & \xi_1^2 = \xi_{r_1+1} = h_2(x) & \dots \quad \xi_1^m = \xi_{r_1+1} = h_m(x) \\ \xi_2^1 = \xi_1 = L_f h_1(x) & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \xi_{r_1}^1 = \xi_{r_1} = L_f^{r_1-1} h_1(x) & \xi_{r_2}^2 = \xi_{r_1+r_2} = L_f^{r_2-1} h_2(x) & \dots \quad \xi_{r_m}^m = \xi_r = L_f^{r_m-1} h_m(x) \end{array}$$

che sono indipendenti e altre  $(n - r)$  funzioni indipendenti da queste

$$\eta_1(x) \dots \eta_{n-r}(x)$$

tali che per  $i = 1, \dots, m$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\xi}_1^i = \xi_2^i \\ \dot{\xi}_2^i = \xi_3^i \\ \vdots \\ \dot{\xi}_{r_i-1}^i = \xi_{r_i}^i \\ \\ \dot{\xi}_{r_i}^i = b_i(\xi, \eta) + \sum_{j=1}^m a_{ij}(\xi, \eta) u_j \\ \\ \dot{\eta} = q(\xi, \eta) + \sum_{j=1}^m p_j(\xi, \eta) u_j \end{array} \right. \leftarrow \left\{ \begin{array}{l} y_1 = \xi_1^1 \\ y_2 = \xi_1^2 \\ \vdots \\ y_m = \xi_1^m \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{righe di } \Gamma(x), E(x) \\ \text{(con } x = \Phi^{-1}(\eta, \xi)) \\ \text{in cui interviene} \\ \text{l'ingresso} \end{array} \right.$$

Se poi trovo  $\eta(x) : L_{g_j} \eta(x) = 0 \forall j$ , scompare l'ultima sommatoria e resta  $\dot{\eta} = q(\eta, \xi)$  (ciò è possibile solo se  $\text{span}\{g_1 \dots g_m\}$  è involutivo).

Questa è detta *forma normale* per il sistema MIMO a m-ingressi e m-uscite. Il problema della linearizzazione in retroazione per un sistema

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x) u_i$$

consiste nel trovare un vettore di  $m$  funzioni

$$\alpha(x) = \begin{pmatrix} \alpha_1(x) \\ \vdots \\ \alpha_m(x) \end{pmatrix}$$

ed una matrice di  $m \times m$  funzioni

$$\beta(x) = \begin{pmatrix} \beta_{11}(x) & \dots & \beta_{1m}(x) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \beta_{m1}(x) & \dots & \beta_{mm}(x) \end{pmatrix}$$

tali che, ponendo

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} = \alpha(x) + \beta(x)v$$

esista un cambio di coordinate  $\xi = \Phi(x)$  nel quale sia

$$\dot{\xi} = A\xi + Bu$$

$$A = \text{diag}(A_1, \dots, A_m), \quad B = \text{diag}(b_1, \dots, b_m)$$

$$A_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad b_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Il problema è risolvibile se e solo se esistono  $m$  funzioni di “uscita”  $h_1(x), \dots, h_m(x)$  rispetto alle quali il sistema ha grado relativo  $r_1, r_2, \dots, r_m$ , con

$$r_1 + r_2 + \dots + r_m = n.$$

In questo caso, le nuove coordinate sono scelte come visto sopra:

$$\xi_1^1 = h_1, \quad \xi_2^1 = \dot{h}_1 = L_f h, \quad \dots, \quad \xi_2^2 = h_2, \quad \text{etc.} \dots$$

Il controllo linearizzante è

$$U = -E^{-1}(x)\Gamma(x) + E^{-1}(x)\nu$$

(si ricordi l'ipotesi  $E(x)$  invertibile).

**Theorem 5** *La linearizzazione esatta (completa) in retroazione è possibile per il sistema*

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x)u_i$$

se e solo se considerando:

$$\Gamma_0 = \text{span}\{g_1 \dots g_m\}$$

$$\Gamma_1 = \Gamma_0 + [f \Gamma_0]$$

$$\vdots$$

$$\Gamma_i = \Gamma_{i-1} + [f \Gamma_{i-1}] = \text{span}\{ad_f^k g_j, 0 \leq k \leq i, 1 \leq j \leq m\}$$

si ha ...

$$\dim \Gamma_i = \text{cost} \quad \text{in un intorno di } \bar{x}, \text{ per } i = 1, \dots, n-1$$

$$\dim \Gamma_{n-1} = \eta \quad (\text{controllo linearizzante approssimante})$$

$$\Gamma_i \text{ è involutiva, con } 0 \leq i \leq n-2.$$

**Osservazione:** se il sistema è SISO, la condizione coincide con quella vista. Se le uscite  $h_1(x) \dots h_m(x)$  sono già assegnate, ovvero se non è possibile trovarne di perfettamente linearizzanti, potrò procedere ad una linearizzazione parziale (ingresso-uscita). Se  $r_1 + \dots + r_m = r < n$  e  $E(x)$  è invertibile (cioè, è definito un grado relativo), posso sempre applicare il controllo

$$u(x) = -E^{-1}(x)\Gamma(x) + E(x)\nu$$

che ottiene la perfetta *noninterazione* e linearizzazione I/O:

$$\begin{array}{l} y_1^{(r_1)} = h_1^{(r_1)} = \nu_1 \\ y_2^{(r_2)} = h_2^{(r_2)} = \nu_2 \\ \vdots \end{array} \leftarrow \begin{cases} \text{catene di} \\ r_i \text{ integratori} \end{cases}$$

