

In una riserva naturale, si considerino una popolazione di antilopi ed una di gazzelle. Le rispettive numerosità (numero di individui) sono indicate dalle variabili reali  $s_1$  e  $s_2$ . Dette popolazioni si nutrono della stessa specie vegetale, la cui quantità disponibile è indicata da  $f$  (variabile reale che rappresenta il numero di unità di cibo). L'ingresso di controllo  $u$  rappresenta il tasso di irrigazione della riserva di cibo. Ciclicamente queste popolazioni sono soggette ad un'epidemia veicolata da un insetto il cui effetto è rappresentato dalla variabile  $s_d$ , che rappresenta un disturbo rispetto alla normale evoluzione del sistema. Le equazioni del modello sono date da

$$\begin{aligned}\dot{f} &= a \cdot u - b \cdot s_1 - c \cdot s_2 + \mu \cdot \frac{s_1 + s_2}{f} \\ \dot{s}_1 &= k_1 \cdot s_1 \cdot f - j_1 \cdot s_2 - \frac{s_1}{s_1 + s_2} \cdot s_d \\ \dot{s}_2 &= k_2 \cdot s_2 \cdot f - j_2 \cdot s_1 - \frac{s_2}{s_1 + s_2} \cdot s_d\end{aligned}$$

dove  $a$  è il fattore di fertilizzazione,  $b$  e  $c$  sono i tassi di diminuzione del cibo relativamente ad ognuna delle due specie,  $k_1$  e  $k_2$  sono i tassi di riproduzione delle due specie e  $j_1$  e  $j_2$  rappresentano l'effetto della competizione tra le due specie e  $\mu$  è fattore di cooperazione. Tutte le variabili ed i coefficienti coinvolti sono da considerare espressi secondo l'opportuna unità di misura.

- 1 Si determinino tutte le condizioni di equilibrio del sistema in funzione di una numerosità costante della prima specie  $s_1$ , considerando nullo il disturbo  $s_d$  e sotto il vincolo che le variabili coinvolte non possono assumere valori negativi.
- 2 Si determini una rappresentazione del sistema linearizzato in forma di stato attorno alla generica configurazione di equilibrio individuata al punto 1, assumendo di poter misurare la numerosità di individui della riserva  $h = s_1 + s_2$
- 3 Si considerino i seguenti valori numerici per i parametri del modello, con le opportune unità di misura:  $a = 1.75$ ,  $b = 1.2$ ,  $c = 0.85$ ,  $k_1 = 1.05$ ,  $k_2 = 0.65$ ,  $j_1 = 0.1$ ,  $j_2 = 0.2$ ,  $\mu = 0.001$  ed una numerosità della prima popolazione  $s_1 = 10$ .

- Si scrivano le matrici numeriche del sistema linearizzato in forma di stato;
- si ricavano le funzioni di trasferimento tra gli ingressi (di controllo  $u$  e di disturbo  $s_d$ ) e l'uscita  $h$ . Verificare che le funzioni di trasferimento abbiano approssimativamente la forma

$$\begin{aligned}G(s) &= 38.82 \frac{s - 0.29}{(s - 0.28)(s^2 + 0.95s + 22.39)} \\ G_d(s) &= - \frac{s^2 + 0.66s + 0.62}{(s - 0.28)(s^2 + 0.95s + 22.39)}\end{aligned}$$

**in caso negativo**, per i punti successivi, è possibile utilizzare le funzioni di trasferimento qui fornite;

- si discuta circa la stabilità del sistema.
- 4 Si sintetizzi un controllore stabilizzante che, agendo sull'ingresso  $u$ , e considerando condizioni iniziali per il sistema pari a quelle di equilibrio (approssimando all'intero più vicino le numerosità  $s_1$  ed  $s_2$ ), rispetti le seguenti specifiche:
    - Si desidera che sia in grado di portare la numerosità totale esattamente al valore  $h = 128$  senza mai superare il valore di  $h = 138$ . Si desidera inoltre che, trascorse 100 unità temporali ( $ut$ ), la numerosità  $h$  entri, senza più uscirne, nell'intervallo  $[123, 133]$ .
    - Si desidera attenuare un disturbo sinusoidale  $s_d(t) = 10 \sin(\omega_d t)$  con  $\omega_d < 0.008 \frac{rad}{ut}$ , corrispondente al presentarsi periodico dell'epidemia, affinché le oscillazioni indotte sulla numerosità totale  $h$  siano caratterizzate da un'ampiezza minore di 10 individui.
    - In presenza di un rumore di misura modellabile con un segnale sinusoidale caratterizzato da pulsazioni  $\omega_\nu > 10 \frac{rad}{ut}$ , si richiede che l'ampiezza dell'effetto sull'uscita sia inferiore allo 0.01% del rumore stesso.

**Si noti che NON e' necessario esprimere tutte le grandezze temporali in gioco in secondi ma soltanto leggere i valori sui diagrammi rappresentati tramite Matlab considerando che un secondo in Matlab corrisponde ad una *ut*.**

Si riportino quindi, giustificando opportunamente tutti i passaggi:

- le specifiche tradotte nel dominio della frequenza e visualizzate sul diagramma di Bode,
- il procedimento di progettazione del controllore illustrato con diagrammi a blocchi,
- la funzione di trasferimento del controllore progettato,
- i diagrammi di Bode delle funzioni di trasferimento nelle diverse fasi del progetto (mostrando il raggiungimento delle specifiche),
- la risposta al gradino del sistema controllato riportando le caratteristiche più significative.

Al fine di valutare quanto svolto al computer lo studente deve salvare ogni progetto del controllore effettuato con sisotool attraverso il comando "Save Session" che si trova nel sisotool stesso. Il nome del file da salvare deve essere nella forma CognomeMatricola.i.mat con "i" numero del controllore progettato. Il numero del controllore progettato deve essere coerente con quanto scritto nel foglio.

La versione elettronica del controllore verrà considerata solo nel caso di corrispondenza con quanto scritto nel foglio e pertanto NON sostituisce la descrizione cartacea del progetto del controllore richiesta nel compito.

