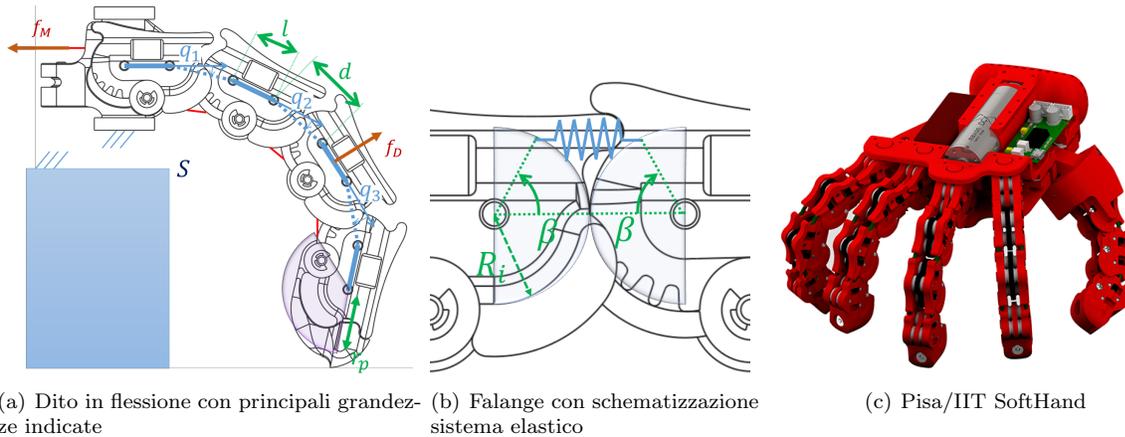


La Pisa/IIT SoftHand (figura 1(c)) è una mano sottoattuata ad un grado di attuazione e 19 gradi di libertà, capace di afferrare una vasta gamma di oggetti grazie alle sue capacità di adattabilità. In questo compito si dovrà affrontare il problema del controllo della chiusura di un singolo dito, in figura 1(a).



In una mano robotica tipicamente le inerzie risultano trascurabili rispetto ad eventuali effetti elastici o smorzanti. Dunque, il sistema dinamico di Figura 1(a) può essere descritto dalle seguenti equazioni

$$\begin{cases} \mu_1 \dot{q}_1 + 2k_1 R_1^2 \sin(2q_1) = \frac{1}{2}t_1 f + \frac{1}{2}[d(\cos(2q_2 + q_1) + 2\cos(q_2)) + l(1 + 2\cos(2q_2))]f_D \\ \mu_2 \dot{q}_2 + 2k_2 R_2^2 \sin(2q_2) = \frac{1}{2}t_2 f + \frac{1}{2}[d\cos(q_2) + l]f_D \\ \mu_3 \dot{q}_3 + 2k_3 R_3^2 \sin(2q_3) = \frac{1}{2}t_3 f \end{cases}$$

dove $2q_i$ è l'angolo di chiusura dell' i -esimo giunto. I termini indicati con le lettere μ_i e k_i sono rispettivamente i coefficienti di smorzamento e le rigidzze (si noti che le molle sono in configurazione di equilibrio per $q_i = 0$). L'effetto elastico risulta non lineare a causa della cinematica non lineare che lega l'angolo q_i all'allungamento della molla, figura 1(b). Il particolare sistema di attuazione, nell'ipotesi semplificativa di caduta di tensione dovuta all'attrito trascurabile, equivale ad un rapporto di trasmissione t_i fra la tensione applicata al filo f e la coppia risultante all' i -esimo giunto. Infine, un'eventuale forza esterna di disturbo f_D viene mappata sui giunti tramite un braccio dipendente dalla configurazione.

Si risponda alle seguenti richieste:

A.1 Fissato $f_D = 0$, si identifichino le configurazioni di equilibrio statico del sistema al variare di $f > 0$ tali che $q_1, q_2, q_3 \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Tra tutte le condizioni di equilibrio trovate, si scelga quella tale per cui $q_1 = q_2 = q_3 = \frac{\pi}{12}$, discutendo gli eventuali vincoli da imporre sui parametri del sistema.