Intrinsecamente, restano  $n - r$  variabili di stato non “visibili” dal rapporto I/O:

$$\dot{\eta} = q(\xi, \eta) + p(\xi, \eta)u = q(\xi, \eta) - p(\xi, \eta)E^{-1}(\cdot)\Gamma(\cdot) + p(\xi, \eta)E^{-1}(\cdot)\nu$$

Si hanno risultati analoghi al caso SISO:

- a) i controlli  $\nu_i = -c_0^i \xi_1^i - c_1^i \xi_2^i - \dots - c_{r_i-1}^i \xi_{r_i}^i + \bar{\nu}_i$  pongono i poli delle catene nelle posizioni desiderate (LHP);
- b) la retroazione (a) rende tutto il sistema stabile se la zero dinamica

$$\dot{\eta} = q(0, \eta) + p(0, \eta)u(0, \eta)$$

è asintoticamente stabile.

Se il sistema non ha grado relativo definito ( $E(x)$  singolare) *non* è disaccoppiabile, ma può essere linearizzabile I/O<sup>5</sup>.◁

**Esempio.**

Supponiamo di avere il sistema

$$\dot{x} = f(x) + g_1(x)u_1 + g_2(x)u_2$$

$$f(x) = \begin{pmatrix} x_2 + x_2^2 \\ x_3 - x_1x_4 + x_4x_5 \\ x_2x_4 + x_1x_5 - x_5^2 \\ x_5 \\ x_2^2 \end{pmatrix}$$

---

<sup>5</sup>Vedi testo Isidori

$$g_1(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cos(x_1 - x_3) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad g_2(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} y_1 = h_1(x) = x_1 - x_5 \\ y_2 = h_2(x) = x_4 \end{cases}$$

In questo caso

$$r = \{2 + 3\}$$

è il grado relativo totale massimo.

\*\*\*

## 4.5 Pendolo inverso

### 4.5.1 Modello fisico

Le equazioni dinamiche del modello sono date da

$$\begin{cases} (M + m)\ddot{x} + ml \cos \theta \ddot{\theta} - ml \sin \theta \dot{\theta}^2 = u \\ ml \cos \theta \ddot{x} + ml^2 \ddot{\theta} - mgl \sin \theta = 0 \end{cases}$$

dove  $M$  è la massa del carrello,  $m$  è la massa posta all'estremità dell'asta (l'asta si considera di peso trascurabile),  $l$  è la lunghezza dell'asta,  $x$  è l'ascissa del carrello e  $g$  è l'accelerazione di gravità. L'ingresso  $u$  rappresenta una forza applicata al carrello. Allo scopo di ottenere un sistema di equazioni in forma standard poniamo

$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = \theta \\ x_3 = \dot{x} \\ x_4 = \dot{\theta} \end{cases}$$

ottenendo

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3 \\ \dot{x}_2 = x_4 \\ \dot{x}_3 = \frac{l \sin x_2 x_4^2 - mg \sin x_2 \cos x_2 + u}{M + m \sin x_2} \\ \dot{x}_4 = \frac{(M + m)g \sin x_2 - ml \cos x_2 \sin x_2 x_4^2 - \cos x_2 u}{l(M + m \sin x_2)} \end{cases}$$

Adesso possiamo porre il sistema affine nella classica forma

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u$$

con

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ \frac{m \sin x_2 (lx_4^2 - g \cos x_2)}{M + m \sin x_2} \\ \frac{(M + m)g \sin x_2 - ml \sin x_2 \cos x_2 x_4^2}{l(M + m \sin x_2)} \end{bmatrix}$$

$$g(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{M + m \sin x_2} \\ \frac{-\cos x_2}{l(M + m \sin x_2)} \end{bmatrix}$$

Per avere un sistema SISO prendiamo come uscita soltanto l'angolo dell'asta (angolo nullo quando l'asta è in posizione verticale); quindi l'uscita sarà

$$y = h(x) = x_2$$

Le linearizzazioni verranno effettuate intorno a

$$x_{eq} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

punto di equilibrio instabile.

### 4.5.2 Linearizzazione approssimata

La linearizzazione approssimata sfrutta la formula di Taylor per linearizzare il sistema non lineare

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u$$

attorno a un punto di equilibrio.