**La valutazione dell'esame è basata su quanto scritto sui fogli consegnati. OGNI passaggio ed ogni scelta di progettazione devono essere opportunamente giustificati su questi.**

- 1 Gli equilibri del sistema si ottengono imponendo  $s_1 = \bar{s}_1$  costante e quindi  $\dot{s}_1 = 0$  oltre a  $\dot{s}_2 = 0$ ,  $\dot{f} = 0$  e  $s_d = 0$ , ottenendo il seguente sistema:

$$\begin{aligned} 0 &= a \cdot u - b \cdot s_1 - c \cdot s_2 + \mu \cdot \frac{s_1 + s_2}{f} \\ 0 &= k_1 \cdot s_1 \cdot f - j_1 \cdot s_2 - \frac{s_1}{s_1 + s_2} \cdot s_d \\ 0 &= k_2 \cdot s_2 \cdot f - j_2 \cdot s_1 - \frac{s_2}{s_1 + s_2} \cdot s_d \end{aligned}$$

Nel caso specifico è richiesto che le variabili non assumano valori negativi, ottenendo così la seguente soluzione:

$$\begin{aligned} \bar{s}_2 &= \bar{s}_1 \cdot \sqrt{\frac{k_1 \cdot j_2}{j_1 \cdot k_2}} \\ \bar{f} &= \sqrt{\frac{j_1 \cdot j_2}{k_1 \cdot k_2}} \\ \bar{u} &= \bar{s}_1 \cdot \frac{b \cdot j_1 - k_1 \cdot \mu}{a \cdot j_1} + \bar{s}_1 \cdot \left( c \cdot \sqrt{\frac{k_1 \cdot j_2}{j_1 \cdot k_2}} - \mu \cdot \sqrt{\frac{k_1 \cdot k_2}{j_1 \cdot j_2}} \right) \end{aligned}$$

- 2 Indicando con  $x$  il vettore di stato del sistema, vale a dire  $x = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T := [f \ s_1 \ s_2]^T$ , e con  $i := [u \ s_d]^T$  il vettore degli ingressi, la dinamica del sistema non lineare espressa in forma di stato risulta:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a \cdot u - b \cdot x_2 - c \cdot x_3 + \mu \cdot \frac{x_2 + x_3}{x_1} \\ \dot{x}_2 &= k_1 \cdot x_2 \cdot x_1 - j_1 \cdot x_3 - \frac{x_2}{x_2 + x_3} \cdot s_d \\ \dot{x}_3 &= k_2 \cdot x_3 \cdot x_1 - j_2 \cdot x_2 - \frac{x_3}{x_2 + x_3} \cdot s_d \\ h &= x_2 + x_3 \end{aligned}$$

Definendo le nuove variabili  $\tilde{x} := x - \bar{x}$ ,  $\tilde{i} := i - \bar{i}$  e  $\tilde{h} := h - \bar{h}$ , una approssimazione al primo ordine (lineare) del sistema dato risulta:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} &= A\tilde{x} + B\tilde{i} \\ \tilde{h} &= C\tilde{x} + D\tilde{i} \end{cases}$$

con  $A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\bar{x}=0, \bar{i}=0}$ ,  $B = \left. \frac{\partial f}{\partial i} \right|_{\bar{x}=0, \bar{i}=0}$ ,  $C = \left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{\bar{x}=0, \bar{i}=0}$ ,  $D = \left. \frac{\partial h}{\partial i} \right|_{\bar{x}=0, \bar{i}=0}$

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{\mu \cdot (\bar{x}_2 + \bar{x}_3)}{\bar{x}_1^2} & \frac{\mu}{\bar{x}_1} - b & \frac{\mu}{\bar{x}_1} - c \\ k_1 \cdot \bar{x}_2 & k_1 \cdot \bar{x}_1 & -j_1 \\ k_2 \cdot \bar{x}_3 & -j_2 & k_2 \cdot \bar{x}_1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -\frac{\bar{x}_2}{\bar{x}_2 + \bar{x}_3} \\ 0 & -\frac{\bar{x}_3}{\bar{x}_2 + \bar{x}_3} \end{bmatrix}$$

$$C = [0 \ 1 \ 1]$$

$$D = [0 \ 0]$$

- 3 Sostituendo i valori numerici per le variabili coinvolte si ottengono le seguenti matrici

$$A = \begin{bmatrix} -0.9546 & -1.1942 & -0.8442 \\ 10.5000 & 0.1797 & -0.1000 \\ 11.6833 & -0.2000 & 0.1113 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1.7500 & 0 \\ 0 & -0.3575 \\ 0 & -0.6425 \end{bmatrix}$$

$$C = [0 \quad 1 \quad 1]$$

$$D = [0 \quad 0]$$

considerando gli equilibri

$$\bar{s}_1 = 10 \quad \bar{s}_2 = 17.9743 \approx 18 \quad \bar{f} = 0.1712 \quad \bar{u} = 15.4942$$

Indicando con  $B_u$  e  $D_u$  la prima colonna delle matrici  $B$  e  $D$ , corrispondenti all'ingresso  $u$ , e con  $B_d$  e  $D_d$  la seconda colonna, corrispondenti all'ingresso  $s_d$ , le funzioni di trasferimento cercate si possono ottenere calcolando:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B_u + D_u = 38.821 \frac{s - 0.2947}{(s - 0.283)(s^2 + 0.9466s + 22.39)}$$

$$G_d(s) = C(sI - A)^{-1}B_d + D_d = -\frac{s^2 + 0.6636s + 0.6217}{(s - 0.283)(s^2 + 0.9466s + 22.39)}$$

La funzione di trasferimento del sistema presenta 1 polo a parte reale positiva. Questo permette di concludere che il sistema è instabile.

- 4 Per quanto riguarda il controllore è opportuno procedere alla progettazione di un sistema in cascata con doppio anello di retroazione - l'anello interno con il solo scopo di stabilizzare il sistema, l'anello esterno con lo scopo di soddisfare le specifiche richieste.

Si procede alla progettazione lavorando sul luogo delle radici; la forma del luogo ottenuto dalla funzione di trasferimento del sistema è riportato in figura 1, con dettaglio riportato in figura 2.

