

Capitolo 3

Proprietà fisiche dei tessuti

3.1 Proprietà ultrasoniche

Quando si parla di ultrasuoni si parla di *vibrazioni meccaniche* emesse a frequenze superiori alla banda dell'udibile. L'orecchio umano, infatti, riesce a percepire suoni con frequenze comprese tra 20 Hz e 20 kHz. Gli ultrasuoni sono tutte le radiazioni di natura meccanica con frequenza maggiore di 20 kHz (figura 3.1).

In ogni caso, in ambito medico le frequenze che competono agli ultrasuoni vengono notevolmente circoscritte: le più utilizzate infatti sono comprese nell'intervallo $2 \text{ MHz} < f < 20 \text{ MHz}$ con una attenzione particolare per la frequenza $f_1 = 2,25 \text{ MHz}$. Vediamo in dettaglio di cosa stiamo parlando.

Gli ultrasuoni, di fatto, sono delle onde meccaniche di compressione e rarefazione del materiale in cui si propagano. Tale mezzo influenza notevolmente la velocità di propagazione degli ultrasuoni: ad esempio si parla di velocità $c = 1480 \text{ m s}^{-1}$ in acqua e $c = 343 \text{ m s}^{-1}$ in aria.

Un ulteriore fattore che va considerato è l'*impedenza acustica* del mezzo, definita come il prodotto fra la densità del mezzo e la velocità del suono nel mezzo stesso:

$$z = \rho c \quad (3.1)$$

z viene misurata in rayl ($1 \text{ rayl} = 1 \text{ kg}/(\text{m}^2 \text{ s})$) ed in medicina è molto importante quella dell'acqua (vedi sezione 4.5) in quanto simile a quella dei tessuti costituenti il corpo umano. L'impedenza acustica, comunque, ai fini della riflessione e della trasmissione, gioca lo stesso ruolo dell'*indice di rifrazione* in ottica. Anche qui, quindi, è possibile distinguere tra *acustica geometrica* e *fisica* (se la lunghezza d'onda λ della radiazione è dello stesso ordine di grandezza delle discontinuità).

In regime geometrico, ad esempio, un raggio di radiazione acustica incidente su una interfaccia viene riflesso o trasmesso in funzione della differenza di impedenza acustica tra i due mezzi.

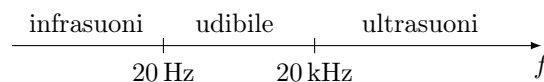


Figura 3.1: Spettro delle onde meccaniche

3.1.1 Velocità degli ultrasuoni

La velocità delle onde ultrasoniche, come abbiamo detto, dipende fortemente dal mezzo in cui tali onde si propagano e quindi, per riuscire a calcolarla, la prima cosa da fare è modellizzare il mezzo stesso.

Per semplicità di trattazione, consideriamo il nostro tessuto come un insieme di molle variamente connesse (nel caso di mezzo viscoelastico avremmo anche degli smorzatori). Nel caso di un solido, l'onda ultrasonica può avere sia una componente *trasversale* che una *longitudinale* che, in generale, posseggono una velocità di propagazione differente.

Considerando il caso più semplice di mezzo elastico e isotropo le componenti longitudinale e trasversale della velocità nel solido (c_{LS} e c_{TS}) sono pari a

$$c_{LS} = \sqrt{\frac{E(1-\nu)}{\rho(1-2\nu)(1+\nu)}} \quad c_{TS} = \sqrt{\frac{E}{2\rho(1+\nu)}} \quad (3.2)$$

dove E è il modulo elastico del materiale, ν il coefficiente (o rapporto) di Poisson e ρ la sua densità.

Quando si parla di un liquido, invece, la situazione cambia perchè i liquidi, sotto l'azione di forze tangenziali, scorrono senza opporre resistenza e quindi la trasmissione di onde pressorie trasversali è impossibile. Allora si avrà solamente la componente longitudinale di velocità nel liquido (c_{LL}), definita come

$$c_{LL} = \frac{1}{\sqrt{\beta\rho}} \quad (3.3)$$

dove β è il *coefficiente di comprimibilità adiabatica* del mezzo. Esso assume un significato duale a quello che ha il modulo elastico per i solidi ed è definito nel modo seguente:

$$\beta = \frac{\Delta V}{V} \frac{1}{\Delta P} \Big|_{Q=0} \quad (3.4)$$

con V volume considerato e P pressione a cui tale volume è sottoposto (l'indicazione $Q = 0$ si riferisce proprio al fatto che il processo di compressione e rarefazione si assume adiabatico). Come è facilmente visibile dalla 3.4 e coerentemente con la 3.3, β viene misurato in $\text{m}^2 \text{kg}^{-1}$.

In tal modo, per i problemi più semplici, è possibile calcolare facilmente la velocità di propagazione dell'onda ultrasonica in un mezzo, liquido o solido che sia. Se si vuole andare più a fondo nell'analisi, invece, bisognerà considerare che la velocità degli ultrasuoni in un mezzo dipende dalla temperatura a cui questo mezzo si trova e dalla frequenza con cui viaggiano. Mentre quest'ultima influenza poco la velocità di propagazione degli ultrasuoni nei tessuti molli, la temperatura gioca un ruolo fondamentale. Si ha, infatti, che la variazione della velocità rispetto a T , cioè dc/dT , segue un andamento simile a quello dell'acqua ed è, per molti tessuti molli, positiva fino alla temperatura di circa 50°C dove non c'è più un aumento significativo di c . Al contrario, i grassi si comportano in maniera opposta, in quanto dc/dt è fortemente negativo nel range di temperature che va da 0°C a 50°C .

3.1.2 Assorbimento e scattering

L'onda ultrasonica che si propaga in un mezzo può incontrare una variazione di impedenza acustica (dovuta ad esempio al cambiamento del mezzo stesso) che

viene detta *interfaccia*. Quando ciò accade una parte dell'onda viene trasmessa in avanti, mentre un'altra parte viene riflessa all'indietro. Aggiungendo poi che per fenomeni di attenuazione dovuti al fatto che l'onda ha percorso un certo spazio in un mezzo, l'onda riflessa ritornerà al punto di partenza notevolmente indebolita. Quest'ultimo fenomeno può essere suddiviso in due parti: *assorbimento* e *scattering*.

Lo scattering è una dispersione dell'energia (che può essere isotropa o anisotropa) dovuta al fatto che l'onda interagisce con particelle di dimensione paragonabile alla sua lunghezza d'onda. Tale fenomeno è molto importante in quanto i tessuti sono forti scatteratori di ultrasuoni. È possibile verificare immediatamente la cosa considerando che

$$\lambda = \frac{v}{f} \quad (3.5)$$

quindi considerando la velocità degli ultrasuoni in acqua e la frequenza tipica utilizzata nell'imaging medico si ottiene

$$\lambda = \frac{1480}{2,25 \times 10^6} = 0,657 \text{ mm}$$

che è una dimensione simile alle striature del muscolo.

L'assorbimento, invece, è dovuto al fatto che il mezzo non è puramente elastico ma *viscoelastico* il che porta ad un trasferimento di energia (tipicamente termica) dall'onda al mezzo. A seconda se si considera l'ampiezza o l'intensità della radiazione, quest'ultima definita come $I = \text{potenza}/\text{area}$, si hanno due diverse leggi di assorbimento:

$$A = A_0 e^{-\alpha x} \quad I = I_0 e^{-2\alpha x} \quad (3.6)$$

dove α è il *coefficiente di assorbimento* (la sua unità di misura è l'inverso di una lunghezza) e $1/\alpha$ viene detta *profondità di penetrazione* nel mezzo. Solitamente viene tabulato, per i diversi materiali, il valore di $\mu = 2\alpha$.

Il coefficiente di assorbimento α non è costante ma dipende dalla frequenza della radiazione (è cioè una variabile *dispersiva*) e dal materiale considerato secondo la seguente legge:

$$\alpha = a f^b \quad (3.7)$$

I due coefficienti a e b dipendono, appunto, dal tessuto considerato, anche se per b tale dipendenza è meno marcata in quanto $1 < b < 1,18$ (per l'aria e l'acqua si ha $b = 2$). Da questa equazione si vede come aumentare la frequenza dell'onda ultrasonica diminuisca la sua profondità di penetrazione (similmente a quanto succede per le onde elettromagnetiche). Arrivando a frequenze di 500 MHz si ha un avvicinamento tra i valori di assorbimento dei tessuti e quello dell'acqua. Questo perchè a così alte frequenze viene meno il processo di rilassamento dovuto alla presenza delle proteine idratate.