Prendiamo come punto di equilibrio  $x_{eq}$  e applichiamo una volta Taylor

$$\dot{x} = Ax + \tilde{f}(x) + (B + \tilde{g}(x))u$$

con

$$A = \left. \frac{\partial}{\partial x} f(x) \right|_{x=x_{eq}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{-mg}{M} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{g(M+m)}{lM} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \left. \frac{\partial}{\partial x} g(x) \right|_{x=x_{eq}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{-m}{M^2} \\ \frac{m}{lM^2} \end{bmatrix}$$

Il nostro sistema approssimato è allora

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

### 4.5.3 Linearizzazione esatta

Calcoliamo il grado relativo del sistema

$$L_g h(x) = L_g x_2 = [0 \ 1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ * \\ * \end{bmatrix} = 0$$

$$L_f h(x) = [0 \ 1 \ 0 \ 0] f(x) = x_4$$

$$L_g L_f h(x) = L_g x_4 = [0 \ 0 \ 0 \ 1] g(x) = -\frac{\cos x_2}{l(M + m \sin x_2)}$$

$$L_g L_f h(x_{eq}) = -\frac{1}{lM}.$$

Il grado relativo del sistema è  $r = 2$ . Quindi la linearizzazione esatta sarà parziale, perché abbiamo a disposizione soltanto due funzioni indipendenti per il cambio di variabili:

$$\xi_1 = h(x) = x_2$$

$$\xi_2 = L_f h(x) = x_4$$

Per completare il cambio di variabili dobbiamo trovarne altre due indipendenti dalle altre e che possibilmente soddisfino la condizione  $L_g z_i = 0$ .

$$L_g \eta_3 = 0 \Rightarrow \frac{\partial \eta_3}{\partial x} g(x) = \frac{\partial x_1}{\partial x} g(x) = [1 \ 0 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ * \\ * \end{bmatrix} = 0$$

per  $\eta_3 = x_1$ .

$$L_g \eta_4 = 0 \Rightarrow \frac{\partial \eta_4}{\partial x} g(x) = \frac{\partial}{\partial x} [x_3 \cos x_2 + l x_4] g(x) =$$

$$= [0 \ * \ \cos x_2 \ l] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l \frac{ml}{ml_2(M + m \sin x_2)} \\ (-\cos x_2) \frac{ml}{ml_2(M + m \sin x_2)} \end{bmatrix} = 0$$

per  $\eta_4 = x_3 \cos x_2 + l x_4$  (la velocità assoluta della punta dell'asta).

Adesso il cambio di variabili è completo

$$z = \Phi(x) = \begin{cases} \xi_1 = x_2 \\ \xi_2 = x_4 \\ \eta_3 = x_1 \\ \eta_4 = x_3 \cos x_2 + l x_4 \end{cases}$$

$$x = \Phi^{-1}(z) = \begin{cases} x_1 = \eta_3 \\ x_2 = \xi_1 \\ x_3 = \frac{\eta_4 - l \xi_2}{\cos \xi_1} \\ x_4 = \xi_2 \end{cases}$$

Il sistema complessivo nelle nuove variabili è descritto da

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\xi}_1 = \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 = \frac{(M + m)g \sin \xi_1 - ml \cos \xi_1 \sin \xi_1 \xi_2^2 - \cos \xi_1 u}{l(M + m \sin \xi_1)} \\ \dot{\eta}_3 = \frac{\eta_4 - l \xi_2}{\cos \xi_1} \\ \dot{\eta}_4 = \frac{(-lm(\cos \xi_1)^2 + \sin \xi_1 l M + lm)\xi_2}{(M + m \sin \xi_1) \cos \xi_1} + \frac{(-m + m(\cos \xi_1)^2 - \sin \xi_1 M)\eta_4}{(M + m \sin \xi_1) \cos \xi_1} + \dots \\ \dots + \frac{-mg \sin \xi_1 (\cos \xi_1)^3 + mg \sin \xi_1 \cos \xi_1 + gM \sin \xi_1 \cos \xi_1}{(M + m \sin \xi_1) \cos \xi_1} \end{array} \right.$$



Calcoliamo adesso l'ingresso linearizzante derivando l'uscita

$$\begin{aligned} y &= x_2 \\ \dot{y} &= \dot{x}_2 = x_4 \\ \ddot{y} &= \dot{x}_4 = v = \frac{(M+m)g \sin x_2 - ml \cos x_2 \sin x_2 x_4^2 - \cos x_2 u}{l(M+m \sin x_2)} \end{aligned}$$

da cui

$$u = \frac{\sin x_2}{\cos x_2} [(M+m)g - ml \cos x_2 x_4^2] - \frac{l(M+m \sin x_2)}{\cos x_2} v = \alpha(x) + \beta(x)v$$

Osserviamo adesso l'andamento della zero dinamica facendo evolvere liberamente il sistema partendo dallo stato iniziale  $x_{eq}$ . Otteniamo l'espressione

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = 0 \\ \dot{\xi}_2 = 0 \\ \dot{\eta}_3 = \eta_4 \\ \dot{\eta}_4 = 0 \end{cases}$$

Si può notare che la zero dinamica è marginalmente stabile quindi il sistema linearizzato sarà asintoticamente stabile solo esternamente.

#### 4.5.4 Confronto tra i due metodi di linearizzazione

In questo esempio si ricercano le differenze tra due diversi metodi di linearizzazione che si possono applicare su un sistema non lineare.