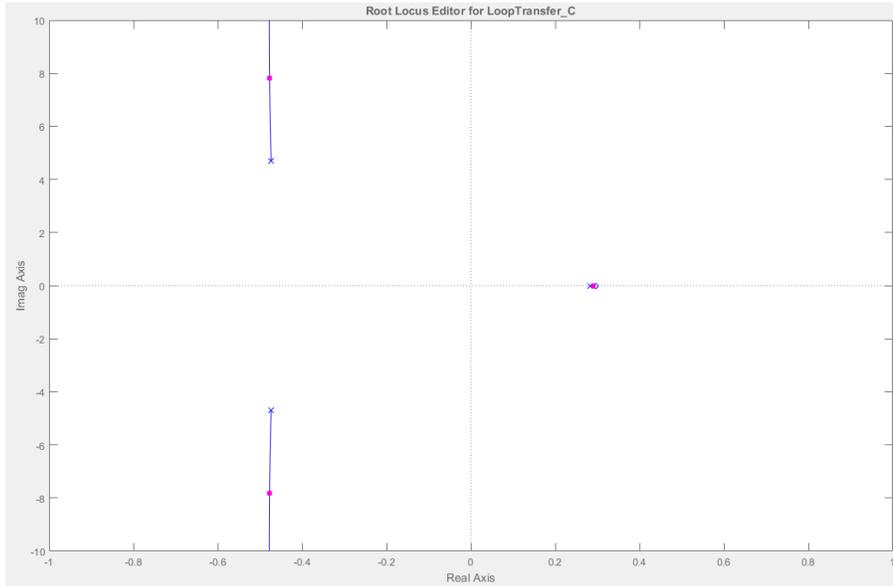


Figura 1: rlocus( $G$ )

Un possibile approccio (quello più immediato) per la progettazione di un controllore stabilizzante è basato sull'utilizzo di un opportuno guadagno negativo (luogo inverso). Un esempio ( $K = -0.56$ ) è quello riportato in figura 3.

Il controllore risultante ha quindi la seguente espressione:

$$C_1(s) = -0.56$$

Adesso, è possibile procedere alla progettazione del controllore  $C_2(s)$  per il soddisfacimento delle specifiche, con una funzione di trasferimento dell'anello interno pari a

$$G_{c1}(s) = \frac{C_1(s)G(s)}{1 + C_1(s)G(s)} = -21.74 \frac{s - 0.2947}{(s + 0.2501)(s^2 + 0.4135s + 0.2804)}$$

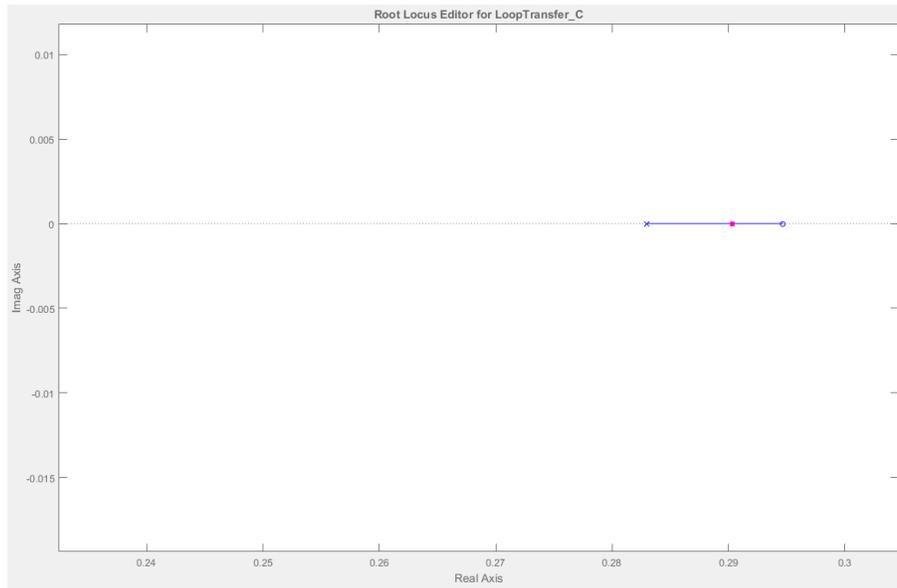


Figura 2: Dettaglio rlocus( $G$ )

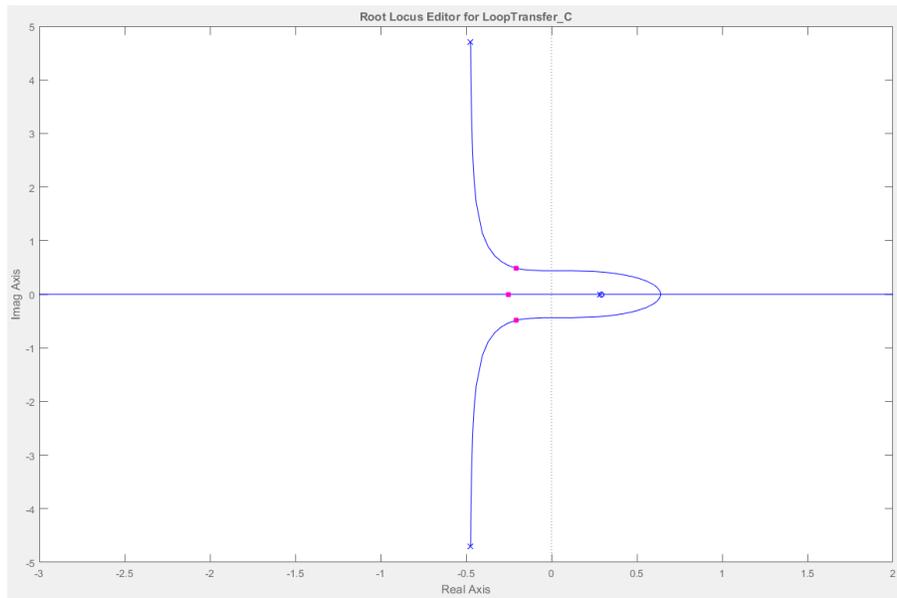


Figura 3: rlocus( $G_{c1}$ ) - con controllore stabilizzante

e con una funzione di trasferimento tra il disturbo e l'uscita pari a

$$G_{dc1}(s) = \frac{G_d(s)}{1 + C_1(s)G(s)} = -\frac{s^2 + 0.6636s + 0.6217}{(s + 0.2501)(s^2 + 0.4135s + 0.2804)}$$

Come riportato nello schema a blocchi di figura 4.