3.2 Proprietà ottiche

Le proprietà ottiche dei tessuti caratterizzano i fenomeni relativi alle interazioni tra materia biologica e *onde elettromagnetiche*. Si ha un'onda quando un campo elettrico ed uno magnetico variano nel tempo e nello spazio (figura 3.2).

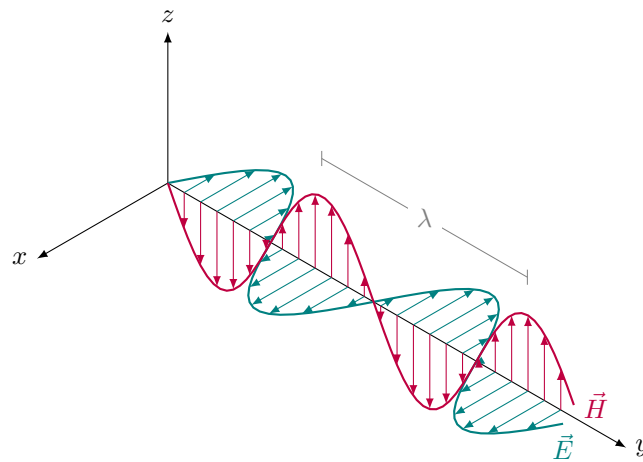


Figura 3.2: Esempio di onda elettromagnetica nello spazio

Come è noto, analogamente a quanto dice l'equazione 3.5 per le onde meccaniche, la *lunghezza d'onda* λ e la *frequenza* f di un'onda elettromagnetica sono legate dalla relazione

$$c = \lambda f \quad (3.8)$$

dove la costante c (dal latino "celeritas") indica la velocità della luce e, più in generale, di una qualsiasi onda elettromagnetica, nel *vuoto* e vale $c = 2,998 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$. La frequenza f è inoltre direttamente legata all'energia E della radiazione elettromagnetica dalla relazione:

$$E = hf \quad (3.9)$$

dove $h = 6,626 \times 10^{-34} \text{ J s}$ è la *costante di Planck*.

Ordinando le onde per frequenza (o per lunghezza d'onda) si ottiene lo *spettro elettromagnetico*, suddiviso in *bande* che raggruppano onde con determinate proprietà, come evidenziato in figura 3.3, dove si vede che le frequenze che caratterizzano la luce visibile rientrano in una piccola porzione dell'intero spettro.

Si definisce tipicamente *banda ottica* la porzione di spettro che copre i tre gruppi di radiazioni dell'*ultravioletto*, del *visibile* e dell'*infrarosso* (tabella 3.1).

3.2.1 Impieghi della radiazione elettromagnetica in campo biomedico

Le radiazioni elettromagnetiche appartenenti a differenti bande frequenziali trovano diverse tipologie di impieghi in campo biomedico. Si citano di seguito alcuni esempi:

Raggi γ data la loro alta frequenza, sono le radiazioni più energetiche tra quelle usate in medicina e si prestano per la *sterilizzazione* di strumenti e per scopi terapeutici, specialmente in oncologia, dove si usano per bombardare selettivamente tessuti tumorali. Hanno anche impieghi diagnostici nel campo della medicina nucleare. Infatti, utilizzando *isotopi radioattivi* è possibile eseguire indagini metaboliche. Ad esempio, a tale scopo si

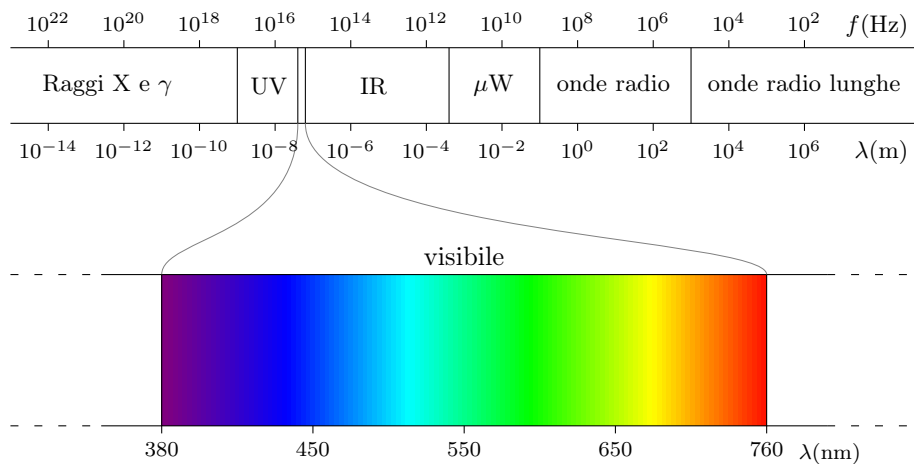


Figura 3.3: Spettro elettromagnetico e range del visibile

impiegano γ -camere e scintillatori in grado di convertire la radiazione γ in radiazione visibile in modo da poter essere analizzata;

Raggi X sono usati in diagnostica per ottenere immagini radiografiche, nonché rappresentazioni di sezioni corporee mediante sistemi TAC (*Tomografia Assiale Computerizzata*);

Radiazione ottica un uso comune di tale radiazione è quello analitico negli *spettrofotometri*. Inoltre ciascuno dei tre gruppi costituenti la radiazione ottica ha impieghi specifici. L'ultravioletto trova applicazioni terapeutiche, ad esempio in *Laser* medici o in trattamenti di precisione. Nel secondo caso, si usano molecole fotolabili all'UV per trasportare sostanze chimiche (ad esempio farmaci) su piste metaboliche. Una volta giunte a destinazione, le molecole sono irradiate con UV per liberarne il contenuto. L'ultravioletto è inoltre usato per la sterilizzazione in quanto possiede energia sufficiente per rompere i legami chimici e danneggiare così i microorganismi.

Il visibile ha costituito una delle fonti principali di informazione per la diagnostica medica fino a pochi decenni fa. Da un'analisi cromatica di parti del corpo umano, come, ad esempio, la pelle (*melanina*), il sangue (*emoglobina*) o l'*urina*, si possono trarre numerose informazioni. L'*infrarosso* è ampiamente usato sia per fini diagnostici, ad esempio nella *termografia ad infrarosso* o nell'*ossimetria ottica*, sia per fini terapeutici, ad esempio per la *fotocoagulazione*.

Radiazione a radiofrequenza tali radiazioni sono utilizzate per fini terapeutici, ad esempio per *ablazione a radiofrequenza*.

3.2.2 Riflessività, assorbività e trasmittività

Si consideri una radiazione elettromagnetica incidente su un corpo e si indichi con U la potenza (energia radiante per unità di tempo) per unità di superficie ($[U] = \text{W m}^{-2}$). Tale grandezza è nota come *irradianza* e spesso viene anche

Tabella 3.1: Bande frequenziali componenti la banda ottica

| Banda | | Intervalli | |
|---------------|----------|----------------------|-----------|
| | | λ (nm) | f (THz) |
| Ultravioletto | UVC | 100–280 | 2997–1067 |
| | UVB | 280–320 | 1067–934 |
| | UVA | 320–390 | 934–769 |
| Visibile | Violetto | 390–455 | 769–659 |
| | Blu | 455–492 | 659–610 |
| | Verde | 492–577 | 610–520 |
| | Giallo | 577–597 | 520–503 |
| | Arancio | 597–622 | 503–482 |
| | Rosso | 622–760 | 482–384 |
| Infrarosso | IRA | 760–1400 | 384–214 |
| | IRB | 1400–3000 | 214–100 |
| | IRC | 3000–10 ⁶ | 100–3 |

indicata (anche se non del tutto propriamente) come *intensità* I della radiazione. In generale, però, la radiazione può essere costituita dalla sovrapposizione di un insieme continuo di lunghezze d'onda. Pertanto, si definisce *potenza monocromatica* U_λ la quantità di potenza per unità di superficie e per unità di lunghezza d'onda ($[U_\lambda] = \text{W m}^{-3}$) come