A.2 Si consideri come funzione di uscita la distanza del polpastrello dal punto più vicino della superficie piana S dell'oggetto in figura 1(a). Una buona approssimazione della distanza è

$$p_x = (-3.6d - 4.7l)q_1 + (-2.6d - 3.7l)q_2 + (-0.96d - 2l)q_3 + 30 + 1.87d + 2.72l \quad (1)$$

Si determini una rappresentazione in forma di stato del sistema linearizzato attorno alla configurazione di equilibrio determinata in precedenza.

Si discuta la stabilità del sistema al variare dei parametri.

A.3 Considerando i seguenti valori numerici: $R_1 = R_2 = R_3 = 10$ mm, $k_1 = 0.3$ N/mm, $k_2 = k_3 = 0.6$ N/mm, $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 7.5$ N mm/s, $t_1 = 15$ mm, $t_2 = t_3 = 30$ mm, $l = 7.5$ mm e $d = 15$ mm

Si scrivano le matrici numeriche del sistema linearizzato in forma di stato. Si ricavino le funzioni di trasferimento tra: l'ingresso di controllo f e l'uscita p_x , l'ingresso di disturbo f_d e l'uscita p_x . Verificare che il risultato abbia *approssimativamente* la forma

$$G(s) = \frac{-280(s + 18)}{(s + 28)(s + 14)},$$

$$G_d(s) = \frac{-450(s + 25)}{(s + 28)(s + 14)}.$$

in caso negativo, per i punti successivi, è possibile utilizzare le funzioni di trasferimento qui fornite.

A.4 Si sintetizzi un controllore stabilizzante in grado di assolvere i seguenti compiti:

- Al fine di afferrare l'oggetto si vuole muovere il dito dalla posizione p_x di equilibrio fino a porre il polpastrello esattamente in contatto con la superficie S ($p_x = 0$). Al fine di non rompere l'oggetto, è necessario che la punta del dito non compenetri l'oggetto stesso (ovvero si abbia sempre $p_x \geq 0$). Si richiede inoltre che il polpastrello raggiunga una distanza di 1.5 mm dalla superficie S entro 1.5 s senza in seguito più allontanarsene.
- Si consideri il caso in cui il dito entri in contatto sulla seconda falange con l'ambiente. In prima approssimazione possiamo considerare tale interazione come un ingresso di disturbo f_D a gradino, di ampiezza 0.1 N. Si richiede che tale disturbo non generi a regime nessuna variazione nella posizione relativa fra il polpastrello e la superficie dell'oggetto.
- Attenuare gli effetti di un forte rumore di misura del tipo $n(t) = A_n \sin(\omega_n t + \sigma)$, con $A_n \leq 100$ mm, e $\omega_n = 314$ rad/s in modo tale che le oscillazioni della posizione del polpastrello a regime non superino gli 0.001 mm.

Si riportino quindi:

- le specifiche tradotte nel dominio della frequenza e visualizzate sul diagramma di Bode,
- il procedimento di progettazione del controllore illustrato con diagrammi a blocchi,
- la funzione di trasferimento del controllore progettato,
- i diagrammi di Bode del sistema nelle diverse fasi del progetto (mostrando il raggiungimento delle specifiche),

B Si descrivano le caratteristiche principali delle risposte al gradino compatibili con la matrice dinamica

$$A = \begin{bmatrix} -0.5 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -0.5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -0.5 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -0.5 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Nota: Si riportino tutti i risultati numerici con almeno 3 cifre significative

Soluzione

A.1 Imponendo $\dot{q}_i = 0, \forall i \in \{1, 2, 3\}$ le equazioni del moto si riducono a

$$\begin{cases} 2 k_1 R_1^2 \sin(2q_1) = \frac{1}{2} t_1 f \\ 2 k_2 R_2^2 \sin(2q_2) = \frac{1}{2} t_2 f \\ 2 k_3 R_3^2 \sin(2q_3) = \frac{1}{2} t_3 f \end{cases}$$