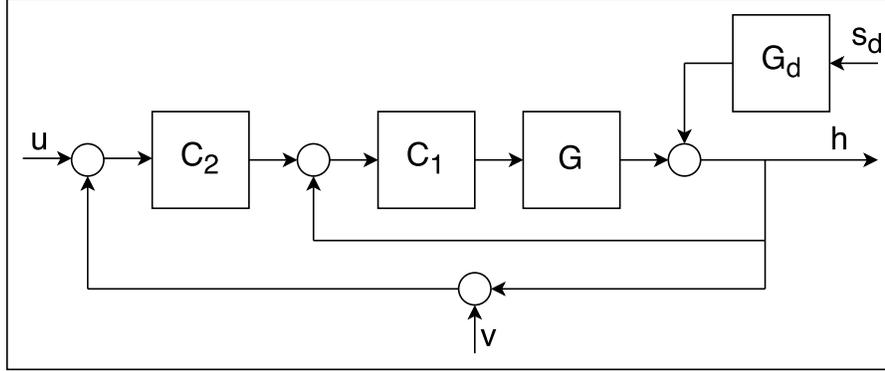


Figura 4: Schema a blocchi del sistema con controllore stabilizzante  $C_1$  e controllore per le specifiche  $C_2$

4.1 Si procede quindi a progettare un controllore che consenta di soddisfare le specifiche, partendo da quelle relative alla risposta al gradino. Si chiede che il sistema, partendo da una condizione di equilibrio pari a  $\bar{h} = 28$ , sia portato ad una uscita pari a  $h_\infty = 128 m$ , vale a dire un'ampiezza del gradino pari a 100:

- \* Si richiede che l'uscita desiderata  $h_\infty = 128$  venga raggiunta esattamente, il che corrisponde a richiedere un tipo  $t$  del sistema in anello (esterno) aperto maggiore o uguale a 1. Le specifiche (statiche) per il sistema in anello (esterno) aperto possono essere sintetizzate dalla richiesta  $\mathbf{t} = \mathbf{1}$ , ossia è necessario inserire un polo nell'origine ( $\frac{1}{s}$ ) nel controllore  $C_2$ .
- \* Si richiede che l'uscita desiderata venga raggiunta senza mai superare il valore  $h_{max} = 138 \Rightarrow$  è ammessa sovraelongazione pari a  $S\% = \frac{|h_{max} - h_\infty|}{|h_\infty - \bar{h}|} \cdot 100 = \frac{10}{100} \cdot 100 = 10\%$ . Secondo tale condizione il sistema in anello chiuso può essere approssimato da un sistema del secondo ordine (approssimazione a due poli dominanti) con smorzamento minimo ammissibile ottenuto invertendo la relazione  $S = e^{-\frac{\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}}$ .

$$\delta > \sqrt{\frac{(\ln(S))^2}{\pi^2 + (\ln(S))^2}} \Rightarrow \delta > 0.5912$$

Questo si traduce in una condizione sul margine di fase minimo, secondo la relazione approssimata:

$$M_f > 0.5912 \cdot 100 \Rightarrow \mathbf{M_f > 59.12^\circ}$$

- \* Si richiede inoltre che l'uscita  $h$  entri entro  $100 ut$ , senza più uscirne, nell'intervallo  $[123, 133]m$ . Si tratta di una specifica sul tempo di assestamento al  $p\% = \frac{133-128}{100}100 = 5\%$  (considerando l'altro estremo dell'intervallo assegnato si ottiene lo stesso valore  $p\% = \frac{128-123}{100}100 = 5\%$ ) che si traduce in una specifica sulla pulsazione di taglio  $\omega_t \geq \frac{3}{100 \cdot 0.5912} \Rightarrow \omega_t \geq \mathbf{0.0507 \text{ rad/s}}$

4.2 Una volta chiuso anche l'anello esterno, l'uscita è legata al disturbo dalla funzione di trasferimento

$$\frac{Y(s)}{s_d(s)} = \frac{G_{dc1}(s)}{1 + C_2(s)G_{c1}(s)}$$

Secondo il teorema della risposta armonica, la specifica è assicurata se per le pulsazioni di interesse  $\omega_d < 0.008 \text{ rad/s}$ , è rispettato il seguente vincolo sul modulo della funzione di trasferimento  $\frac{Y(s)}{s_d(s)}$ .

$$\frac{\|G_{dc1}(j\omega_d)\|}{\|1 + C_2(j\omega_d)G_{c1}(j\omega_d)\|} < \frac{10}{10} \Rightarrow \frac{\|G_{dc1}(j\omega_d)\|}{\|1 + C_2(j\omega_d)G_{c1}(j\omega_d)\|} < 1$$

Essendo a bassa frequenza, vale l'approssimazione  $\|1 + C_2(j\omega_d)G_{c1}(j\omega_d)\| \approx \|C_2(j\omega_d)G_{c1}(j\omega_d)\|$ ;

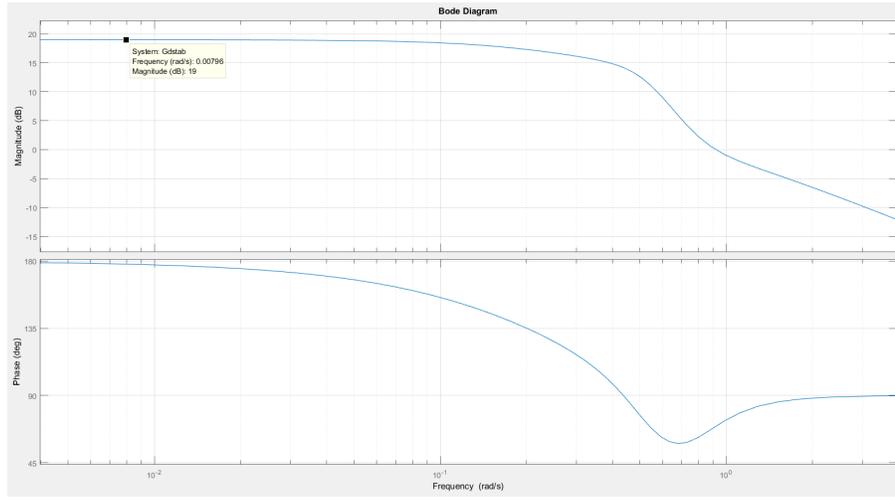


Figura 5: bode( $G_{dc1}$ )