$$U_\lambda = \frac{dU}{d\lambda} \quad (3.10)$$

La grandezza $dU = U_\lambda d\lambda$ esprime la quantità di potenza per unità di superficie relativa all'intervallo di lunghezze d'onda comprese tra λ e $\lambda + d\lambda$. Quindi la potenza totale U per unità di superficie è data da:

$$U = \int_0^\infty U_\lambda d\lambda \quad (3.11)$$

Una radiazione con potenza monocromatica U_λ che incide su un corpo si scompone in tre componenti: una parte viene *riflessa* (U_λ^r), una parte *assorbita* (U_λ^a) ed una *trasmessa* (U_λ^t) attraverso il corpo. Per conservazione dell'energia si ha:

$$U_\lambda^r + U_\lambda^a + U_\lambda^t = U_\lambda \quad (3.12)$$

Si definisce *riflessività*, *assorbività* e *trasmissività* (considerati in questa sede come sinonimi di *riflettanza*, *assorbanza* e *trasmittanza*) *monocromatica* la frazione della potenza incidente ad una data lunghezza d'onda che viene rispettivamente riflessa, assorbita e trasmessa dal mezzo. Indicando tali grandezze (adimensionali) rispettivamente con r_λ , a_λ e t_λ si ha:

$$r_\lambda = \frac{U_\lambda^r}{U_\lambda} \quad a_\lambda = \frac{U_\lambda^a}{U_\lambda} \quad t_\lambda = \frac{U_\lambda^t}{U_\lambda} \quad (3.13)$$

e quindi vale la seguente relazione:

$$r_\lambda + a_\lambda + t_\lambda = 1 \quad (3.14)$$

Tabella 3.2: Definizioni di differenti tipologie di corpi ideali

| Corpo | t_λ | r_λ | a_λ |
|-------------|-------------|-------------|-------------|
| opaco | 0 | - | - |
| trasparente | 1 | 0 | 0 |
| riflettente | 0 | 1 | 0 |
| nero | 0 | 0 | 1 |

In relazione ai valori di r_λ , a_λ e t_λ differenti tipologie di corpi ideali possono essere facilmente definite nel modo riassunto in tabella 3.2.

Si definiscono *riflessività*, *assorbività* e *trasmissività totale* i rapporti seguenti:

$$r = \frac{\int_0^\infty U_\lambda^r d\lambda}{\int_0^\infty U_\lambda d\lambda} \quad a = \frac{\int_0^\infty U_\lambda^a d\lambda}{\int_0^\infty U_\lambda d\lambda} \quad t = \frac{\int_0^\infty U_\lambda^t d\lambda}{\int_0^\infty U_\lambda d\lambda} \quad (3.15)$$

Tali coefficienti dipendono sia dalle proprietà superficiali del corpo che da quelle della radiazione incidente. La relazione tra la lunghezza d'onda della radiazione e le dimensioni caratteristiche delle discontinuità della superficie del corpo è di fondamentale importanza. Ciò risulta particolarmente evidente nel caso delle possibili tipologie di riflessione, di seguito descritte.

3.2.3 Colore degli oggetti

Il colore di un corpo dipende sia da proprietà ottiche del corpo sia dalla percezione fisiologica del colore da parte dell'osservatore. Tralasciando gli aspetti legati alla percezione del colore, da un punto di vista fisico il colore di un oggetto (che *non* emetta luce propria) dipende sostanzialmente dalle componenti frequenziali della luce incidente sull'oggetto che sono assorbite da esso. In particolare, un corpo esibisce un determinato colore perchè assorbe alcune componenti, mentre ne riflette o ne trasmette altre. Le componenti della luce riflesse o trasmesse sono i cosiddetti *colori complementari* a quelli assorbiti e sono quelle che il nostro cervello interpreta come l'effettivo colore dell'oggetto. Più propriamente, si definiscono *complementari* due colori che, mescolati, forniscono il colore bianco o una sfumatura di grigio.

Ad esempio, un corpo appare rosso se assorbe tutte le componenti frequenziali della luce (ossia tutti i colori) tranne il rosso stesso, il quale, invece, viene riflesso. Un oggetto appare bianco o nero se, rispettivamente, riflette o assorbe *tutte* le lunghezze d'onda della luce incidente.

Si precisa che, naturalmente, alcuni corpi mostrano un determinato colore poichè sono in grado di generare ed emettere luce propria. Può essere questo il caso ad esempio di corpi ad elevata temperatura (*incandescenza*), o di certe reazioni chimiche (*chemioluminescenza*), o di corpi che emettono luce in seguito all'assorbimento di componenti con lunghezza d'onda inferiore a quella emessa (*fluorescenza*), o di corpi che emettono luce non immediatamente dopo l'assorbimento, ma con un certo ritardo, ossia con una certa lentezza di emissione (*fosforescenza*).

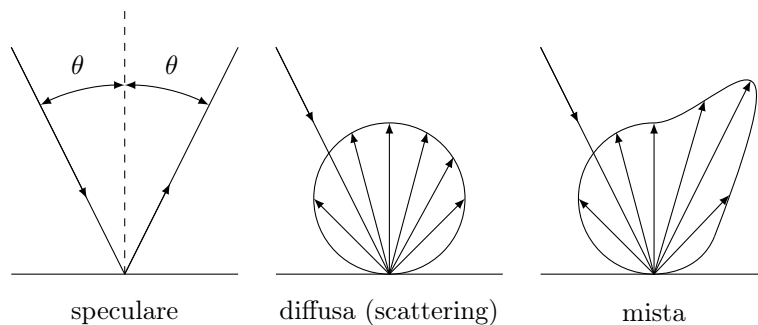


Figura 3.4: Tre tipi di riflessione

3.2.4 Riflessione

Esistono differenti tipologie di riflessione (raffigurate in figura 3.4): *riflessione speculare*, *riflessione diffusa* (o *scattering*) e *riflessione mista*.

La riflessione speculare si ha se la lunghezza d'onda della radiazione è molto più piccola delle discontinuità della superficie, mentre nel caso opposto si ha una riflessione diffusa. Nel primo caso valgono le leggi dell'ottica geometrica, secondo le quali il raggio riflesso forma con la normale alla superficie un angolo uguale a quello del raggio incidente. Nel secondo caso il raggio viene scomposto e rimesso in più direzioni, indipendentemente dalla sua direzione originale, secondo quello che è definito come il *profilo di scattering* della superficie. Il terzo caso è il più generale, ovvero quello in cui il raggio subisce una combinazione dei due effetti precedenti: la radiazione viene diffusa, ma mantiene una componente principale lungo la direzione speculare.

Scattering

Si definisce *scattering* (o *dispersione diffusiva*) di una radiazione elettromagnetica un processo che non include alcun tipo di assorbimento o emissione, secondo il quale si ha una dispersione della radiazione da parte di oggetti macroscopici o microscopici (come ad esempio pulviscolo o atomi che formano un gas). Si sottolinea che, più in generale, il termine scattering contraddistingue in fisica un'ampia classe di fenomeni in cui una o più particelle vengono deflesse (ovvero cambiano traiettoria) per via della collisione con altre particelle. A livello microscopico, il processo di scattering di un'onda elettromagnetica ha origine dall'interazione tra l'onda incidente su di un atomo e la nube elettronica di esso. In particolare, gli elettroni vengono posti in oscillazioni in fase con l'onda applicata; il risultato è un oscillatore elettronico in grado di emettere radiazioni in tutte le direzioni.

I corpi che trasmettono la luce possono apparire *traslucidi* o *trasparenti*, a seconda che a luce trasmessa subisca o meno scattering. Un esempio molto comune di scattering della luce è alla base della nostra percezione del colore blu del cielo: la luce (bianca) del sole incide sull'atmosfera terrestre, la quale diffonde con più facilità le frequenze più elevate (ovvero più vicine all'ultravioletto); di conseguenza, mentre si percepisce una luce bianca guardando direttamente nella

Tabella 3.3: Definizioni di differenti tipologie di scattering

| Tipo di scattering | Condizione |
|---------------------|-------------------------|
| in avanti (forward) | $0 < \bar{\mu} \leq 1$ |
| isotropo | $\bar{\mu} = 0$ |
| indietro (back) | $-1 \leq \bar{\mu} < 0$ |

direzione del sole, la luce blu diffusa sembra provenire da tutte le direzioni. Un altro esempio tipico è il colore bianco del latte o delle nuvole: in questo caso tutte le frequenze vengono diffuse uniformemente e, poichè il processo si ripete più volte all'interno del mezzo, la direzione di provenienza della luce non è più riconoscibile; il mezzo assume di conseguenza un colore bianco opaco.

