

APPENDICE

Sistemi di riferimento, operatori vettoriali, leggi di conservazione

Contenuti:

| | |
|---|---|
| A.1 Sistemi di riferimento: coordinate cilindriche e sferiche | 2 |
| A.1.1 Coordinate cilindriche | 2 |
| A.1.2 Coordinate sferiche..... | 3 |
| A.2 Operatori tridimensionali vettoriali..... | 4 |
| A.2.1 Operatore Nabla..... | 4 |
| A.2.2 Operatore Gradiente | 4 |
| A.2.3 Operatore Divergenza..... | 5 |
| A.2.4 Operatore Rotore | 5 |
| A.2.5 Operatore Laplaciano | 5 |
| A.2.6 Teorema di Gauss | 6 |
| A.2.6.1 Esempio di applicazione del teorema di Gauss | 6 |
| A.2.7 Teorema di Stokes | 7 |
| A.2.8 Alcune relazioni utili tra operatori vettoriali | 7 |
| A.3 Leggi di conservazione ed equazioni di continuità..... | 8 |
| A.3.1 Legge di conservazione della carica..... | 8 |
| A.3.1.1 Forma differenziale | 8 |
| A.3.1.2 Forma integrale | 8 |
| A.3.2 Legge di conservazione della massa..... | 9 |
| A.3.2.1 Forma differenziale | 9 |
| A.3.2.2 Forma integrale | 9 |

A.1 Sistemi di riferimento: coordinate cilindriche e sferiche

La scelta delle *coordinate cartesiane ortogonali* per un sistema di riferimento non è l'unica possibile. Nello spazio è possibile scegliere infiniti sistemi di riferimento. Quello cartesiano ortogonale è sicuramente il più semplice da utilizzare in un grande numero di applicazioni. Tuttavia in molti casi è utile adottare sistemi di riferimento diversi da esso. I più comuni sono il sistema delle *coordinate cilindriche* e quello delle *coordinate sferiche*, di seguito descritti.

A.1.1 Coordinate cilindriche

Il sistema delle coordinate cilindriche è definito rispetto ad un usuale sistema di riferimento cartesiano x, y, z nel modo indicato in Fig. A.1:

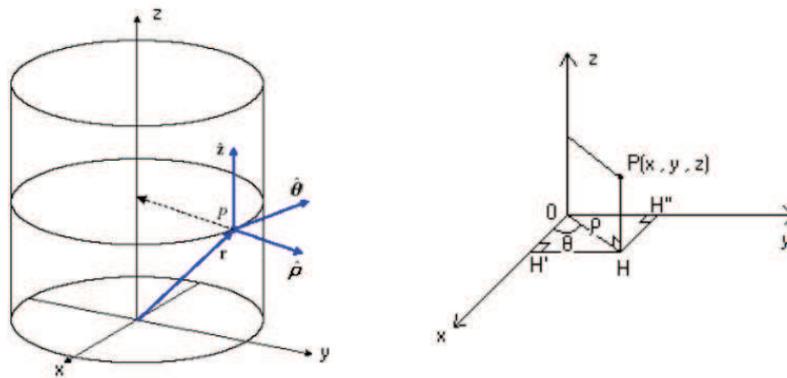


Fig. A.1. Base locale $(\hat{\rho}, \hat{\theta}, \hat{z})$ del sistema delle coordinate cilindriche (ρ, θ, z) rispetto a quello delle coordinate cartesiane ortogonali.

Se un punto P ha coordinate cartesiane (x, y, z) , la tripla ordinata (ρ, θ, z) rappresenta le coordinate cilindriche del punto P .

La coordinata ρ è il *raggio vettore* e può variare da 0 all'infinito. La coordinata θ è l'*anomalia* che viene misurata in senso antiorario rispetto al semiasse positivo Ox e può variare da 0 a 2π . La coordinata z si chiama *quota*. Il punto O si chiama *polo* e la semiretta Ox si chiama *asse polare*.

Le coordinate cartesiane in funzione delle coordinate cilindriche sono date dalle relazioni seguenti:

$$\begin{cases} x = \rho \cdot \cos \theta \\ y = \rho \cdot \sin \theta \\ z = z \end{cases} \quad \text{Eq. (A.1)}$$

Le relazioni che esprimono invece le coordinate cilindriche in funzione di quelle cartesiane sono:

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan \theta = \frac{y}{x} \end{cases} \quad \text{Eq. (A.2)}$$

La Fig. A.2 riporta le superfici coordinate delle coordinate cilindriche.

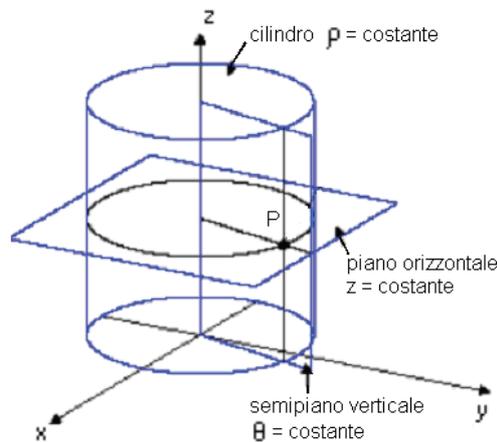


Fig. A.2. Superfici coordinate delle coordinate cilindriche

A.1.2 Coordinate sferiche

Un altro importante sistema di riferimento non cartesiano è costituito dalle *coordinate sferiche*. Esso è definito rispetto ad un usuale sistema di riferimento cartesiano nel modo indicato in Fig. A.3:

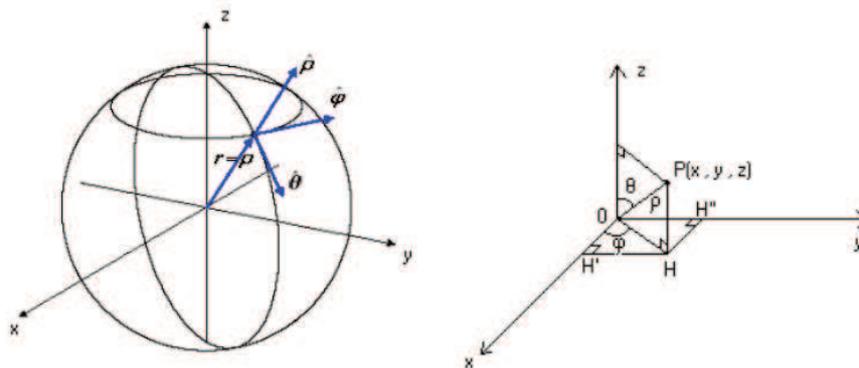


Fig. A.3. Base locale $(\hat{\rho}, \hat{\theta}, \hat{\phi})$ del sistema delle coordinate sferiche (ρ, θ, ϕ) rispetto a quello delle coordinate cartesiane ortogonali.

Se un punto P ha coordinate cartesiane (x, y, z) , la tripla ordinata (ρ, θ, ϕ) rappresenta le coordinate sferiche del punto P . La coordinata ρ è il *raggio vettore* e può variare da 0 all'infinito. La coordinata ϕ è la *longitudine*, che viene misurata in senso antiorario rispetto al semiasse positivo Ox e può variare da 0 a 2π . La coordinata θ è la *colatitudine* e può variare da 0 a π . Il punto O si chiama *polo* e l'asse Oz si chiama *asse polare*. Il semipiano appartenente al piano xz e contenente il semiasse positivo Ox si chiama *semipiano polare*.

Le coordinate cartesiane in funzione delle coordinate sferiche sono date dalle relazioni:

$$\begin{cases} x = \rho \cdot \text{sen}\theta \cdot \cos\phi \\ y = \rho \cdot \text{sen}\theta \cdot \text{sen}\phi \\ z = \rho \cdot \cos\theta \end{cases} \quad \text{Eq. (A.3)}$$

La relazione che esprime le coordinate sferiche in funzione di quelle cartesiane è:

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \cos \theta = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ \tan \varphi = \frac{y}{x} \end{cases} \quad \text{Eq. (A.4)}$$

La Fig. A.4 riporta le superfici coordinate delle coordinate sferiche.

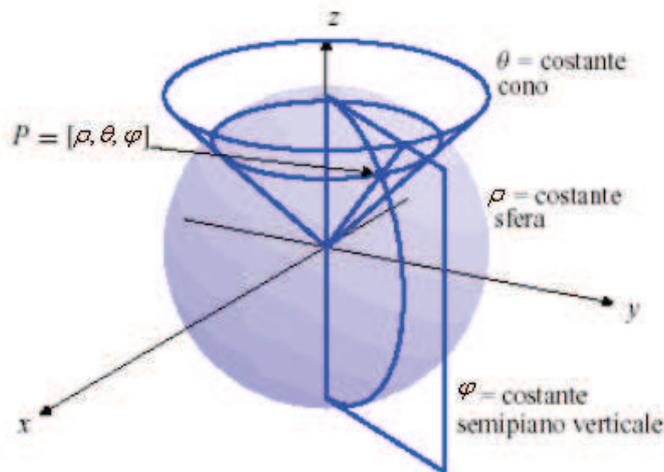


Fig. A.4. Superfici coordinate delle coordinate sferiche.

A.2 Operatori tridimensionali vettoriali

Sui campi scalari e vettoriali tridimensionali è possibile definire degli *operatori vettoriali* impiegati nella descrizione di molti fenomeni. Ad esempio, le equazioni di Maxwell che descrivono tutti i fenomeni elettromagnetici classici (non quantistici) sono espresse tramite questi operatori.

A.2.1 Operatore Nabla

L'operatore vettoriale *nabla* è un *vettore simbolico* (indicato dal simbolo $\vec{\nabla}$) definito come:

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \quad \text{Eq. (A.5)}$$

Si tratta di un vettore le cui componenti sono gli operatori di derivazione parziale prima secondo gli assi coordinati. Esso rappresenta un operatore vettoriale il cui utilizzo sarà chiarito nel seguito.

A.2.2 Operatore Gradiente

Dato un campo scalare φ , il suo *gradiente* (indicato con la sigla *grad* o semplicemente col nabla) è definito come il vettore ottenuto applicando l'operatore nabla allo scalare suddetto:

$$\text{grad}\varphi = \vec{\nabla}\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z} \right) = \hat{i} \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial\varphi}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial\varphi}{\partial z} \quad \text{Eq. (A.6)}$$

Il gradiente di uno scalare è quindi un vettore che ha per componenti le derivate parziali prime rispetto agli assi coordinati. Il gradiente ha la fondamentale proprietà di essere perpendicolare alla superficie $\varphi = k$ in ogni suo punto (dove k è una costante qualunque) come rappresentato in Fig. A.5:

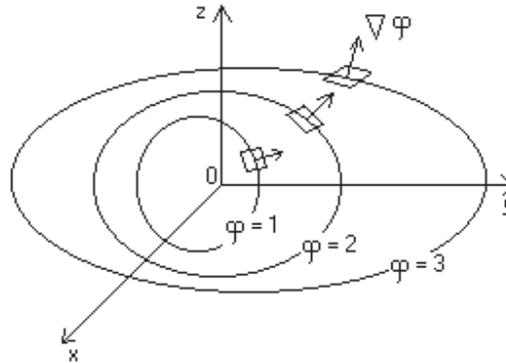


Fig. A.5. Perpendicolarità del vettore $\text{grad}\varphi$ alle superfici $\varphi = k$.