possiamo quindi tradurre la specifica in un vincolo sul modulo della funzione di trasferimento di anello aperto, infatti, passando ad esprimere i moduli in decibel, otteniamo:

$$\|C_2(j\omega_d)G_{c1}(j\omega_d)\|_{dB} > \|G_{dc1}(j\omega_d)\|_{dB} - 20\log_{10}(1)$$

Dal diagramma di Bode del modulo della funzione di trasferimento  $G_{dc1}(s)$  per le pulsazioni di interesse (figura 5) si ricava il valore (19dB) che massimizza il modulo considerato, e quindi, la condizione che permette di soddisfare la specifica risulta:

$$\|C_2(j\omega_d)G_{c1}(j\omega_d)\|_{dB} > 19dB + 0dB \Rightarrow \|C_2(j\omega_d)G_{c1}(j\omega_d)\|_{dB} > 19dB$$

4.3 L'uscita è legata al rumore di misura dalla funzione di sensitività complementare, cambiata di segno:

$$\frac{Y(s)}{\nu(s)} = -\frac{C_2(s)G_{c1}(s)}{1 + C_2(s)G_{c1}(s)}$$

Per un disturbo in alta frequenza  $\omega_\nu > 10$  rad/s, vale l'approssimazione

$$\left\| \frac{Y(j\omega_\nu)}{\nu(j\omega_\nu)} \right\| \approx \|C_2(j\omega_\nu)G_{c1}(j\omega_\nu)\|$$

per cui, detta  $A_N$  l'ampiezza del rumore di misura, la specifica si traduce in

$$\|C(j\omega_\nu)G_1(j\omega_\nu)\| < \frac{0.0001A_N}{A_N} = 0.0001$$

**o, in decibel, -80 dB.**

Si noti che la conoscenza dell'ampiezza  $A_N$  sarebbe superflua.

Una volta tradotte tutte le specifiche, riportate sul diagramma di Bode in figura 6, è possibile procedere al progetto del controllore.

Andando a realizzare un controllore del tipo  $C_2 = \frac{0.001}{s}$  otteniamo il diagramma di Bode di figura 7, in cui possiamo notare come con il controllore proposto sia possibile evitare tutte le "no-fly zone" inserite e, avendo inserito un polo nell'origine, consenta di rispettare le specifiche sull'errore a regime nullo per un ingresso a gradino. Si potrebbe quindi concludere che il sistema così controllato rispetti le specifiche richieste. Andando ad analizzare la risposta a gradino, riportata in figura 8, possiamo vedere come non risulti rispettata la specifica sull'overshoot massimo ( $S\%_{max} = 26.6$ ). Nel diagramma di bode di figura 7, infatti, il margine di fase è pari a  $M_f = 44.6^\circ$ , mentre da specifica era richiesto un  $M_f > 59.12^\circ$ .

Per aumentare  $M_f$  possiamo andare ad inserire uno zero ( $s = -0.26$ ) dopo la frequenza di taglio del sistema, ottenendo così il diagramma di Bode di figura 9 e la risposta a gradino di figura 10. Possiamo notare che ora la specifica sul  $M_f$  risulta rispettata ( $M_f = 62.3^\circ$  e  $S\%_{max} = 0.892$ ), però non è più rispettata la specifica sulla reiezione del disturbo di misura.