Si definisce *coseno medio di scattering* $\bar{\mu}$ la seguente grandezza (adimensionale):

$$\bar{\mu} = \int_{-1}^{+1} S(\theta) \cos \theta d \cos \theta \quad (3.16)$$

in cui $S(\theta)$ è definita *funzione di fase di scattering* ed esprime la distribuzione angolare dello scattering stesso. L'angolo θ indica la direzione di propagazione dell'onda rispetto alla normale alla superficie ($-90^\circ < \theta < 90^\circ$). Si distinguono i casi elencati in tabella 3.3.

A seconda della relazione tra lunghezza d'onda e dimensioni caratteristiche dell'elemento scatteratore della superficie del mezzo si hanno diversi tipi di scattering. I più importanti sono lo *scattering di Rayleigh* e lo *scattering di Mie*. Il primo si ha quando lo scatteratore è molto più piccolo della lunghezza d'onda ed è uno scattering approssimativamente isotropo che varia con la quarta potenza della lunghezza d'onda.

Ad esempio, la luce solare che attraversa l'atmosfera subisce tale tipo di scattering, facendo apparire azzurro il cielo. Si ha invece scattering di Mie quando lo scatteratore ha dimensioni molto maggiori della lunghezza d'onda. Lo scattering relativo a strutture aventi dimensione caratteristica comparabile con la lunghezza d'onda della radiazione incidente presenta proprietà intermedie a quelle dello scattering di Rayleigh e di Mie.

3.2.5 Assorbimento

Un corpo può assorbire l'energia di un'onda elettromagnetica incidente, in quanto essa può indurre variazioni energetiche a livello molecolare o atomico. Ad esempio, l'assorbimento di componenti infrarosse determina un aumento dell'energia cinetica (traslazionale, rotazionale e vibrazionale) delle molecole, con conseguente aumento dell'energia termica del mezzo. L'energia assorbita può essere utilizzata dalle molecole del mezzo per operare transizioni tra livelli energetici differenti. Pertanto, l'assorbimento si verifica in presenza di determinate interazioni tra la radiazione incidente e le molecole. Ne consegue che l'assorbimento risulta fortemente dipendente dalla frequenza dell'onda. In particolare, si ha che ogni sostanza presenta specifici *spettri di assorbimento*.

L'assorbimento totale di un campione dipende dal numero di molecole in cui sono indotte transizioni energetiche. Pertanto, gli spettri di assorbimento possono essere impiegati quantitativamente per indagini analitiche sulla composizione

di campioni incogniti, mediante l'uso di *spettrofotometri*. È utile sottolineare che una qualsiasi sostanza colorata presenta nel proprio spettro di assorbimento dei picchi (regioni di massimo assorbimento) nel visibile ed in particolare in corrispondenza della frequenza del colore complementare.

3.2.6 Attenuazione

Una radiazione elettromagnetica può propagarsi in un mezzo lungo una determinata direzione fintanto che il mezzo sia omogeneo, mentre può cambiare direzione quando incontra un mezzo differente oppure quando le proprietà ottiche del mezzo variano nello spazio e nel tempo. Inoltre, durante la sua propagazione all'interno di un mezzo diverso dal vuoto, un'onda elettromagnetica può essere *attenuata*. In particolare, l'intensità I (densità superficiale di potenza radiante, ossia $[I] = \text{W m}^{-2}$) di un'onda ad una distanza x dalla sorgente di intensità I_0 risulta attenuata esponenzialmente secondo la *legge di Lambert-Beer*:

$$I = I_0 e^{-\alpha x} \quad (3.17)$$

in cui il parametro α è detto *coefficiente di attenuazione effettivo* dell'onda nel mezzo. Si definisce *profondità di penetrazione* δ dell'onda nel mezzo la distanza alla quale il flusso radiante I_0 incidente sul mezzo si riduce di un fattore $1/e$, ossia:

$$\delta = \frac{1}{\alpha} \quad (3.18)$$

La propagazione in avanti dell'onda nel mezzo dipende sia dall'assorbimento che dallo scattering. Si definiscono *coefficiente di assorbimento* k_a e *coefficiente di scattering* k_s di una radiazione in un mezzo ad una data lunghezza d'onda la frazione della potenza di essa che viene rispettivamente assorbita e scatterata per unità di lunghezza del mezzo (tali coefficienti vengono infatti misurati in m^{-1}).

Il coefficiente di attenuazione effettivo α dipende dai coefficienti di assorbimento e di scattering secondo la seguente relazione:

$$\alpha = \sqrt{\frac{k_a}{D}} \quad (3.19)$$

dove D è definita *costante di diffusione* dell'onda nel mezzo e vale:

$$D = \frac{1}{3(1 - \bar{\mu})k_s + k_a} \quad (3.20)$$

519 Poiché i coefficienti k_a e k_s dipendono dalla lunghezza d'onda, ossia dalla
520 frequenza, si ha che da essa dipende anche il coefficiente α . Quindi, anche la
521 profondità di penetrazione δ è funzione della frequenza.

522 Si definisce infine *coefficiente di attenuazione totale* k la somma dei coefficienti
523 di assorbimento e di scattering:

$$k = k_a + k_s \quad (3.21)$$

3.2.7 Emissione

Ogni corpo ad una temperatura superiore a 0 K irradia energia elettromagnetica in relazione alle sue proprietà fisiche di emissione e al valore della temperatura a cui esso si trova. Infatti, mentre l'assorbimento di radiazione comporta un aumento dell'energia termica, viceversa, l'agitazione termica degli atomi e delle molecole è responsabile della irradiazione di energia elettromagnetica. In altre parole, la vibrazione delle particelle che compongono un oggetto a livello microscopico determina l'irradiazione di onde elettromagnetiche. In particolare, in modo duale rispetto all'assorbimento, l'emissione di una radiazione può avvenire quando una molecola subisce una transizione da uno stato energetico eccitato ad uno ad energia inferiore.

Allora, siccome la vibrazione delle particelle dipende dalla loro temperatura, è utile sapere che esiste la *legge dello spostamento di Wien* che lega la lunghezza d'onda di emissione massima con la temperatura di un corpo secondo l'equazione seguente:

$$\lambda_{\max}T = 2898 \mu\text{m K} \quad (3.22)$$

Questa legge è esatta per un corpo nero e da essa si ricava che, per temperature superiori a 500 °C la radiazione emessa ha una forte componente nella banda del visibile, mentre a temperature inferiori prevale la radiazione infrarossa per cui l'energia emessa può essere percepita sotto forma di calore.

Oltre all'effetto della temperatura, però, bisogna considerare che le proprietà emissive di ogni sostanza sono caratterizzate in frequenza da uno specifico spettro, detto *spettro di emissione* che varia al variare della sostanza stessa. Nella maggior parte dei corpi che ci circondano, le lunghezze d'onda della radiazione emessa sono principalmente infrarosse (come precedentemente accennato), ma è presente anche una piccola quantità di componenti emesse nel visibile. Tuttavia tale luce non è tipicamente osservabile tranne che in pochi casi (si consideri ad esempio il caso di un corpo incandescente); il motivo risiede nel fatto che la luce emessa possiede un'intensità non sufficientemente elevata. Inoltre, è necessario sottolineare che, in condizioni di equilibrio, un corpo a temperatura costante emette nell'unità di tempo e per unità di superficie tanta radiazione quanta ne assorbe.

In realtà, il processo di emissione indotto dall'agitazione termica appena descritto non è l'unico possibile. Esistono infatti anche altri due processi di emissione da parte della materia (passando da uno stato eccitato ad uno con energia inferiore): l'*emissione spontanea* e l'*emissione stimolata*. Nel primo caso, le molecole agiscono come oscillatori spontanei che emanano radiazioni. Il fenomeno della *autofluorescenza*, caratteristico di alcuni tessuti, ne è un esempio. L'emissione stimolata (qui menzionata per completezza) è invece utilizzata in alcuni sistemi artificiali, quali ad esempio il LASER (*Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation*), in cui una distribuzione energetica di non equilibrio è intenzionalmente indotta mediante specifici meccanismi di pompaggio ottico.