Ed esplicitando si ottiene il generico equilibrio al variare della forza applicata sul filo:

$$q_i = \frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{t_i}{4 k_i R_i^2} f\right) \quad \forall i \in \{1, 2, 3\}$$

Quindi risulta necessario che $\alpha = \frac{t_i}{4 k_i R_i^2}, \forall i \in \{1, 2, 3\}$. Infine se ne deduce che l'ingresso necessario al fine di generare l'equilibrio richiesto è

$$\bar{f} = \frac{1}{2 \alpha}$$

A.2 Il sistema si porta in forma di stato semplicemente dividendo per μ_i linearizzando le equazioni ottenute attorno alla condizione di equilibrio individuata in precedenza si ottiene

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu + B_d u_d = \\ & \begin{bmatrix} -\frac{4 k_1 R_1^2}{\mu_1} \cos(2q_1) & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{4 k_2 R_2^2}{\mu_2} \cos(2q_2) & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{4 k_3 R_3^2}{\mu_3} \cos(2q_3) \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \frac{t_1}{2\mu_1} \\ \frac{t_2}{2\mu_2} \\ \frac{t_3}{2\mu_3} \end{bmatrix} u + \\ & + \begin{bmatrix} \frac{1}{2\mu_1} (d(\cos(\pi/4) + 2 \cos(\pi/12)) + l(1 + 2 \cos(\pi/6))) \\ \frac{1}{2\mu_2} (d \cos(\pi/12) + l) \\ 0 \end{bmatrix} u_d. \end{aligned}$$

Essendo il sistema già in forma diagonale è immediato affermare che il sistema sia stabile per ogni scelta di k_i e μ_i concordi in verso, ed in particolare per $k_i > 0$ e $\mu_i > 0$ come fisicamente ragionevole (si tratta infatti di tre sistemi molla smorzatore disaccoppiati). Non sarà pertanto necessaria la progettazione di un controllore stabilizzante. Per quanto riguarda l'uscita del sistema, si ha $y = Cx$, con

$$C^T = [-3.6d - 4.7l \quad -2.6d - 3.7l \quad -0.96d - 2l]$$

A.3 Le matrici numeriche del sistema linearizzato sono

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} -13.8564 & 0 & 0 \\ 0 & -27.7128 & 0 \\ 0 & 0 & -27.7128 \end{bmatrix} \\ B &= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad B_d = \begin{bmatrix} 4.005 \\ 1.4659 \\ 0 \end{bmatrix} \\ C &= -2 [44.781, 33.787, 14.744] \end{aligned}$$

La funzione di trasferimento tra l'ingresso di controllo u e l'uscita y è

$$G(s) = \frac{-283.69(s + 18.23)}{(s + 13.86)(s + 27.71)},$$

mentre la funzione di trasferimento tra l'ingresso di disturbo u_d e l'uscita y è

$$G_d(s) = \frac{-457.76(s + 24.71)}{(s + 27.71)(s + 13.86)}.$$

Come già discusso al punto precedente il sistema risulta stabile e non necessita di nessun controllo stabilizzante

A.4 Si procede a sintetizzare il controllore $C(s)$ affinché il sistema in anello chiuso rispetti le specifiche.