A.2.3 Operatore Divergenza

Dato un campo vettoriale \vec{V} , la sua *divergenza* (indicata con la sigla *div*) è definita come lo scalare dato dal prodotto scalare fra il vettore nabla e il vettore suddetto:

$$\text{div}\vec{V} = \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \quad \text{Eq. (A.7)}$$

La divergenza di un vettore è quindi uno scalare formato dalla somma delle derivate parziali prime delle componenti del vettore rispetto agli assi coordinati nell'ordine.

A.2.4 Operatore Rotore

Dato un campo vettoriale \vec{V} , il suo *rotore* (indicato con la sigla *rot*) è definito come il vettore ottenuto dal prodotto vettoriale fra il vettore nabla e il vettore suddetto:

$$\begin{aligned} \text{rot}\vec{V} = \vec{\nabla} \times \vec{V} &= \det \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{pmatrix} = \hat{i} \left(\frac{\partial}{\partial y} V_z - \frac{\partial}{\partial z} V_y \right) - \hat{j} \left(\frac{\partial}{\partial x} V_z - \frac{\partial}{\partial z} V_x \right) + \hat{k} \left(\frac{\partial}{\partial x} V_y - \frac{\partial}{\partial y} V_x \right) = \\ &\equiv \left(\frac{\partial}{\partial y} V_z - \frac{\partial}{\partial z} V_y, \frac{\partial}{\partial z} V_x - \frac{\partial}{\partial x} V_z, \frac{\partial}{\partial x} V_y - \frac{\partial}{\partial y} V_x \right) \end{aligned} \quad \text{Eq. (A.8)}$$

A.2.5 Operatore Laplaciano

L'operatore *laplaciano* (indicato dal simbolo ∇^2) è definito come:

$$\nabla^2 = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad \text{Eq. (A.9)}$$

Osservazione:

Il laplaciano di uno scalare φ è lo scalare che coincide con la divergenza del gradiente dello scalare:

$$\nabla^2 \varphi = \text{div}(\text{grad}\varphi) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla}\varphi) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \quad \text{Eq. (A.10)}$$

A.2.6 Teorema di Gauss

Consideriamo un campo vettoriale \vec{A} ed una superficie chiusa S che racchiuda un volume Vol . Supponiamo che la superficie sia suddivisa in infiniti elementi infinitesimi di area dS ciascuno dei quali dotato di un versore \vec{n} perpendicolare ad esso con verso orientato dall'interno all'esterno della superficie stessa (Fig. A.6).

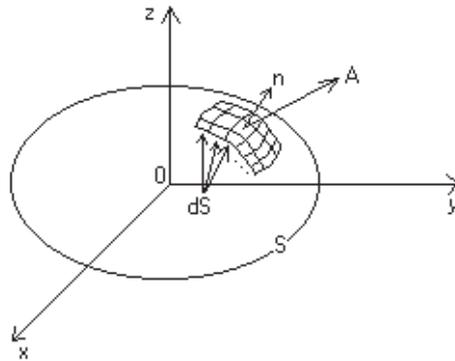


Fig. A.6. Flusso di un vettore \vec{A} attraverso una superficie S .

Sotto tale ipotesi, vale il seguente *teorema di Gauss* (o *teorema della divergenza*):

$$\oiint_S \vec{A} \cdot \vec{n} \, dS = \iiint_{Vol} \text{div}\vec{A} \, dV \quad \text{Eq. (A.11)}$$

L'integrale di sinistra è definito anche *flusso* del vettore \vec{A} sulla superficie S ed il cerchietto sul segno di tale integrale significa che l'integrale è calcolato su tutta la superficie chiusa.

A.2.6.1 Esempio di applicazione del teorema di Gauss

il teorema di Gauss è un utile strumento, di validità generale, per il calcolo del campo elettrico generato da una distribuzione di carica libera all'interno di un mezzo dielettrico omogeneo, isotropo e lineare di permeabilità ϵ_r (Fig. A.7).

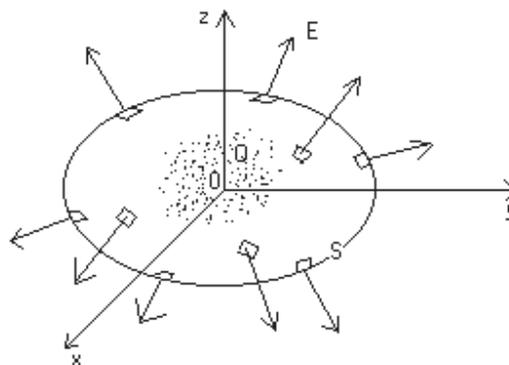


Fig. A.7. Flusso del campo elettrico \vec{E} attraverso una superficie S che racchiuda una densità di carica ρ .

Si considerino le seguenti grandezze:

S = superficie chiusa qualsiasi che racchiude una densità volumetrica di carica libera ($\rho_{lib} = Q_{lib} / Vol$);

\vec{n} = versore ortogonale alla superficie S , nel verso uscente.