3.2.8 Proprietà ottiche del sangue

Il sangue è un tessuto fortemente diffusivo a causa dello scattering provocato dalle componenti cellulari (e che, pertanto, dipende dall'ematocrito). Analogamente

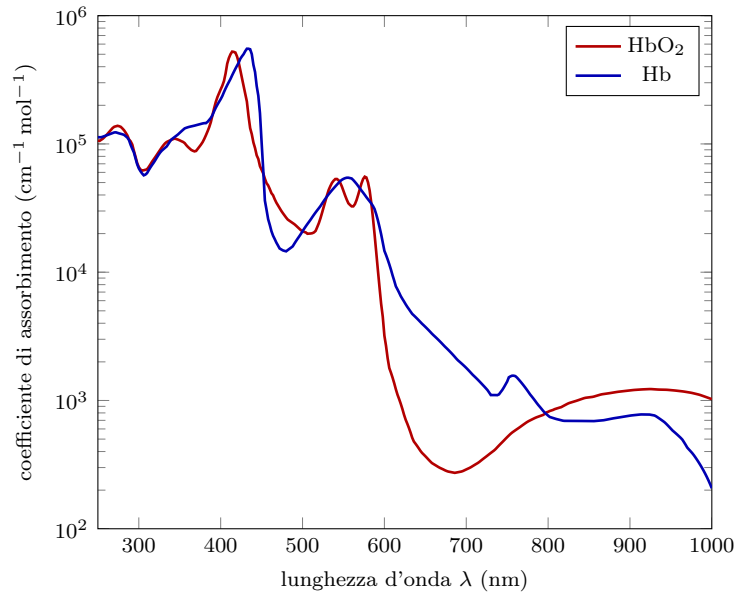


Figura 3.5: Spettri di assorbimento per emoglobina ed emoglobina ossigenata

Tabella 3.4: Profondità di penetrazione δ per $\lambda = 500$ nm al variare dell'ematocrito H e della saturazione di ossigeno

| Sat _{O₂} (%) | H (%) | δ (mm) |
|----------------------------------|-------|---------------|
| 100 | 45 | 0,060 |
| 100 | 4,5 | 0,505 |
| 40 | 45 | 0,067 |
| 40 | 4,5 | 0,560 |

anche il suo coefficiente di assorbimento dipende dall'ematocrito, essendo in particolare ad esso legato con legge quadratica.

Alcuni valori della profondità di penetrazione nel sangue per $\lambda = 500$ nm in relazione all'ematocrito e alla saturazione di ossigeno sono elencati in tabella 3.4. La figura 3.5, invece, presenta gli spettri di assorbimento per l'emoglobina e l'emoglobina ossigenata sulla base di dati tratti da OMLC.

Da questa figura si osserva che gli spettri di tali sostanze si incrociano in più punti, detti *isosbestici*. In generale si definisce isosbestico un punto corrispondente ad una lunghezza d'onda specifica alla quale due (o più) specie presentano spettri di assorbimento che si incrociano. Una coppia di sostanze può naturalmente avere più di due punti isosbestici nei propri spettri. L'ossiemoglobina e la deossiemoglobina hanno punti isosbestici caratteristici a 590 nm e 805 nm.

Ossimetria e fotopletismografia transcutanee

L'assorbanza di un globulo rosso coincide con quella di una soluzione di emoglobina. Questa "trasparenza" degli eritrociti permette misurazioni dell'ossimetria del sangue, ossia dei gradi di *ossigenazione* di esso espressa dalla percentuale



Figura 3.6: Esempio di pulsiossimetro a trasmissione

di emoglobina che risulta saturata dall'ossigeno (tipicamente inclusa tra il 95 % e il 100 % a livello del mare). A tale scopo, è possibile sfruttare la conoscenza della variazione dello spettro di assorbimento dell'emoglobina in relazione al suo grado di saturazione da parte dell'ossigeno. In particolare, l'*ossimetria* (o *pulsiossimetria*) *transcutanea* consiste in un metodo non invasivo di misura della percentuale di emoglobina saturata dall'ossigeno, utilizzando un sistema ottico chiamato *ossimetro* (o *pulsiossimetro*), solitamente applicato al dito o all'orecchio (per misure in trasmissione) oppure, in alcuni casi, sulla fronte (per misure in riflessione).

A titolo esemplificativo, consideriamo un sistema a trasmissione, del tipo di quello mostrato nell'esempio di figura 3.6. Un sistema di questo tipo sfrutta una coppia di sensori ottici per effettuare *misure differenziali di assorbanza* (la misura differenziale permette di limitare il rumore sulla misura stessa): un primo sensore determina l'assorbanza ad un punto isosbastico ed un secondo ad una lunghezza d'onda vicina, per la quale sia massima la distanza tra lo spettro di Hb e quello di HbO₂. Il punto isosbastico dello spettro dell'emoglobina che si presta meglio per questo tipo di analisi è quello situato ad 805 nm in figura 3.5. Pertanto, un pulsiossimetro consiste di due LED, che emettono luce rossa (tipicamente con $\lambda = 650 \text{ nm} - 660 \text{ nm}$) ed una infrarossa (con $\lambda = 805 \text{ nm}$), usati in combinazione ad un fotodiodo ricevente. I due LED sono posti da un lato del dito (o dell'orecchio), mentre il fotodiodo è posizionato dalla parte opposta ed il sistema siffatto misura l'assorbanza alle due lunghezze d'onda da parte dell'emoglobina. Il valore dell'assorbanza della luce rossa varia con la percentuale di saturazione dell'emoglobina e pertanto può essere utilizzata per stimare quest'ultima.

Si precisa che le lunghezze d'onda considerate rientrano in una delle cosiddette *finestre ottiche della pelle*, ossia in una banda frequenziale in cui il tessuto presenta scarso assorbimento (come descritto nelle sezioni successive); ciò garantisce un'elevata profondità di penetrazione della radiazione utilizzata, per raggiungere efficacemente i globuli rossi e, in particolare, l'emoglobina.

È inoltre opportuno sottolineare che il segnale monitorato varia ritmicamente nel tempo in relazione al battito cardiaco. Infatti, i vasi sanguigni arteriosi si espandono e contraggono ciclicamente, determinando una variazione sul segnale

letto dal sensore. Per tale motivo, lo stesso sistema utilizzato per ossimetria transcutanea può essere impiegato anche per *fotopletismografia transcutanea*. Tale metodica consiste in una pletismografia (ossia una misura delle variazioni volumetriche di una porzione corporea) mediante tecnica ottica. In particolare, un sistema che illumina la pelle e misura le variazioni dell'assorbimento (o della riflessione) della luce da parte di essa permette il monitoraggio della perfusione sanguigna nel derma e nelle regioni subcutanee della pelle. In corrispondenza di ogni ciclo cardiaco, il cuore pompa sangue verso la periferia del corpo e distende le arterie e le arteriole nel tessuto subcutaneo. La variazione di volume causata dai picchi di pressione può essere rivelata mediante la suddetta tecnica ottica. Inoltre, esaminando soltanto la componente variabile del segnale di assorbimento (sottraendo dai picchi di assorbimento i valori di minimo di assorbimento) è possibile isolare soltanto l'assorbimento causato dal flusso arterioso, eliminando quindi gli effetti dovuti all'assorbimento da parte del flusso venoso e dei tessuti circostanti (pelle, osso, muscolo, grasso).

Conseguentemente, gli ossimetri transcutanei convenzionali per uso clinico tipicamente misurano contemporaneamente sia l'ossigenazione del sangue, sia la frequenza cardiaca.

3.2.9 Proprietà ottiche della pelle

Proprietà in riflessione

La figura 3.7 presenta l'andamento della funzione di fase di scattering $S(\theta)$ della pelle per differenti lunghezze d'onda. Tali andamenti sono validi per strati solidi abbastanza sottili di campione, mentre al crescere dello spessore lo scattering assume un comportamento sostanzialmente indipendente dalla lunghezza d'onda.