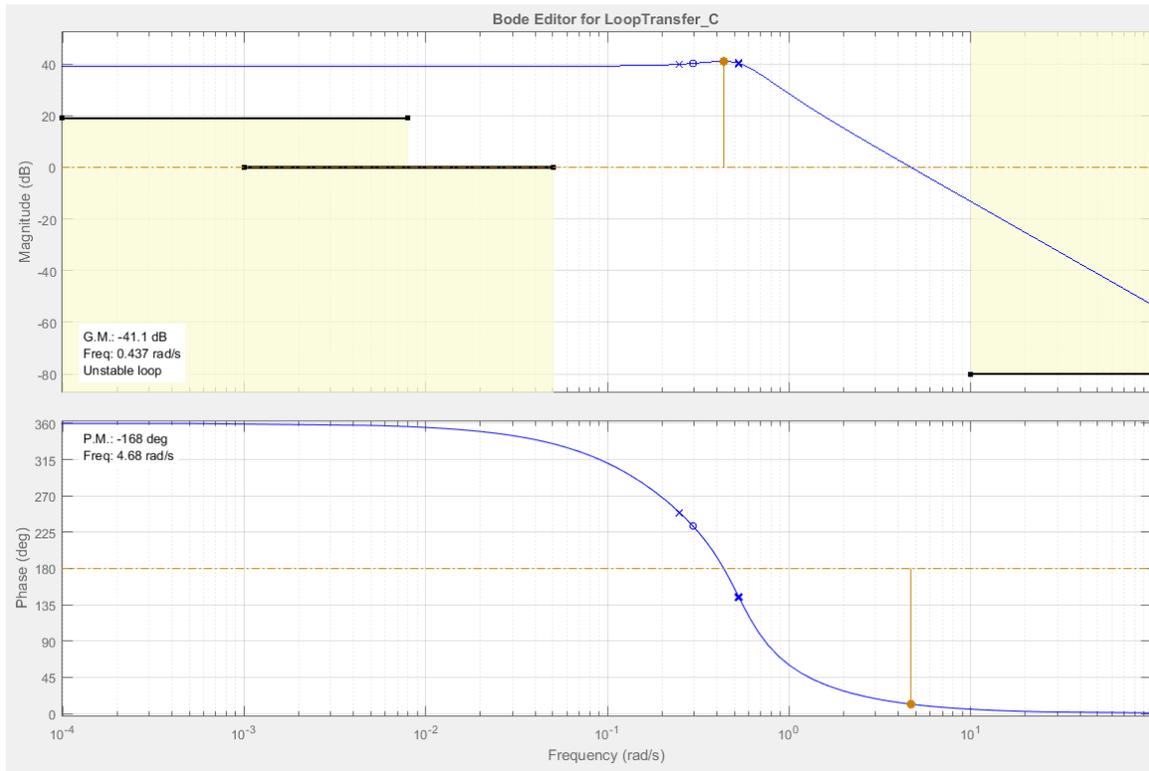


Figura 6: Diagramma di Bode di  $G_{c1}(s)$  con specifiche richieste

Per rispettare la specifica sul disturbo di misura andiamo ad inserire due poli reali coincidenti ( $s = -3.6$ ) abbastanza lontano dalla frequenza di taglio. Otteniamo in questo modo il diagramma di Bode di figura 11 (dettaglio in figura 12 e la risposta a gradino di figura 13).

In conclusione, un controllore causale che consente di rispettare tutte le specifiche richieste è il seguente

$$C_2 = 0.049846 \frac{s + 0.26}{s(s + 3.6)^2}$$

Adoperando questo controllore si ottiene un  $M_f = 59.2^\circ$ , un overshoot massimo del 5.78% e un tempo di assestamento di 17.4 *ut*, come riportato in figura 13.

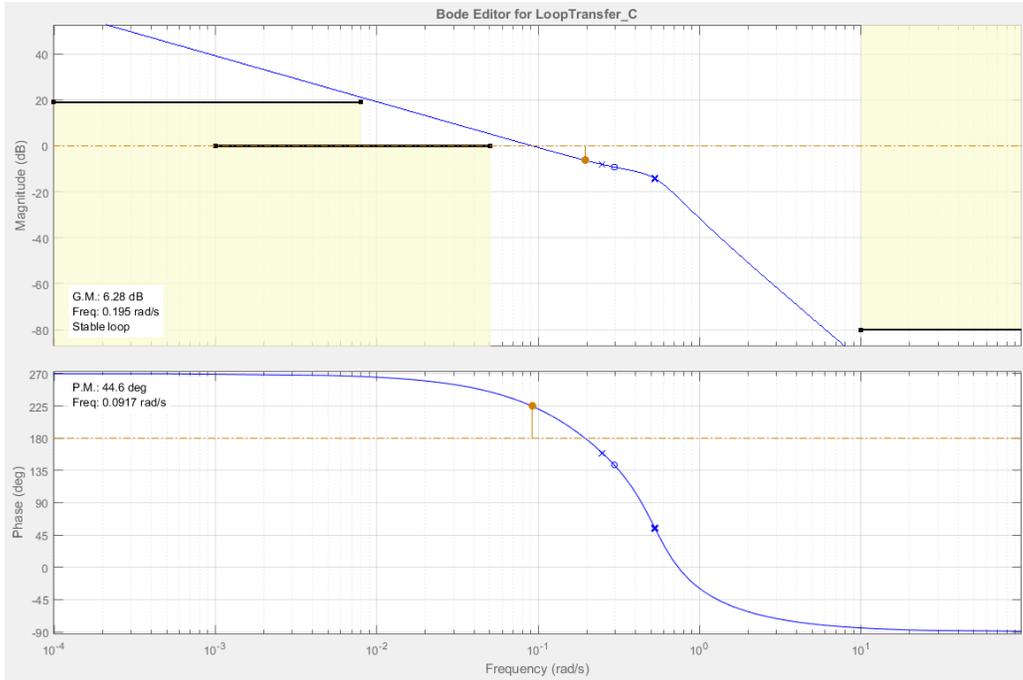


Figura 7: Diagramma di Bode del sistema controllato con  $C_2 = \frac{0.001}{s}$

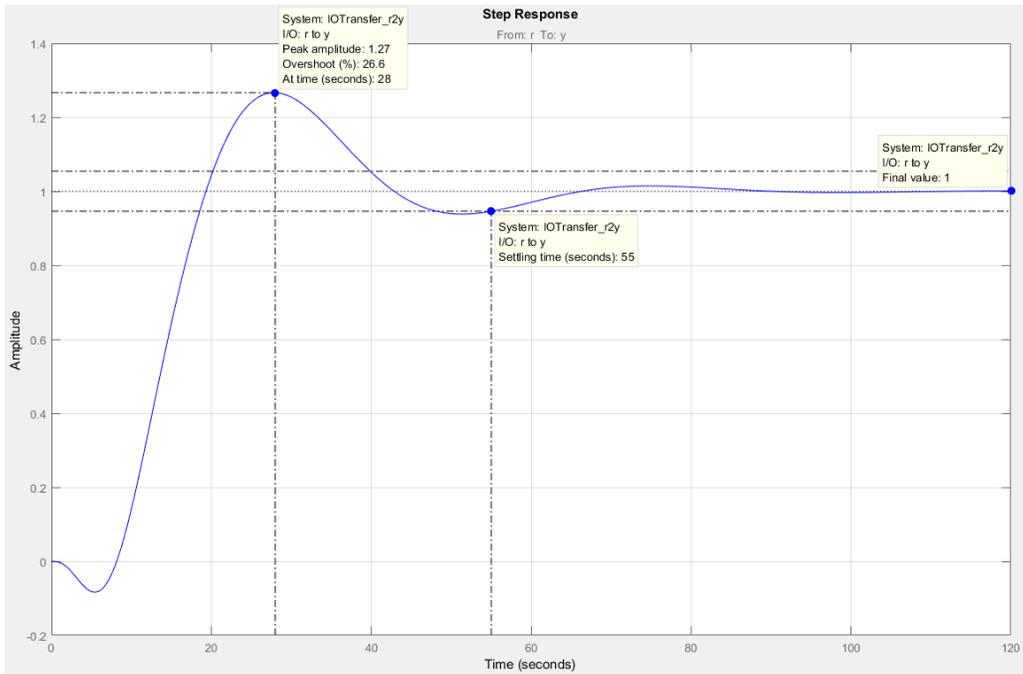


Figura 8: Risposta al gradino del sistema controllato con  $C_2 = \frac{0.001}{s}$