\vec{E} = campo elettrico

φ = potenziale elettrico

Poichè sussistono le seguenti relazioni:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi \quad \text{Eq. (A.12)}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_{lib}}{\epsilon_0 \epsilon_r} \quad \text{Eq. (A.13)}$$

si ha:

$$\iiint_{Vol} \text{div} \vec{E} dVol = \iiint_{Vol} \frac{\rho_{lib}}{\epsilon_0 \epsilon_r} dVol = \frac{Q_{lib}}{\epsilon_0 \epsilon_r} \quad \text{Eq. (A.14)}$$

Quindi, il teorema di Gauss diviene:

$$\oiint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \frac{Q_{lib}}{\epsilon_0 \epsilon_r} \quad \text{Eq. (A.15)}$$

A.2.7 Teorema di Stokes

Consideriamo ora una superficie aperta S immersa in un campo vettoriale A . Chiamiamo C la linea orientata di contorno che delimita la superficie S . Supponiamo che la linea C sia suddivisa in infiniti elementi infinitesimi di ciascuno dei quali è dotato di un versore m tangente ad esso e con un verso corrispondente all'orientazione del contorno C . Supponiamo anche che la superficie S sia suddivisa in infiniti elementi infinitesimi di area dS e che ogni elemento dS sia dotato di un versore unitario n perpendicolare all'elemento stesso e dotato di un verso corrispondente al verso di avanzamento di una vite destrorsa che segue l'orientazione del contorno C . In tali ipotesi vale il *teorema di Stokes*:

$$\iint_S \text{rot} A \cdot n dS = \oint_C A \cdot m dl \quad \text{Eq. (A.16)}$$

L'integrale di sinistra è il flusso del rotore di A sulla superficie aperta e l'integrale di destra è la *circuitazione* (il simbolo circolare sull'integrale significa appunto che si integra su un percorso chiuso) del vettore A lungo il contorno C della superficie. Graficamente:

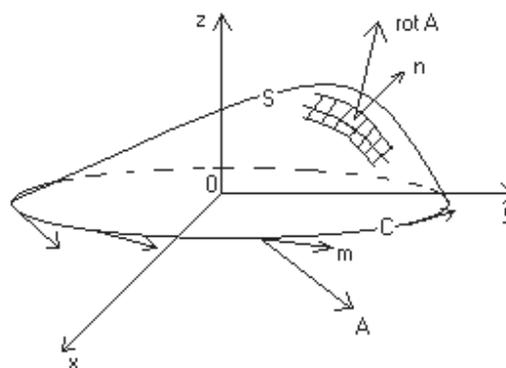


Fig. A.8. Condizioni di applicazione del teorema di Stokes.

A.2.8 Alcune relazioni utili tra operatori vettoriali

Si riportano di seguito alcune relazioni utili che sussistono per gli operatori vettoriali:

$$\begin{aligned}
\text{rotgrad}\varphi &= 0 \\
\text{divrot}V &= 0 \\
\text{divgrad}\varphi &= \Delta\varphi \\
\text{rotrot}V &= \nabla \times (\nabla \times V) = \nabla(\nabla \cdot V) - \Delta V \\
\text{rot}(\varphi V) &= \varphi \text{rot}V + (\text{grad}\varphi) \times V \\
V \cdot \text{grad}\varphi &= \text{div}(V\varphi) - \varphi \text{div}V \\
\text{grad}(A \cdot B) &= (A \cdot \nabla)B + (B \cdot \nabla)A + A \times \text{rot}B + B \times \text{rot}A \\
\text{div}(A \times B) &= B \cdot \text{rot}A - A \cdot \text{rot}B
\end{aligned}
\tag{A.17}$$

A.3 Leggi di conservazione ed equazioni di continuità

Una legge di conservazione è rappresentata da un'equazione di continuità che esprime il flusso della grandezza che si conserva attraverso una superficie chiusa. L'equazione di continuità può essere espressa sia come legge differenziale che come legge integrale. Si riportano di seguito due fondamentali leggi di conservazione.

A.3.1 Legge di conservazione della carica

A.3.1.1 Forma differenziale

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J}_q = -\frac{\partial \rho_q}{\partial t} \tag{A.18}$$

dove:

\vec{J}_q = vettore del *flusso di carica* (vettore densità di corrente elettrica), $[\vec{J}_q] = C/(s \cdot m^2) = A/m^2$;

ρ_q = densità volumetrica di carica all'interno di un volume Vol racchiuso da una superficie S , $[\rho_q] = C/m^3$;

t = tempo.

Nota: In condizioni di *flusso stazionario*:

la densità di carica si conserva nel tempo: $\rho_q(t) = cost$

per cui:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J}_q = 0 \tag{A.19}$$

A.3.1.2 Forma integrale

La forma integrale (sul volume Vol) è data pertanto da:

$$\iiint_{Vol} \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_q dVol = -\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{Vol} \rho_q dVol \tag{A.20}$$

Applicando il teorema di Gauss al primo membro, tale equazione può essere riscritta come:

$$\oiint_S \vec{J}_q \cdot \vec{n} dS = -\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{Vol} \rho_q dVol \tag{A.21}$$

ossia:

$$I = -\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{Vol} \rho_q dVol \quad \text{Eq. (A.22)}$$

con I = corrente elettrica.

Pertanto, si ha il seguente enunciato della *legge di conservazione della carica*:

il flusso della densità di corrente elettrica (ossia: la corrente elettrica) attraverso una qualunque superficie chiusa S è pari alla variazione temporale della carica contenuta nel volume racchiuso da S .