La linearizzazione standard si basa sullo sviluppo in serie di Taylor delle funzioni caratterizzanti il sistema in studio. Questo processo di approssimazione genera un sistema lineare che modella il non lineare intorno ad un punto di lavoro prestabilito. Sul modello lineare trovato si possono progettare controllori in grado di far evolvere il sistema secondo le specifiche date. Tali controllori se applicati al non lineare di partenza manterranno le specifiche di progetto su punti vicini al punto di lavoro. Non è detto però che se il sistema si allontana troppo da tale punto non si generi instabilità perché il modello lineare non approssima più il sistema originario non lineare.

La linearizzazione in feedback (o linearizzazione esatta) ricerca attraverso un retroazione dello stato di generare un ingresso che linearizza il sistema intorno ad un punto di lavoro. Come si può vedere dalla figura 2 il sistema visto dal nuovo ingresso  $v$  è lineare e sarà caratterizzato da un modello simile a quello generato dalla linearizzazione standard. Anche in questo caso il

controllore progettato sul modello lineare può dare problemi di instabilità su punti lontani dal punto di lavoro.

Si ricerca in questo esempio di verificare che l'intorno di stabilità del controllo effettuato sul modello lineare standard è più piccolo di quello sul linearizzato in feedback. Per confrontare correttamente i due metodi occorre che i controllori progettati siano tali da far sì che i sistemi in retroazione abbiano gli stessi poli e zeri (in pratica siano lo stesso sistema lineare). Il sistema non lineare scelto è il pendolo inverso mostrato in figura 3 .

L'ingresso del sistema è la forza applicata al carrello mentre l'uscita è la misura dell'angolo dell'asta (Sistema di tipo SISO).

#### 4.5.5 Linearizzazione in feedback

Il modello lineare ottenuto da questo metodo è un sistema con due poli nell'origine. Come controllore si utilizza perciò una rete correttiva ( rete anticipatrice ) e un controllo proporzionale per stabilizzare il sistema ottenendo il luogo delle radici mostrato in figura 4. La rete anticipatrice ha uno zero in -2 e un polo in -20 mentre la scelta della componente proporzionale è stata effettuata in modo da testare due diversi tipi di controllo :

1.  $K=12.5$  : con questa scelta i poli del sistema in retroazione sono posizionati in -5 -5 -10 .
2.  $K=100$  : i poli in questo caso sono complessi coniugati .

#### 4.5.6 Linearizzazione standard

Il modello lineare ottenuto con la funzione *linmod.m* di MATLAB presenta poli in -1.4832 e 1.4832 . Il sistema è ovviamente instabile ed occorre stabilizzarlo con un controllore in retroazione. Per usare lo stesso controllore progettato per l'altro metodo occorre portare il sistema ad avere due poli nell'origine. Si effettua perciò una retroazione puramente proporzionale e si posizionano con un  $K=110$  i poli nell'origine ( vedi luogo delle radici di figura 5 ) . A questo sistema applico i controllori precedentemente progettati.

Ora i due sistemi in retroazione derivati dai due metodi sono identici. Per il confronto occorre applicare il controllore progettato sul lineare standard al sistema non lineare di partenza.

### 4.5.7 Controllo con $K=12.5$ e $K=100$

Si riportano nelle figure successive i grafici relativi alle simulazioni effettuate su MATLAB. Su ogni grafico sono riportate le risposte dei sistemi diversificate nel tratto :

1. — : controllo su sistema lineare standard
2. - - - : controllo su sistema non lineare
3. - . - . : controllo su linearizzato in feedback

### 4.5.8 Conclusioni

Si può notare dai grafici che le risposte dei sistemi sono identiche con angolo di partenza pari a 0.3 rad. Man mano che ci si allontana da questo angolo le risposte si diversificano fino ad arrivare al punto in cui il controllo, progettato sul sistema lineare standard e applicato al non lineare, genera instabilità (questo accade per  $K=100$  e angolo di partenza 1.6 rad). Ciò dimostra che , almeno in questo esempio, l'insieme di convergenza del controllo sul sistema lineare standard è più piccolo di quello del sistema linearizzato in feedback.