Determinazioni sperimentali del coseno medio di scattering suggeriscono che tutti gli strati di pelle si comportano come scatteratori *in avanti* nel range di lunghezze d'onda comprese tra 240 nm e 633 nm. In particolare, per stimare il coseno medio di scattering $\bar{\mu}$ sia per l'epidermide che per il derma è stata proposta la seguente equazione empirica:

$$\bar{\mu} \cong 0,62 + 0,29 \times 10^3 \lambda \quad (3.23)$$

nella quale la lunghezza d'onda λ è espressa in nm.

Proprietà in emissione

Assumendo per la pelle una temperatura superficiale di 300 K, dalla legge dello spostamento di Wien (equazione 3.22) si ricava che l'emissione risulta massima per una lunghezza d'onda pari a 9,6 μm . Tale valore rientra nella regione del medio infrarosso; pertanto, molta dell'energia di una persona è emanata sotto forma di energia infrarossa.

Nel range dell'infrarosso la pelle può essere assunta come un corpo nero, essendo l'emissività pari a circa 0,98, indipendentemente dal colore della pelle stessa. Un valore così elevato è largamente attribuibile alla presenza di acqua, che possiede un'altrettanta elevata emissività, a pochi μm di distanza dalla superficie della pelle.

In realtà, la schematizzazione della pelle come corpo nero è approssimativamente valida soltanto per angoli di emissione θ (rispetto alla normale alla

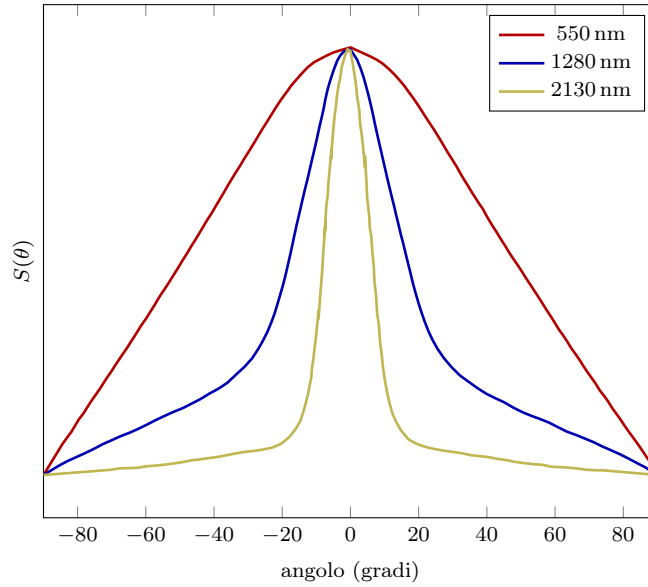


Figura 3.7: Funzioni angolari di scattering della pelle per tre valori della lunghezza d'onda λ

superficie) inferiori a circa 70° . Infatti, oltre tale soglia l'emissività ϵ_λ decresce rapidamente, come schematizzato in figura 3.8.

È interessante stimare la potenza netta P_{net} irradiata dal corpo umano verso l'ambiente circostante. Essa è data dalla differenza tra la potenza P_{emes} emessa dal corpo per effetto della temperatura T_p della propria pelle e la potenza assorbita P_{assorb} dall'ambiente per via del fatto che questo si trovi ad una temperatura T_a :

$$P_{\text{net}} = P_{\text{emes}} - P_{\text{assorb}} \quad (3.24)$$

Ciascuna di tali potenze può essere stimata utilizzando la *legge di Stefan-Boltzmann*, ottenendo quindi la seguente espressione per la potenza netta:

$$P_{\text{net}} = A\sigma\varepsilon(T_p^4 - T_a^4) \quad (3.25)$$

dove A indica la superficie del corpo, pari a circa 2 m^2 per un uomo adulto standard, mentre ε è l'emissività totale della pelle, pari a circa 1 (come visto precedentemente). Assumendo $T_p = 301\text{ K}$ e $T_a = 293\text{ K}$, si ottiene:

$$P_{\text{net}} = 95\text{ W}$$

Risulta, quindi, che il corpo umano emette approssimativamente una potenza analoga a quella di una lampadina da 100 W ; tuttavia, tale potenza è emessa nella banda dell'infrarosso, come sopra evidenziato. Nell'arco di un giorno, l'energia complessivamente emessa si aggira intorno a $9 \times 10^6\text{ J}$.

L'emissione tipica dovuta al normale metabolismo è pari a circa $100\text{ W} - 120\text{ W}$; in caso di emissioni superiori a circa 160 W (a causa di perdite extra causate da evaporazione, convezione e conduzione), l'individuo sente freddo e diventa necessario aumentare l'attività fisica o indossare vestiti adeguati. Durante

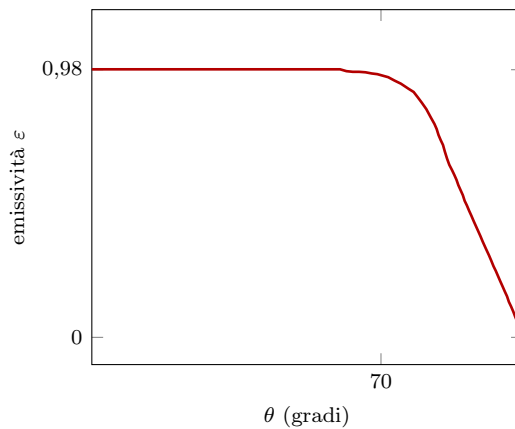


Figura 3.8: Andamento qualitativo dell'emissività della pelle al variare dell'angolo di emissione

l'attività fisica il metabolismo aumenta e il calore in eccesso che non riesce ad essere eliminato per emissione tende ad essere smaltito mediante la sudorazione.

Proprietà in assorbimento e trasmissione

Le proprietà ottiche della pelle in assorbimento e trasmissione sono largamente determinate dalla *melanina*, un pigmento (prodotto dai melanociti) che assorbe nell'ultravioletto e che è anche responsabile del colore della pelle. Tra pelli chiare e pelli scure la *trasmissione* può variare fino a tre ordini di grandezza.

L'epidermide presenta complessivamente un'ampia banda di assorbimento intorno a 275 nm dovuta a cromofori aromatici; per lunghezze d'onda superiori (nel visibile e nell'infrarosso) si hanno linee di assorbimento a 760, 1000, 1200, 1450 e 2000 nm dovute alla presenza d'acqua.

Oltre alla melanina e all'acqua, si distinguono anche altre sostanze che influiscono sullo spettro di assorbimento della pelle, tra cui l'emoglobina, le proteine fibrose, il collagene, il grasso, la bilirubina e il carotene.

I coefficienti di attenuazione nel derma sono tipicamente inferiori a quelli nell'epidermide per un ampio range di frequenze.

La pelle presenta tipicamente due principali *finestre ottiche* (ossia bande frequenziali in cui le perdite sia per assorbimento che per scattering sono minime): la prima si estende tra 600 nm e 1300 nm (dal rosso al vicino infrarosso) e l'altra si estende tra le due bande di assorbimento dell'acqua e va da 1,6 μm a 1,8 μm (infrarosso B). Si sottolinea che tali finestre ottiche, essendo espressione di uno scarso assorbimento, non sono influenzate dal colore della pelle. Ciò risulta particolarmente vantaggioso per l'attuazione di tecniche diagnostiche o terapeutiche che sfruttano l'impiego di radiazione ottica.

3.3 Proprietà termiche

Il trasporto di calore nei materiali può avvenire tramite conduzione, convezione o irradiazione. Per quanto riguarda i tessuti, il trasporto di calore per via

convettiva viene considerata solamente in relazione alla circolazione sanguigna. Per quanto riguarda le proprietà dei tessuti relative al calore irradiato si faccia riferimento alle proprietà ottiche appena descritte.

3.3.1 Conducibilità termica

La conducibilità termica, indicata con k e misurata in $\text{W m}^{-1} \text{K}^{-1}$, di una sostanza è definita come la quantità di calore Q trasmessa a causa della presenza di un gradiente di temperatura in direzione normale ad una superficie di area unitaria nell'unità di tempo sotto condizione di stato stazionario. Vale quindi la relazione

$$\frac{Q}{A} = -k \frac{\partial T}{\partial x} \quad (3.26)$$

dove $\frac{\partial T}{\partial x}$ è il gradiente di temperatura in direzione del flusso di calore e A la sezione considerata. Il segno negativo indica che il flusso è in direzione opposta al gradiente.