A.3.2 Legge di conservazione della massa

A.3.2.1 Forma differenziale

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J}_m = -\frac{\partial \rho_m}{\partial t} \quad \text{Eq. (A.23)}$$

dove:

\vec{J}_m = vettore del *flusso di massa* (vettore densità di 'corrente di massa'), ad esempio $[\vec{J}_m] = \text{mol}/(\text{s m}^2)$ dove *mol* rappresenta un numero di moli;

ρ_m = densità volumetrica di massa all'interno di un volume *Vol* racchiuso da una superficie *S*, $[\rho_m] = \text{mol} / \text{m}^3$;
 t = tempo.

Nota: In condizioni di *flusso stazionario*:

la densità di massa si conserva nel tempo: $\rho_m(t) = \text{cost}$

per cui:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J}_m = 0 \quad \text{Eq. (A.24)}$$

A.3.2.2 Forma integrale

La forma integrale (sul volume *Vol*) è data pertanto da:

$$\iiint_{Vol} \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_m dVol = -\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{Vol} \rho_m dVol \quad \text{Eq. (A.25)}$$

Applicando il teorema di Gauss al primo membro, tale equazione può essere riscritta come:

$$\oiint_S \vec{J}_m \cdot \vec{n} dS = -\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{Vol} \rho_m dVol \quad \text{Eq. (A.26)}$$

Pertanto, si ha il seguente enunciato della *legge di conservazione della massa*:

il flusso della densità di 'corrente di massa' attraverso una qualunque superficie chiusa S è pari alla variazione temporale della massa contenuta nel volume racchiuso da S .

Mathematical Relationships

A.1 VECTOR IDENTITIES

\mathbf{A} is a vector defined as

$$\mathbf{A} = e_1 A_1 + e_2 A_2 + e_3 A_3$$

where $e_1, e_2,$ and e_3 are unit vectors in the coordinate directions and $A_1, A_2,$ and A_3 are the components of the vector. A scalar is denoted as ϕ . ∇ is the operator "del".

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3 \quad \text{A.1}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \quad \text{A.2}$$

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} \quad \text{A.3}$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} \quad \text{A.4}$$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = (\mathbf{A} \times \mathbf{C}) + (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \quad \text{A.5}$$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) + (\mathbf{A} \times \mathbf{C}) \quad \text{A.6}$$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \quad \text{A.7}$$

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} \quad \text{A.8}$$

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) \quad \text{A.9}$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) &= \mathbf{B}[\mathbf{A} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D})] - \mathbf{A}[\mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D})] \\ &= \mathbf{C}[\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{D})] - \mathbf{D}[\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})] \end{aligned} \quad \text{A.10}$$

$$\nabla^2 \phi = \nabla \cdot \nabla \phi \quad \text{A.11}$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} = (\nabla \cdot \nabla) \mathbf{A} \quad \text{A.12}$$

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} = 0 \quad \text{A.13}$$

4.12 REFERENCES

1. Corben, H. C., and Stehle, P., *Classical Mechanics*, Wiley, 1950
2. Goldstein, H., *Classical Mechanics*, Addison-Wesley, 1950
3. Shames, I., *Engineering Mechanics*, Prentice Hall, 1958
4. Synge, J. L., and Griffith, B. A., *Principles of Mechanics*, McGraw Hill, 1959
5. Whittaker, E. T., *Analytical Dynamics*, Cambridge University Press, 1937, or Dover, 1944

$$\nabla \times \nabla \phi = 0 \quad \text{A.14}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \quad \text{A.15}$$

$$(\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{A} = \nabla \left(\frac{|\mathbf{A}|^2}{2} \right) - \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{A}) \quad \text{A.16}$$

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A}) - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} + \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B}) \quad \text{A.17c}$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{B} \quad \text{A.17b}$$

$$\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} + (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) \quad \text{A.18}$$

A.2 VECTOR INTEGRALS

Listed below are the more common vector integral theorems.

(a) *Stokes' Theorem.*

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} \quad \text{A.19}$$

where the curve C defines the surface S . Fig. A-1 below illustrates the surface. The sense of the line integral is counterclockwise with respect to the vector $d\mathbf{S}$.

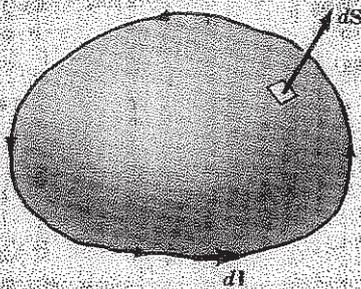


Fig. A-1

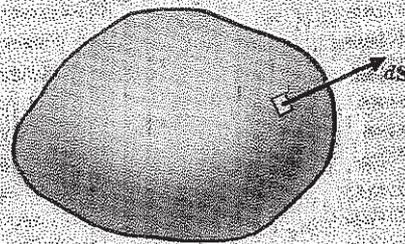


Fig. A-2

(b) *Gauss' Theorem or Divergence Theorem.*

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV = \int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \quad \text{A.20}$$

where the surface S defines the volume V . Fig. A-2 above shows this surface and volume.

(c) *Green's Theorems.*

If a vector \mathbf{A} is derived from a potential ϕ as

$$\mathbf{A} = \nabla \phi$$

then the line integral of the vector \mathbf{A} can be expressed as

$$\int_A^B \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_A^B d\phi \quad \text{A.21}$$

Under the above condition the following theorem may be stated:

$$\begin{aligned} \int_V \nabla\phi \cdot \nabla\psi \, dV &= \int_S \phi \nabla\psi \cdot dS - \int_V \phi \nabla^2\psi \, dV \\ &= \int_S \psi \nabla\phi \cdot dS - \int_V \psi \nabla^2\phi \, dV \end{aligned} \quad \text{A.22}$$

A.3 VECTOR OPERATIONS IN VARIOUS COORDINATE SYSTEMS

Referring to Fig. A-3 below, which shows the various coordinate systems, the basic vector operations can be written:

(a) Gradient.