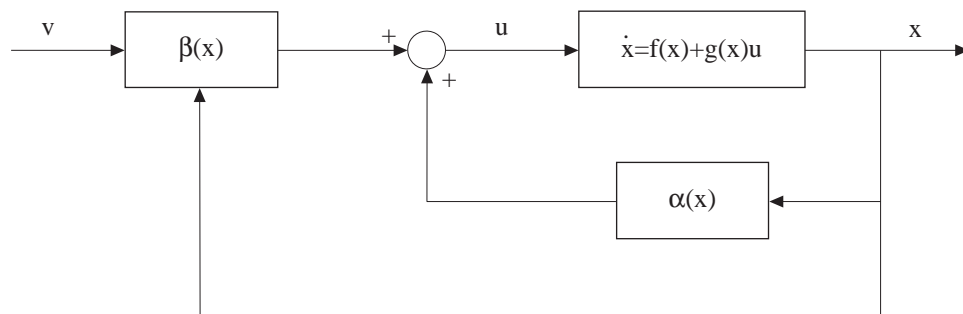


Figura 4.1: Sistema con linearizzazione input-stati

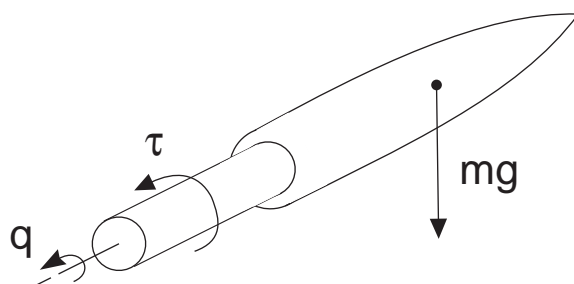


Figura 4.2: Link di un robot

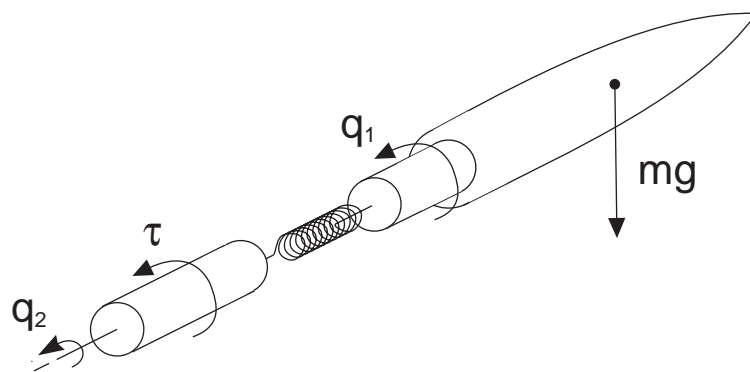


Figura 4.3: Link con cedevolezza

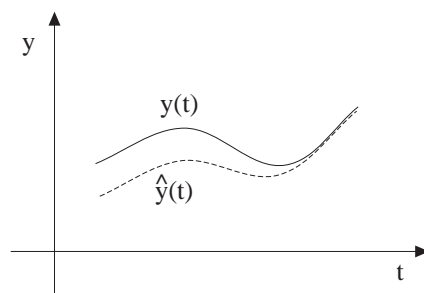


Figura 4.4: Inseguimento di tipo asintotico

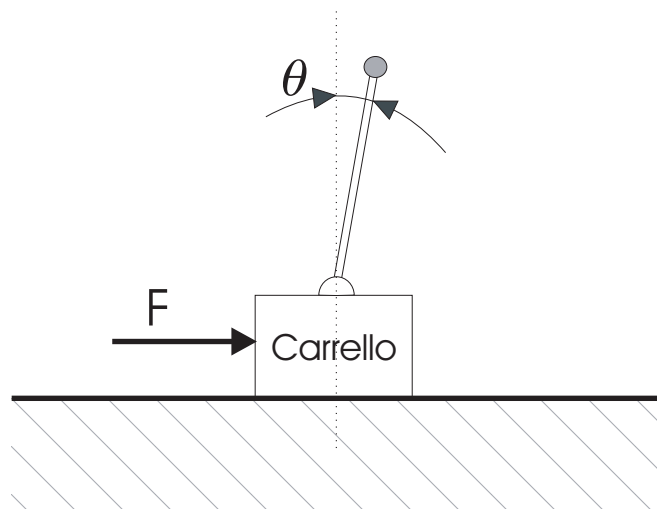
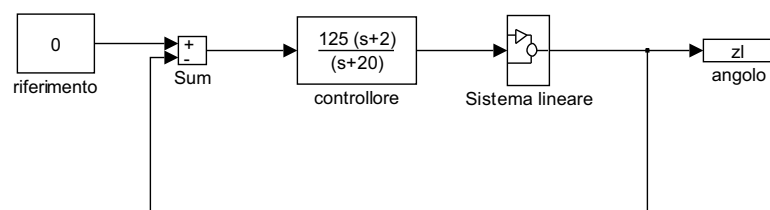