Quando lo stato stazionario non è rispettato viene utilizzata una quantità differente che è la *diffusività termica* $\alpha = k/\rho C$ dove C è la *capacità termica specifica* e ρ la densità del tessuto. α è legata alla variazione spaziale e temporale della temperatura tramite la relazione

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \nabla^2 T$$

da cui si evince che la sua unità di misura è ms^{-1} . Il valore numerico di α determina la velocità di variazione della temperatura ed è anche una misura dell'abilità di un sistema perturbato termicamente a ritornare alla sua condizione di equilibrio.

Questi due parametri vengono influenzati da molti fattori quali, ad esempio, la temperatura, la perfusione del tessuto e la sua composizione. Vari studi hanno riportato che la dipendenza dalla temperatura di questi parametri è abbastanza limitata per temperature maggiori di 0°C , attestandosi su valori di incremento con T pari a $0,2\%^\circ\text{C}^{-1}$. Quando, invece, si passa ad una temperatura minore di zero, si ha un brusco aumento di k ed α , che possono anche triplicare il loro valore.

Analogamente a T , anche la perfusione di sangue aumenta i valori di k ed α e solitamente essi aumentano in maniera proporzionale alla radice quadrata della velocità di perfusione.

Infine, molti autori hanno riportato che vi è una relazione quasi lineare tra k ed il contenuto di acqua nel tessuto, soprattutto quando questo supera il 50%. Una equazione valida in un range di temperature compreso tra 0°C e 60°C per la stima di k può essere la seguente:

$$k = 0.0798 + 0.00517W$$

dove W è il contenuto percentuale di acqua. La dipendenza dalla temperatura viene omessa in quanto, come già visto, quasi trascurabile. Per temperature tra -40°C e -50°C , invece si può utilizzare

$$k = 0.284 + 0.0194W - 0.00923T$$

Entrambe le equazioni si applicano a tessuti i cui contenuti di acqua sono compresi tra il 60 % ed il 90 %.

Una ulteriore complicazione può essere quella di considerare più accuratamente la composizione del tessuto, aggiungendo nell'analisi la presenza, oltre all'acqua, di proteine e grasso. La conducibilità termica può allora essere espressa come

$$k = \rho \sum_{n=1}^3 \frac{k_n \omega_n}{\rho_n}$$

dove k_n , ω_n e ρ_n sono rispettivamente la conducibilità termica, la densità e la frazione massica dell' n -simo componente, mentre ρ indica, in tal caso, la densità del composito.

3.3.2 L'equazione del biocalore

Quando si tratta un certo volume di tessuto in vivo, però, bisogna considerare che questo è perfuso, ed il passaggio del sangue, oltre a variare il valore di k , modifica anche il processo di trasferimento di calore. Inoltre, processi metabolici generano calore all'interno del tessuto, portando ad un aumento di temperatura. Una equazione che tiene conto di questi fenomeni è l'*equazione del biocalore*:

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla(k \nabla T) - m_b C_b (T - T_b) + Q_m \quad (3.27)$$

dove m_b , C_b e T_b sono rispettivamente il flusso di massa, il calore specifico e la temperatura del sangue che perfonde il tessuto, e Q_m è la quantità di calore metabolico prodotto. Si ha, quindi, che il primo termine a destra dell'uguale è relativo alla produzione di calore per gradiente termico, mentre il secondo è relativo alla perfusione sanguigna del tessuto. In particolare si vede immediatamente che l'effetto relativo alla perfusione di sangue è tanto più grande quanto più è grande la massa che attraversa il tessuto e la differenza di temperatura tra sangue e tessuto stesso. Si ha, quindi, che sia un aumento di velocità di irradiazione del tessuto che una temperatura minore del sangue rispetto al tessuto stesso, hanno come effetto quello di aumentare la quantità di calore sottratto.

3.4 Proprietà meccaniche

Le proprietà meccaniche dei tessuti qui riviste brevemente comprendono la loro densità, viscosità e modulo di Young.

3.4.1 Densità

La *densità di massa* ρ viene definita come la massa di materiale per unità di volume e si misura in kg m^{-3} .

La densità della maggior parte dei tessuti molli è molto vicina a quella dell'acqua, rimanendone quasi sempre superiore, nonostante la presenza di grassi che porterebbe ad una diminuzione del suo valore. Tipicamente il suo valore è compreso tra $1,00 \text{ g cm}^{-3}$ e $1,07 \text{ g cm}^{-3}$. La densità dell'osso compatto, invece, può raggiungere valori di $2,0 \text{ g cm}^{-3}$, anche se la densità media di un intero osso è più bassa per la presenza dell'osso spongioso che accoglie nei suoi spazi vuoti il midollo osseo che ha una densità vicina a quella dei tessuti molli.

È comunemente noto, inoltre, che la densità non è costante ma varia al variare della temperatura del corpo considerato. Per solidi e liquidi, infatti, l'espansione volumetrica può essere descritta tramite il *coefficiente di espansione cubica* α_c ($[\alpha_c] = \text{°C}^{-1}$) definito come

$$\alpha_c = \frac{1}{V_T} \frac{dV_T}{dT} \quad (3.28)$$

dove V_T è il volume di materiale alla temperatura T . Bisogna aggiungere che anche α_c , a sua volta, dipende dalla temperatura. Solitamente, per i tessuti molli, si ha che questo aumenta all'aumentare di T . Inoltre è generalmente vero che l'espansione volumetrica dei grassi eccede quella dei tessuti magri come i muscoli, anche se tale differenza diminuisce all'aumentare della temperatura.

Per tessuti solidi come l'osso, poi, è possibile misurare un *coefficiente di espansione lineare* α_l spiegato dalla relazione

$$l_1 = l_0 [1 + \alpha_l(T_1 - T_0)] \quad (3.29)$$

dove l_1 ed l_0 sono, rispettivamente, le dimensioni lineari alle temperature T_1 e T_0 . Dalle equazioni 3.28 e 3.29 si evince facilmente che quando α_c e α_l assumono valori positivi si ha una espansione termica del materiale all'aumentare della temperatura, mentre se questi sono minori di zero il materiale considerato, se scaldato, si comprime.

3.4.2 Modulo elastico

All'applicazione di uno sforzo esterno σ , che può essere di trazione, compressione, torsionale o di taglio, un materiale solido reagisce deformandosi. Solitamente la deformazione (indicata con ϵ) viene espressa in percentuale rispetto alla lunghezza iniziale del solido stesso.

Per quanto riguarda tessuti duri, come le ossa ed i denti, si ha una relazione tra sforzo e deformazione che, per bassi valori di ϵ , è lineare, mentre per alti valori di ϵ vede diminuire la propria pendenza (figura 3.9). Nella prima regione è possibile applicare la *legge di Hooke* che afferma che

$$\sigma = E\epsilon \quad (3.30)$$

dove E è il cosiddetto *modulo di Young* (o *modulo elastico*) del materiale. Per trattare più a fondo le proprietà meccaniche dell'osso, l'equazione 3.30 non è sufficiente. Questo materiale, infatti, è non omogeneo, anisotropo e viscoelastico in maniera non lineare. Una trattazione completa sarebbe troppo complessa da affrontare e quindi solitamente si fanno delle assunzioni generali semplificative. Nella regione in cui vale la legge di Hooke, si considera l'osso un materiale anisotropo, ma lineare ed elastico e quindi è come se, per via dell'anisotropia, si avessero differenti leggi di Hooke per diverse direzioni di sforzo considerate. Tale condizione la si può riassumere scrivendo

$$\sigma_i = C_{ij}\epsilon_j$$

Tale equazione afferma che sei (in quanto i va da uno a sei) componenti di sforzo sono legate ad altrettante (anche j va da uno a sei) componenti di deformazione attraverso la matrice C_{ij} , chiamata *matrice* (o *tensore*) di rigidità.