Cartesian:

$$(\nabla\phi)_x = \frac{\partial\phi}{\partial x} \quad \text{A.23}$$

$$(\nabla\phi)_y = \frac{\partial\phi}{\partial y}$$

$$(\nabla\phi)_z = \frac{\partial\phi}{\partial z}$$

Cylindrical:

$$(\nabla\phi)_r = \frac{\partial\phi}{\partial r} \quad \text{A.24}$$

$$(\nabla\phi)_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial\phi}{\partial\theta}$$

$$(\nabla\phi)_z = \frac{\partial\phi}{\partial z}$$

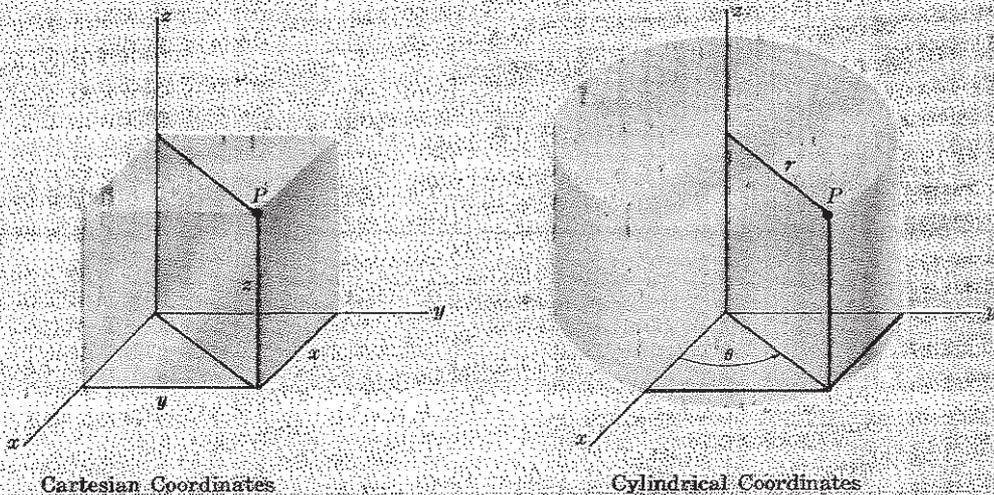
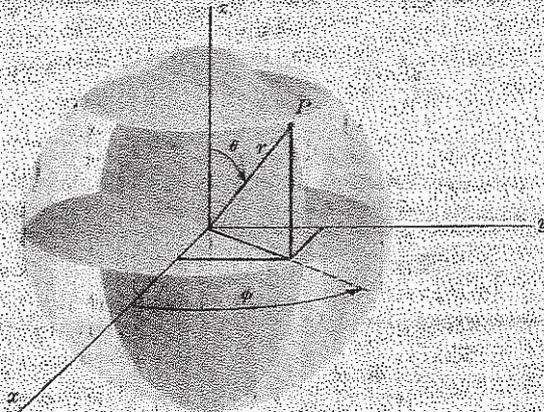


Fig. A-3. The Basic Coordinate Systems.



Spherical Coordinates

Fig. A-3. The Basic Coordinate Systems (cont.).

Spherical

$$(\nabla\Phi)_r = \frac{\partial\Phi}{\partial r} \quad \text{A.25}$$

$$(\nabla\Phi)_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial\Phi}{\partial\theta}$$

$$(\nabla\Phi)_\phi = \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial\Phi}{\partial\phi}$$

(b) *Divergence.*Cartesian:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad \text{A.26}$$

Cylindrical:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rA_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad \text{A.27}$$

Spherical:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\theta) + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial\phi} \quad \text{A.28}$$

(c) *Laplacian.*Cartesian:

$$\nabla^2\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} \quad \text{A.29}$$

Cylindrical:

$$\nabla^2\Phi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial\Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} \quad \text{A.30}$$

Spherical:

$$\nabla^2\Phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial\Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2} \quad \text{A.31}$$

(d) CurlCartesian:

$$(\nabla \times \mathbf{A})_x = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \quad \text{A.32}$$

$$(\nabla \times \mathbf{A})_y = \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right)$$

$$(\nabla \times \mathbf{A})_z = \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right)$$

Cylindrical:

$$(\nabla \times \mathbf{A})_r = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) \quad \text{A.33}$$

$$(\nabla \times \mathbf{A})_\theta = \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right)$$

$$(\nabla \times \mathbf{A})_z = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right]$$

Spherical:

$$(\nabla \times \mathbf{A})_r = \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\phi) - \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \right] \quad \text{A.34}$$

$$(\nabla \times \mathbf{A})_\theta = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi)$$

$$(\nabla \times \mathbf{A})_\phi = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right]$$

(e) Scalar Product.Cartesian:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \quad \text{A.35}$$

Cylindrical:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_r B_r + A_\theta B_\theta + A_z B_z \quad \text{A.36}$$

Spherical:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_r B_r + A_\theta B_\theta + A_\phi B_\phi \quad \text{A.37}$$

(f) Vector Product.Cartesian:

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B})_x = A_y B_z - A_z B_y \quad \text{A.38}$$

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B})_y = A_z B_x - A_x B_z$$

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B})_z = A_x B_y - A_y B_x$$

Cylindrical:

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B})_r = A_\theta B_z - A_z B_\theta \quad \text{A.39}$$

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B})_\theta = A_z B_r - A_r B_z$$

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B})_z = A_r B_\theta - A_\theta B_r$$

Spherical

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B})_r = A_\theta B_\phi - A_\phi B_\theta \quad \text{A.40}$$

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B})_\theta = A_\phi B_r - A_r B_\phi$$

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B})_\phi = A_r B_\theta - A_\theta B_r$$

(g) Material Derivative.