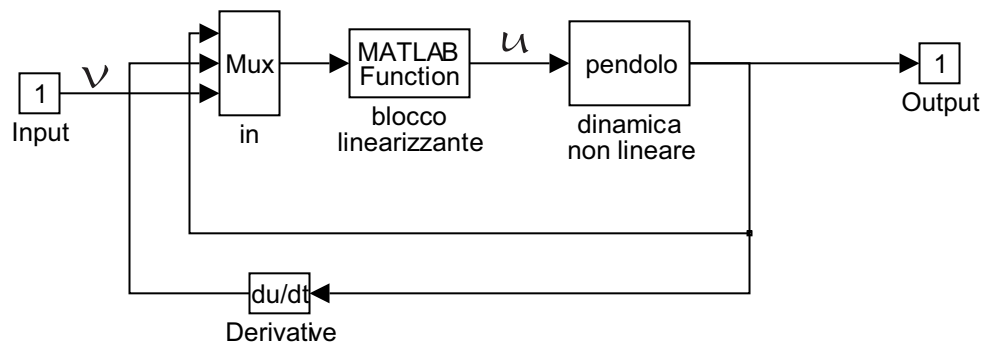
Figura 4.5: Pendolo inverso





## Sistema lineare in retroazione

Figura 4.6: Linearizzazione standard



## Linearizzazione in feedback

Figura 4.7: Linearizzazione in feedback

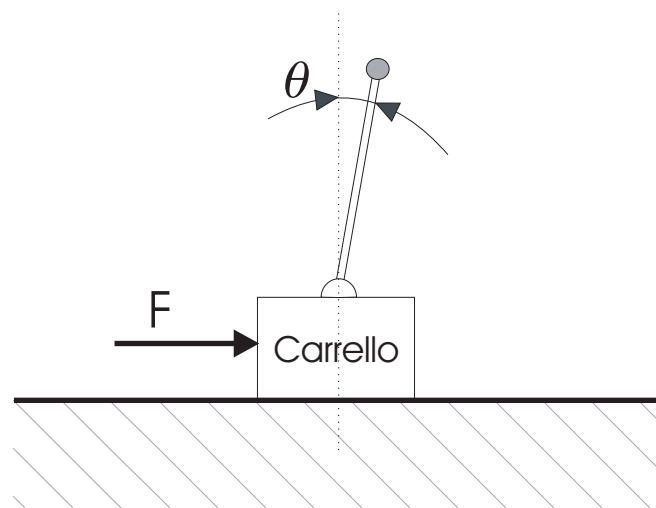


Figura 4.8: Pendolo inverso

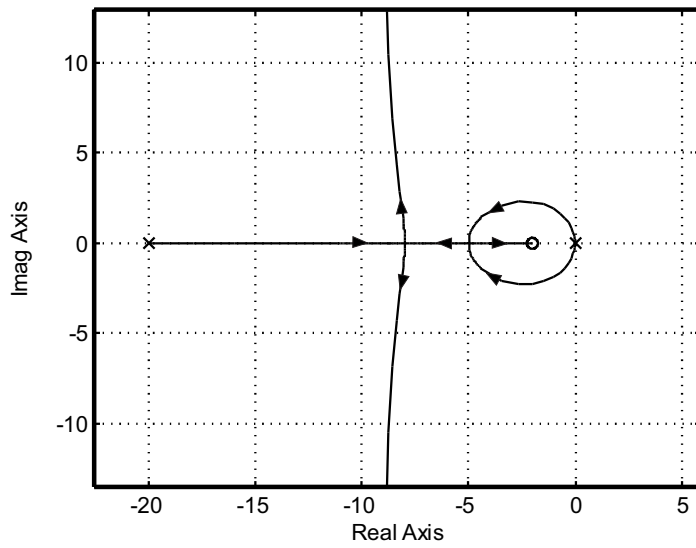


Figura 4.9: Luogo delle radici

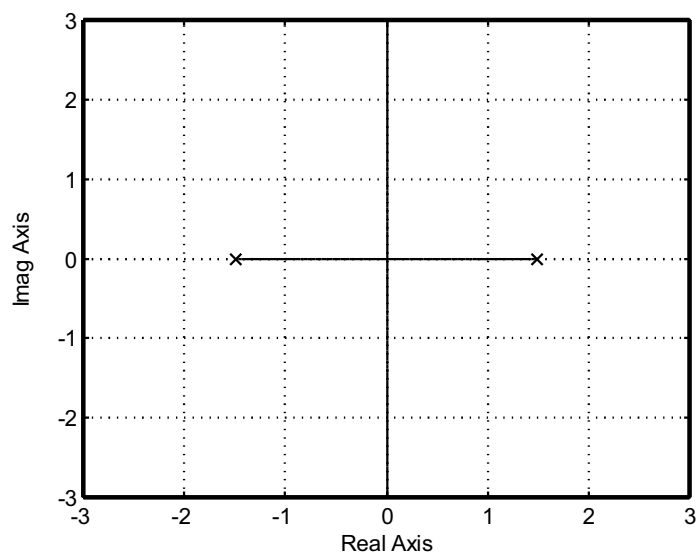