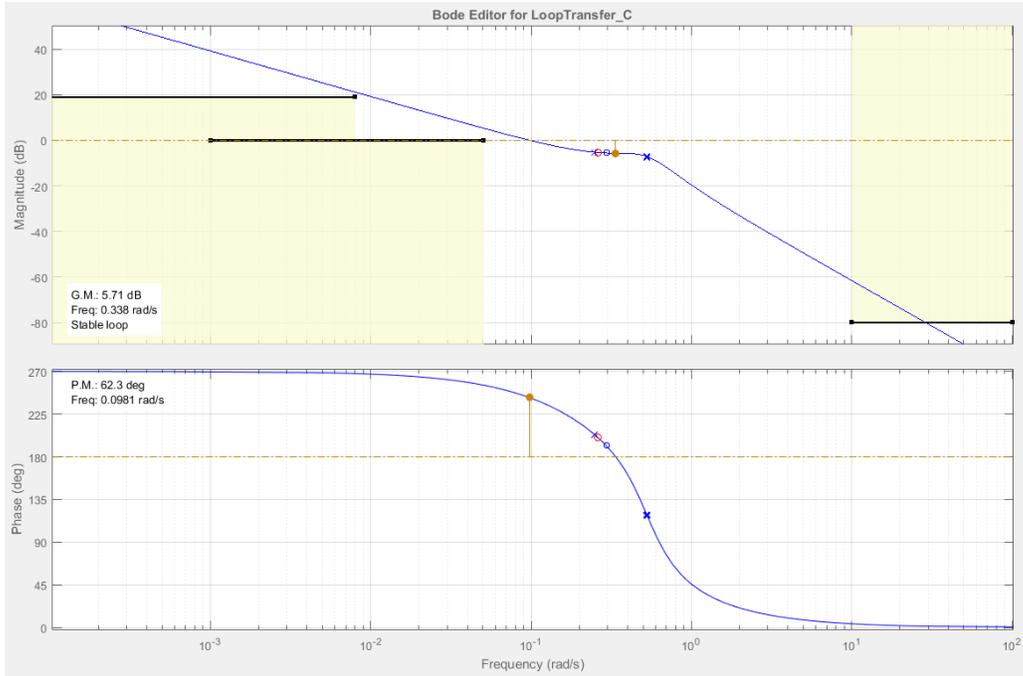


Figura 9: Diagramma di Bode del sistema controllato con  $C_2 = 0.0038462 \frac{s+0.26}{s}$

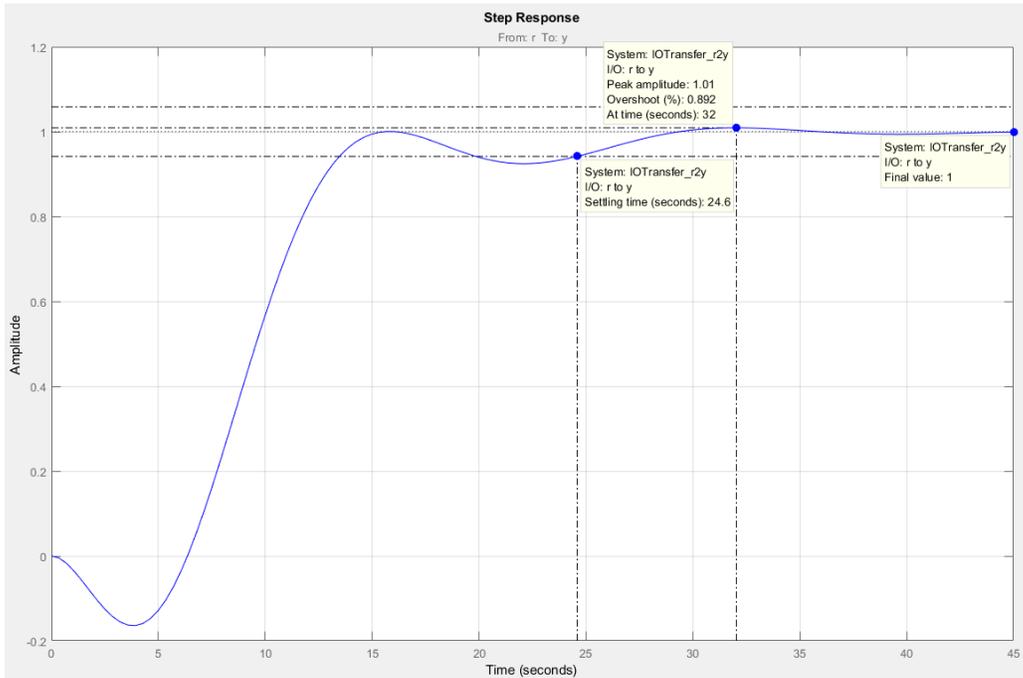


Figura 10: Risposta al gradino del sistema controllato con  $C_2 = 0.0038462 \frac{s+0.26}{s}$