The material derivative is also known as the substantial or Stokes' derivative. The operation is different depending on whether it operates on a vector or scalar component. The equations listed below are for operation on a scalar. The general operation on a vector has been indicated in the derivation and discussion of the fluid dynamical acceleration and will not be repeated here. The reader is referred to Section 1.5 of Chapter 1.

Cartesian

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \quad \text{A.41}$$

Cylindrical

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \quad \text{A.42}$$

Spherical

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \quad \text{A.43}$$

*(h) The Biharmonic Operator, ∇^4 .*Cartesian

$$\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} + \frac{\partial^4}{\partial z^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial z^2} + 2 \frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial z^2} \quad \text{A.44}$$

Cylindrical

$$\nabla^4 = \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \cdot \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \quad \text{A.45}$$

Spherical

$$\nabla^4 = \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] \cdot \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] \quad \text{A.46}$$

A.4 ORTHOGONAL CURVILINEAR COORDINATES

The orthogonal coordinates are denoted as x_1 , x_2 , and x_3 . The line element of length is given by

$$ds^2 = h_1^2 dx_1^2 + h_2^2 dx_2^2 + h_3^2 dx_3^2 \quad \text{A.47}$$

and the element of volume as

$$dV = h_1 h_2 h_3 dx_1 dx_2 dx_3 \quad \text{A.48}$$

The table below lists various orthogonal coordinate systems and the values of the metric coefficients h_1 , h_2 , and h_3 , together with the relationships between the coordinates and the Cartesian coordinates x , y , and z . For a more complete discussion of the general theory of orthogonal transformation theory and the matrix formulation, the reader is referred to the chapter on dynamics (Chapter 4).

Listed below, then, is an outline of the coordinate systems. For a more complete discussion of the physical significance of the coordinate systems the reader is referred to the references at the end of this appendix. In particular, the reference to Margenau and Murphy is useful.

Tables of Orthogonal Coordinate Systems

| | Cartesian | Cylindrical $x = r \cos \theta$ $y = r \sin \theta$ $z = z$ | Spherical $x = r \sin \theta \cos \phi$ $y = r \sin \theta \sin \phi$ $z = r \cos \theta$ | Confocal Ellipsoidal (a, b and c are constants) $x^2 = \frac{(a^2 - \lambda)(a^2 - \mu)(a^2 - \nu)}{(b^2 - a^2)(c^2 - a^2)}$ $y^2 = \frac{(b^2 - \lambda)(b^2 - \mu)(b^2 - \nu)}{(a^2 - b^2)(c^2 - b^2)}$ $z^2 = \frac{(c^2 - \lambda)(c^2 - \mu)(c^2 - \nu)}{(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)}$ |
|---------|-----------|--|--|---|
| x_1 | x | r | r | λ |
| h_1^2 | 1 | 1 | 1 | $\frac{1}{4} \left\{ \frac{(\mu - \lambda)(\nu - \lambda)}{(a^2 - \lambda)(b^2 - \lambda)(c^2 - \lambda)} \right\}$ |
| x_2 | y | θ | ϕ | μ |
| h_2^2 | 1 | r^2 | $r^2 \sin^2 \theta$ | $\frac{1}{4} \left\{ \frac{(\nu - \mu)(\lambda - \mu)}{(a^2 - \mu)(b^2 - \mu)(c^2 - \mu)} \right\}$ |
| x_3 | z | z | θ | ν |
| h_3^2 | 1 | 1 | r^2 | $\frac{1}{4} \left\{ \frac{(\lambda - \nu)(\mu - \nu)}{(a^2 - \nu)(b^2 - \nu)(c^2 - \nu)} \right\}$ |

| | Prolate Spheroidal $x = a \sinh u \sin v \cos \phi$ $y = a \sinh u \sin v \sin \phi$ $z = a \cosh u \cos v$ | Oblate Spheroidal $x = a \cosh u \sin v \cos \phi$ $y = a \cosh u \sin v \sin \phi$ $z = a \sinh u \cos v$ | Elliptic Cylindrical $x = a \cosh u \cos v$ $y = a \sinh u \sin v$ $z = z$ |
|---------|--|---|---|
| x_1 | u | u | u |
| h_1^2 | $a^2(\sinh^2 u + \sin^2 v)$ | $a^2(\sinh^2 u + \cos^2 v)$ | $a^2(\sinh^2 u + \sin^2 v)$ |
| x_2 | v | v | v |
| h_2^2 | $a^2(\sinh^2 u + \sin^2 v)$ | $a^2(\sinh^2 u + \cos^2 v)$ | $a^2(\sinh^2 u + \sin^2 v)$ |
| x_3 | ϕ | ϕ | z |
| h_3^2 | $a^2(\sinh^2 u \sin^2 v)$ | $a^2 \cosh^2 u \sin^2 v$ | 1 |

Tables of Orthogonal Coordinate Systems (cont.)