Figura 4.10: Luogo delle radici

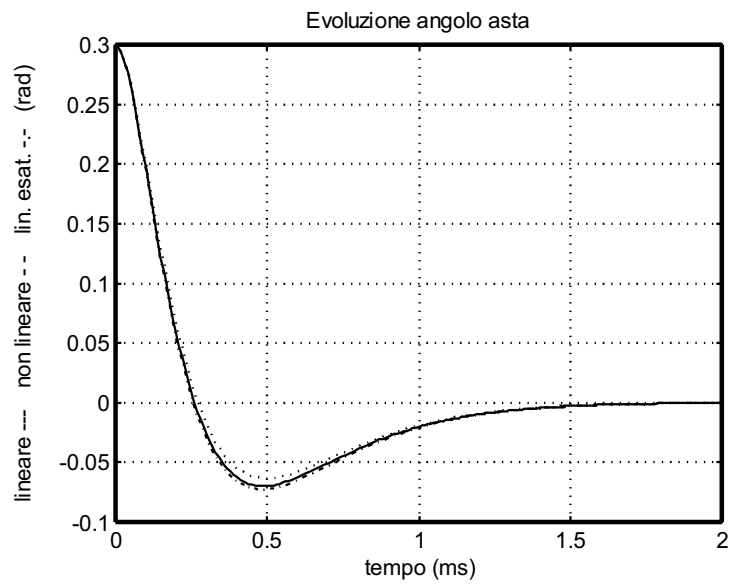


Figura 4.11: Simulazione con  $k=12.5$  e angolo  $0.3$

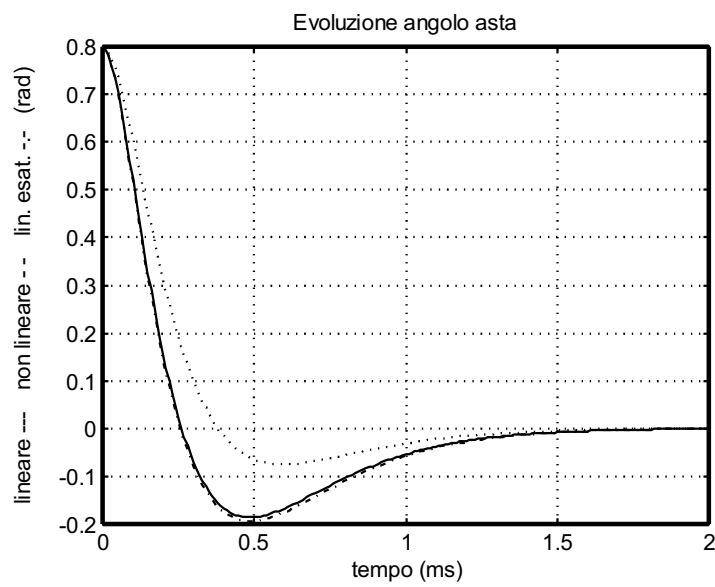


Figura 4.12: Simulazione con  $k=12.5$  e angolo 0.8

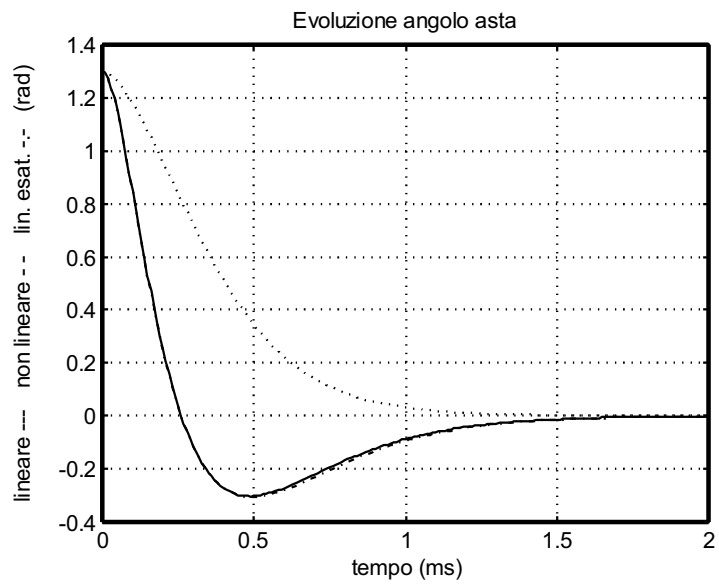


Figura 4.13: Simulazione con  $k=12.5$  e angolo 1.3



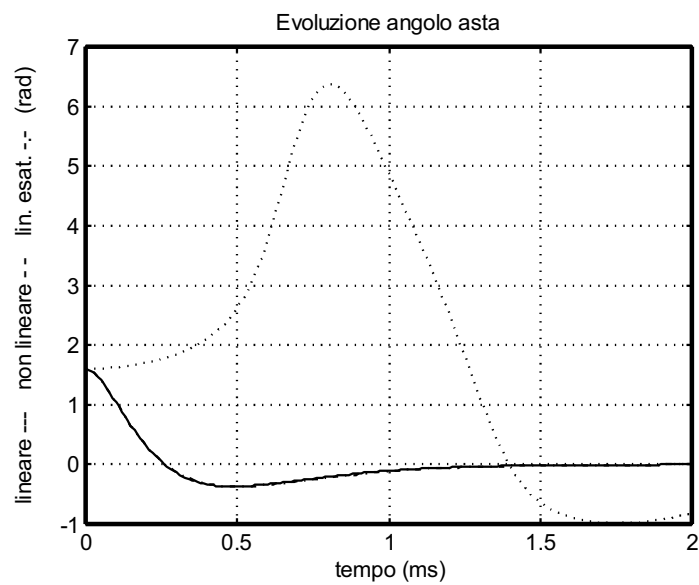


Figura 4.14: Simulazione con  $k=12.5$  e angolo 1.6