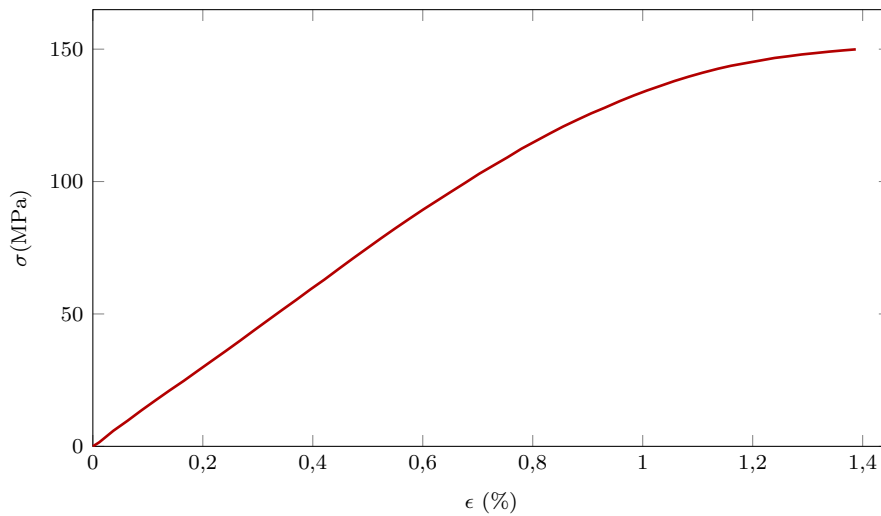


Figura 3.9: Diagramma sforzo-deformazione dell'osso

Analogamente la relazione tra sforzo e deformazione può essere riscritta in termini della *matrice di complianza* S_{ij} ottenendo

$$\epsilon_i = S_{ij}\sigma_j$$

Siccome i coefficienti di S possono essere ricavati più facilmente dai moduli di Young E_{ij} , *coefficienti di Poisson* ν_{ij} e *moduli di taglio* G_{ij} , si preferisce utilizzare tale forma nella trattazione. Prima di andare avanti bisogna precisare che il modulo di Poisson di un materiale è la contrazione laterale in una certa direzione x divisa per l'estensione in una direzione perpendicolare ad x . Esso fornisce, quindi, la misura della variazione volumetrica che un corpo subisce quando è sottoposto ad uno sforzo. Per quasi tutti i materiali si ha che $0 \leq \nu \leq 0,5$ dove il valore massimo dell'intervallo è proprio di corpi perfettamente incomprimibili. Il modulo di taglio G , invece, analogamente ad E , lega tra loro le deformazioni dovute a degli sforzi di taglio che il materiale subisce.

Ritornando ad S , si ha che per materiali con simmetria *ortotropica* (aventi, cioè, tre piani di simmetria) come è l'osso, essa assume la forma seguente:

$$S = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu_{21}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{31}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{pmatrix}$$

Di queste dodici componenti diverse da zero solamente nove sono linearmente

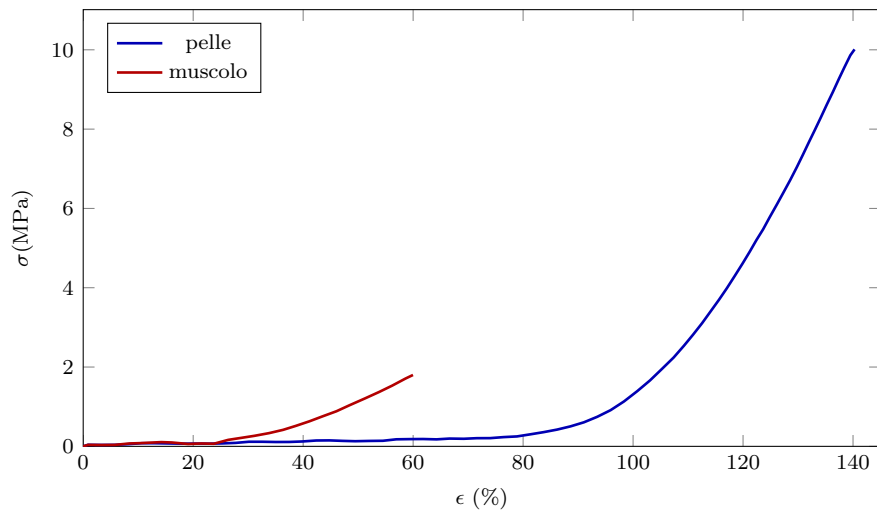


Figura 3.10: Diagramma sforzo-deformazione per pelle e muscolo

indipendenti, in quanto si ha che

$$\frac{\nu_{12}}{E_1} = \frac{\nu_{21}}{E_2}, \quad \frac{\nu_{13}}{E_1} = \frac{\nu_{31}}{E_3}, \quad \frac{\nu_{23}}{E_2} = \frac{\nu_{32}}{E_3}$$

Conoscendo quindi nove parametri è possibile ricostruire con esattezza il comportamento meccanico dei tessuti duri.

Tali parametri, però, non sono delle costanti assolute per ogni materiale, ma dipendono dalla condizione in cui il materiale stesso si trova (temperatura e variazioni locali) e dalla modalità di applicazione dello sforzo (viscoelasticità). Per quanto riguarda la temperatura, si è visto che esiste una relazione inversa e lineare tra essa e le costanti elastiche. In particolare per l'osso si hanno dei coefficienti moltiplicativi pari a circa $-0,20\% \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$. Vari studi, inoltre, hanno riportato che il modulo di Young dell'osso varia a seconda della zona considerata passando (per il modulo a compressione) da valori di 20,7 GPa nella zona distale a valori di 17,3 GPa in quella prossimale.

Infine, anche se si è detto che l'osso può essere studiato tramite delle relazioni lineari, studi dettagliati hanno dimostrato che questo materiale devia dal modello lineare in due modi possibili. Il primo è la dipendenza dalla velocità di applicazione dello sforzo: si ha, infatti, che applicando sforzi sempre più velocemente, l'osso reagisce diventando più duro (aumenta E) e più forte (aumenta lo sforzo a rottura). Il secondo, invece, è il *creep*. Infatti, anche se l'osso recupera sempre tutta la deformazione dovuta ad uno sforzo applicato, non lo fa subito, ma impiega diversi secondi raggiungendo la posizione di equilibrio in maniera asintotica.

Passiamo ora a considerare i tessuti molli. Per questi materiali la relazione tra sforzo e deformazione cambia e può essere suddivisa in tre regioni: a basse deformazioni si ha un modulo elastico basso che permette grosse deformazioni in presenza di bassi sforzi applicati. Ad alte deformazioni, invece, si ha una regione caratterizzata da un'elevata pendenza (alto modulo elastico) ed in cui le deformazioni sono molto più modeste a parità di sforzo. Le proprietà meccaniche

in queste regioni sono approssimativamente lineari ed è quindi possibile trattarle semplicemente utilizzando la legge di Hooke. Nella zona centrale, invece, c'è una costante variazione della relazione tra σ ed ϵ . Si fa notare che per alcuni tessuti, una delle due o entrambe le regioni lineari sono assenti, mentre per altri è la zona intermedia ad essere molto limitata (figura 3.10).

3.4.3 Viscosità

La viscosità *dinamica* η di un fluido newtoniano in movimento in direzione x è il rapporto tra lo sforzo di taglio tra due piani paralleli di fluido ed il gradiente di velocità perpendicolare al flusso. Invertendo la relazione a favore dello sforzo si ottiene la famosa *equazione di Newton*:

$$\tau = -\eta \frac{dv_x}{dy} \quad (3.31)$$

La sua unità di misura è il $\text{Ns}^2 \text{m}^{-1}$ o Pas. Partendo da η è possibile ricavare la viscosità *relativa* semplicemente dividendo la viscosità dinamica per quella dell'acqua calcolata alla stessa temperatura. Si fa notare, infatti, che la viscosità dell'acqua, così come quella di molti altri fluidi, dipende fortemente dalla temperatura, ma anche dalla pressione.

La viscosità *cinematica* di un fluido, infine, è il rapporto tra la viscosità dinamica e la densità del fluido stesso e viene misurata in m s^{-1} .

Fluidi newtoniani mostrano una relazione costante tra lo sforzo di taglio ed il gradiente di velocità (η è costante rispetto al gradiente), ma per il sangue questo non è vero. Per alti sforzi di taglio la viscosità del sangue può considerarsi costante con buona approssimazione, ma per bassi valori di τ essa aumenta velocemente. La viscosità del sangue, inoltre, dipende dall'ematocrito e, come succede con altri fluidi, diminuisce con la temperatura (di circa il 30%, passando da 25 °C a 37 °C).