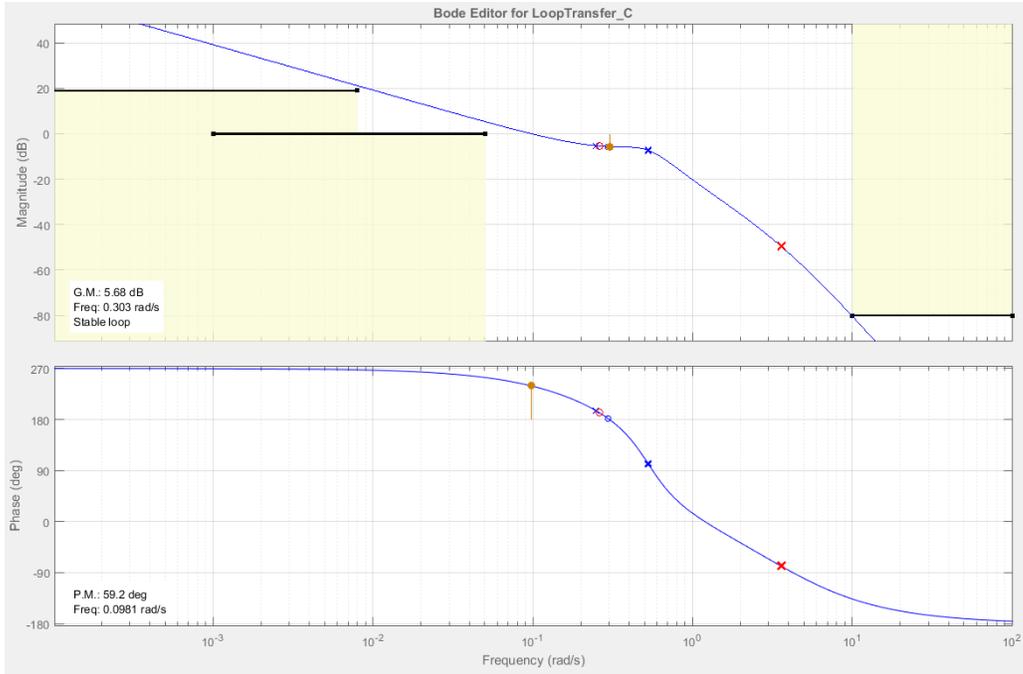


Figura 11: Diagramma di Bode del sistema controllato con  $C_2 = 0.049846 \frac{s+0.26}{s(s+3.6)^2}$

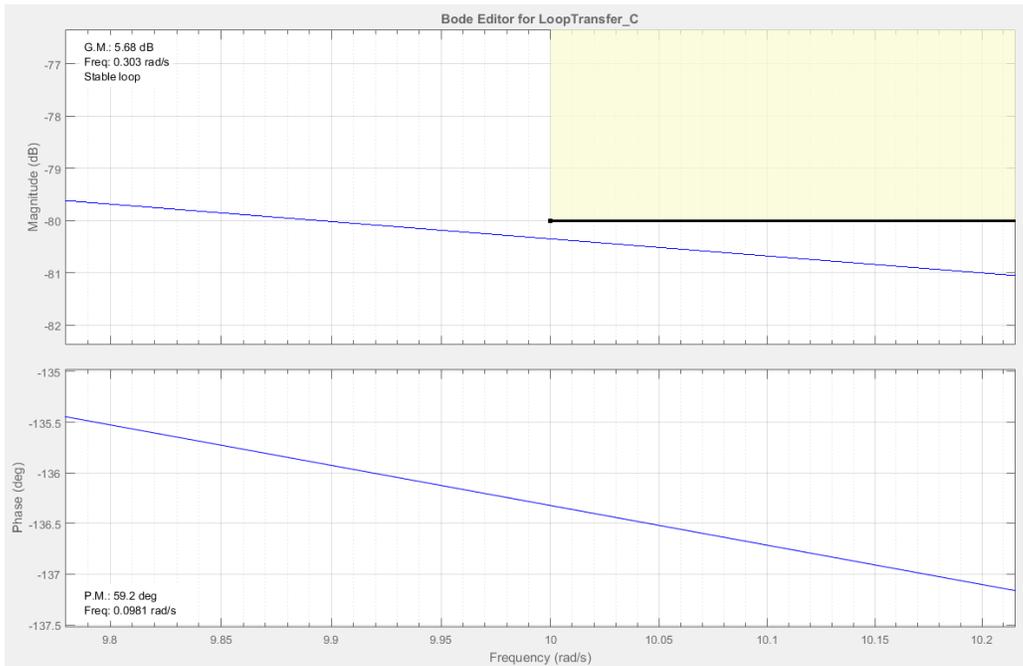


Figura 12: Diagramma di Bode del sistema controllato con  $C_2 = 0.049846 \frac{s+0.26}{s(s+3.6)^2}$

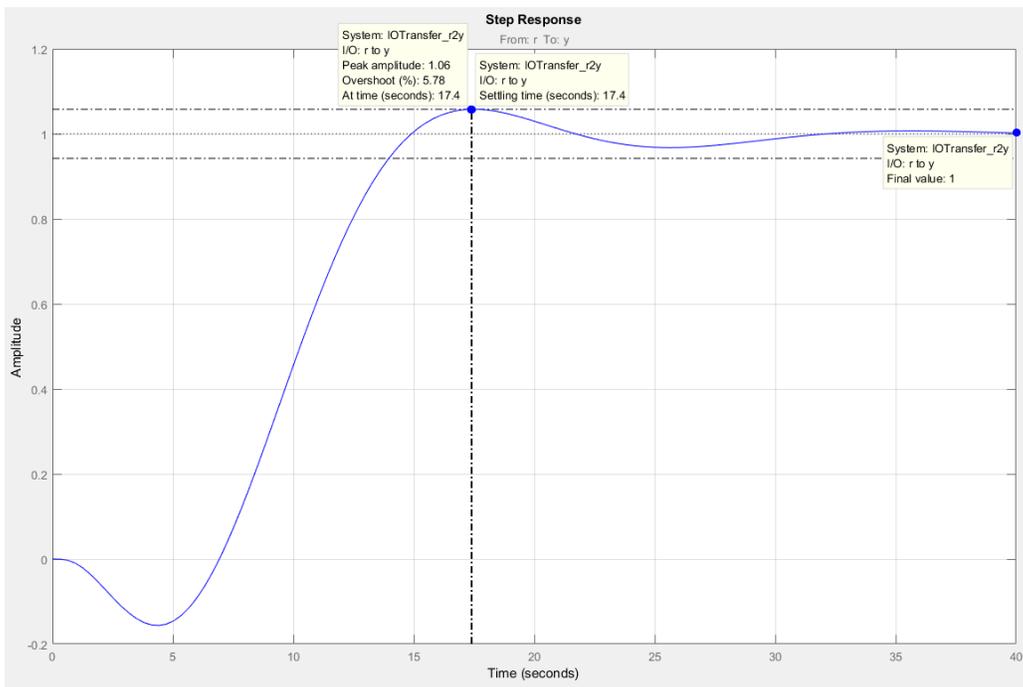


Figura 13: Risposta al gradino del sistema controllato con  $C_2 = 0.049846 \frac{s+0.26}{s(s+3.6)^2}$