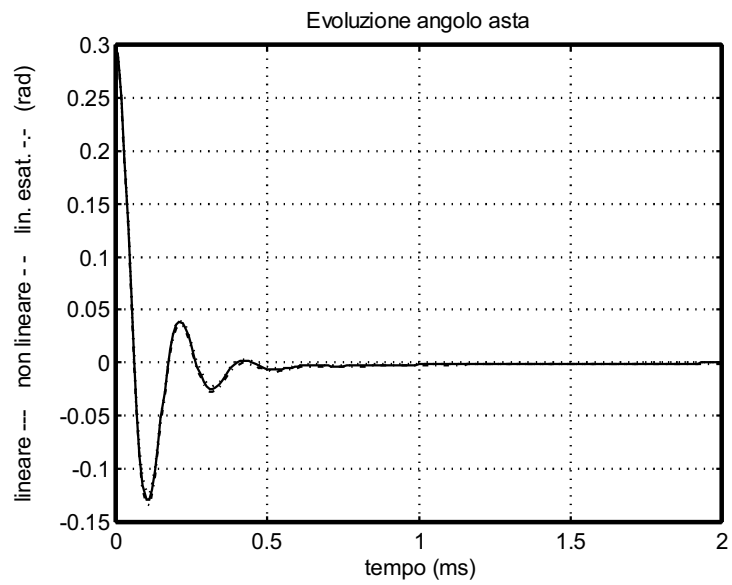


Figura 4.15: Simulazione con  $k=100$  e angolo 0.3

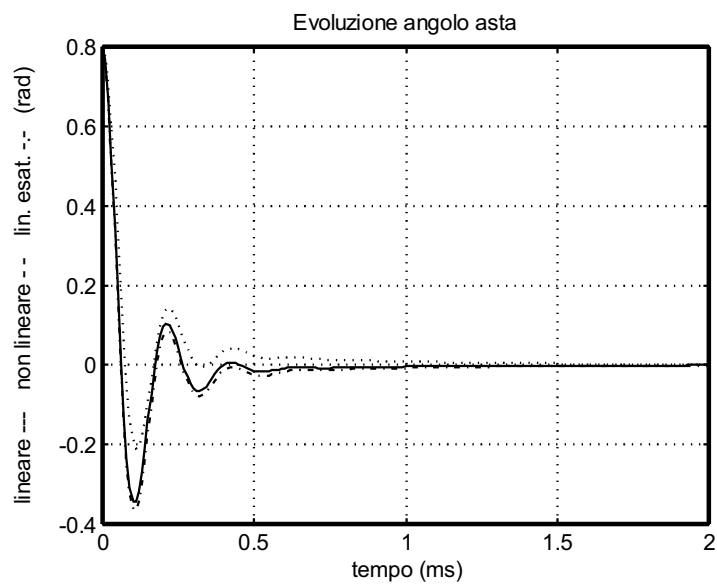


Figura 4.16: Simulazione con  $k=100$  e angolo 0.8

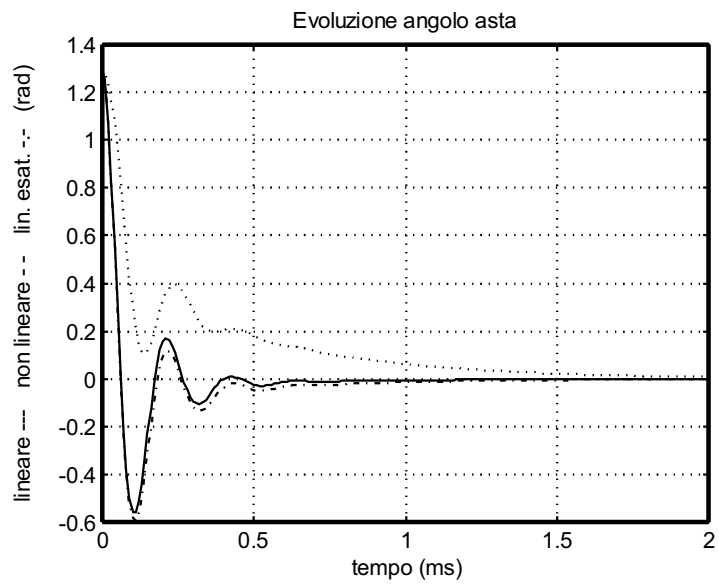


Figura 4.17: Simulazione con  $k=100$  e angolo 1.3

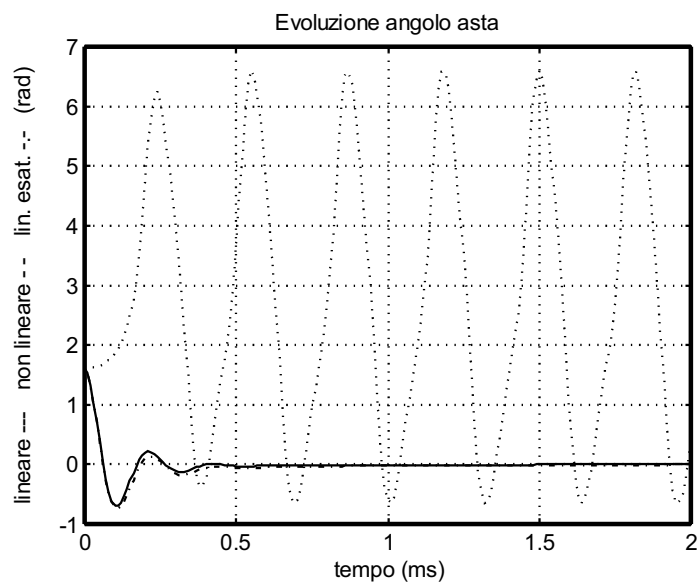


Figura 4.18: Simulazione con  $k=100$  e angolo 1.6