| | Conical coordinates | Confocal Paraboloidal | Parabolic coordinates |
|---------|---|--|--|
| | $x^2 = \frac{a^2 v^2 w^2}{b^2 c^2}$ $y^2 = \frac{a^2 (v^2 - b^2)(w^2 - b^2)}{b^2 (b^2 - c^2)}$ $z^2 = \frac{a^2 (v^2 - c^2)(w^2 - c^2)}{c^2 (c^2 - b^2)}$ | $x^2 = \frac{(a^2 - \lambda)(a^2 - \mu)(a^2 - \nu)}{(b^2 - a^2)}$ $y^2 = \frac{(b^2 - \lambda)(b^2 - \mu)(b^2 - \nu)}{(a^2 - b^2)}$ $z = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - \lambda - \mu - \nu)$ | $x = \xi \eta \cos \phi$ $y = \xi \eta \sin \phi$ $z = (\eta^2 - \xi^2)/2$ |
| x_1 | u | λ | ξ |
| h_1^2 | 1 | $\frac{1}{4} \frac{(\mu - \lambda)(\nu - \lambda)}{(a^2 - \lambda)(b^2 - \lambda)}$ | $(\xi^2 + \eta^2)$ |
| x_2 | v | μ | η |
| h_2^2 | $\frac{a^2 (v^2 - w^2)}{(v^2 - b^2)(c^2 - v^2)}$ | $\frac{1}{4} \frac{(\nu - \mu)(\lambda - \mu)}{(a^2 - \mu)(b^2 - \mu)}$ | $(\xi^2 + \eta^2)$ |
| x_3 | w | ν | ϕ |
| h_3^2 | $\frac{a^2 (v^2 - w^2)}{(w^2 - b^2)(w^2 - c^2)}$ | $\frac{1}{4} \frac{(\lambda - \nu)(\mu - \nu)}{(a^2 - \nu)(b^2 - \nu)}$ | $\xi^2 \eta^2$ |

| | Parabolic Cylindrical | Bipolar coordinates | Toroidal coordinates |
|---------|---|---|--|
| | $x = \xi \eta$ $y = (\eta^2 - \xi^2)/2$ $z = z$ | $x = \frac{a \sinh \eta}{\cosh \eta - \cos \xi}$ $y = \frac{a \sin \xi}{\cosh \eta - \cos \xi}$ $z = z$ | $x = r \cos \psi$ $y = r \sin \psi$ $r = \frac{a \sinh \eta}{\cosh \eta - \cos \xi}$ $z = \frac{a \sin \xi}{\cosh \eta - \cos \xi}$ |
| x_1 | ξ | ξ | ξ |
| h_1^2 | $(\xi^2 + \eta^2)$ | $\frac{a^2}{(\cosh \eta - \cos \xi)^2}$ | $\frac{a^2}{(\cosh \eta - \cos \xi)^2}$ |
| x_2 | η | η | η |
| h_2^2 | $(\xi^2 + \eta^2)$ | $\frac{a^2}{(\cosh \eta - \cos \xi)^2}$ | $\frac{a^2}{(\cosh \eta - \cos \xi)^2}$ |
| x_3 | z | z | ψ |
| h_3^2 | 1 | 1 | $\frac{a^2 \sinh^2 \eta}{(\cosh \eta - \cos \xi)^2}$ |

*Vector Operations in Orthogonal Curvilinear Coordinates.*Gradient.

$$(\nabla\Phi)_1 = \frac{1}{h_1} \frac{\partial\Phi}{\partial x_1} \quad \text{A.49}$$

$$(\nabla\Phi)_2 = \frac{1}{h_2} \frac{\partial\Phi}{\partial x_2}$$

$$(\nabla\Phi)_3 = \frac{1}{h_3} \frac{\partial\Phi}{\partial x_3}$$

Divergence.

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} (h_2 h_3 A_1) + \frac{\partial}{\partial x_2} (h_3 h_1 A_2) + \frac{\partial}{\partial x_3} (h_1 h_2 A_3) \right] \quad \text{A.50}$$

Curl.

$$(\nabla \times \mathbf{A})_1 = \frac{1}{h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial x_2} (h_3 A_3) - \frac{\partial}{\partial x_3} (h_2 A_2) \right] \quad \text{A.51}$$

$$(\nabla \times \mathbf{A})_2 = \frac{1}{h_1 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial x_3} (h_1 A_1) - \frac{\partial}{\partial x_1} (h_3 A_3) \right]$$

$$(\nabla \times \mathbf{A})_3 = \frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} (h_2 A_2) - \frac{\partial}{\partial x_2} (h_1 A_1) \right]$$

Laplacian.

$$\nabla^2\Phi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial\Phi}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial\Phi}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial\Phi}{\partial x_3} \right) \right] \quad \text{A.52}$$

Material Derivative.

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{w_1}{h_1} \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{w_2}{h_2} \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{w_3}{h_3} \frac{\partial}{\partial x_3} \quad \text{A.53}$$

where w_1 , w_2 , and w_3 are the velocities in the coordinate directions.

A.5 TRIGONOMETRIC RELATIONSHIPS

(a) Trigonometric Identities.

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \quad \text{A.54}$$

$$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta \quad \text{A.55}$$

$$1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta \quad \text{A.56}$$

$$\sin 2\theta = 2 \sin\theta \cos\theta \quad \text{A.57}$$

$$\cos 2\theta = 2 \cos^2\theta - 1 = \cos^2\theta - \sin^2\theta \quad \text{A.58}$$

$$\tan 2\theta = \frac{2 \tan\theta}{1 - \tan^2\theta} \quad \text{A.59}$$