- Si vuole portare il sistema dal valore di $p_x = p_x(\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{12}) = 30$ mm al valore di regime desiderato $p_x = 0$ mm. Il gradino del segnale di riferimento in ingresso al sistema ha dunque ampiezza $p_{STEP} = -30$ mm.
- Si richiede di non superare mai con il polpastrello la superficie dell'oggetto, i.e. $p_x < 0 \forall t$. Questo equivale ad imporre che il controllore progettato non generi sovraelongazione. Si può cercare di rispettare tale specifica con un controllo che punti ad approssimare il sistema in ciclo chiuso con un sistema ad un polo dominante.
- Si vuole che l'uscita entri in un intervallo di $[0, 1.5]$ mm, senza più uscirne, dopo 1.5 secondi. L'intervallo corrisponde a richiedere una tolleranza percentuale di:

$$tol_{PERC} = \frac{1.5}{30} = 5\%$$

rispetto al valore di regime. La specifica sulla pulsazione di taglio ω_T per un sistema del primo ordine è:

$$T_{a5} \simeq \frac{3}{\omega_T} < 1.5 \text{ s} \quad \implies \quad \omega_T > 2 \text{ rad/s.}$$

- La richiesta di arrivare perfettamente a contatto a regime equivale a richiedere errore a regime nullo. Siccome il sistema fisico non include un polo nell'origine esso dovrà essere introdotto tramite il controllore.
- si richiede infine che l'errore per disturbi a gradino sia nullo. Essendo la funzione di trasferimento fra disturbo ed errore in anello chiuso

$$G_{2d}(s) = -\frac{G_d}{1 + GC},$$

se ne deduce che, per il teorema del valore finale

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{G_d}{1 + GC} \frac{1}{s} = 0,$$

condizione sufficiente per il soddisfacimento della specifica sia la presenza di un polo nell'origine per il sistema in anello aperto. Dunque questa specifica e la precedente sono soddisfatte entrambe da un controllore nella forma

$$C(s) = \frac{K}{s} C_0(s)$$

- Si richiede che un rumore di misura $n(t)$ non produca a regime uno spostamento superiore a 0.001 mm. Appliciamo dunque il teorema della risposta armonica. La funzione di trasferimento fra la trasformata $D(j\omega)$ del rumore n e la trasformata $Y(j\omega)$ dell'uscita è data da

$$Y(j\omega) = -\frac{C(j\omega)G(j\omega)}{1 + C(j\omega)G(j\omega)} D(j\omega) = \overline{G}(j\omega) D(j\omega). \quad (3)$$

La componente dell'uscita dovuta ad un rumore sinusoidale ad una frequenza generica ω_k sarà quindi del tipo

$$y(t) = |\overline{G}(j\omega_k)| |D(j\omega_k)| \sin(\omega_k t + \angle \overline{G}(j\omega_k + \psi)). \quad (4)$$

Facendo riferimento al caso cautelativo in cui $\sin(\omega_k t + \angle \overline{G}(j\omega_k) + \psi) = 1$, e considerando di maggiorare il modulo $|\overline{G}(j\omega)|$ con il suo valore massimo nel range di frequenze d'interesse, il modulo della componente sinusoidale del rumore da considerare è pari a 100mm.

Il controllo deve dunque essere scelto in modo tale che

$$|\overline{G}(j\omega)| = \frac{|C(j\omega)G(j\omega)|}{|1 + C(j\omega)G(j\omega)|} \leq \frac{0.001}{100} \quad \omega = 50Hz, \quad (5)$$

Oppure più cautelativamente:

$$|\overline{G}(j\omega)| = \frac{|C(j\omega)G(j\omega)|}{|1 + C(j\omega)G(j\omega)|} \leq \frac{0.001}{100} \quad \forall \omega \geq 50Hz \simeq 314rad/s, \quad (6)$$

Essendo il rumore ad alte frequenze è possibile applicare l'approssimazione $|1 + C(j\omega)G(j\omega)| \approx 1$. Il controllore quindi deve soddisfare

$$|C(j\omega)G(j\omega)| \leq 0.00001. \quad \forall \omega \geq 50Hz \simeq 314rad/s, \quad (7)$$

Il guadagno d'anello per soddisfare questa specifica dovrà essere minore di $20 \log_{10}(0.00001) = -100$ dB per le frequenze considerate.

La figura 1 mostra il diagramma di Bode di $G_2(s)$ con le specifiche sulla frequenza di taglio e sul guadagno ad alta frequenza che devono essere rispettate per l'attenuazione dei disturbi.

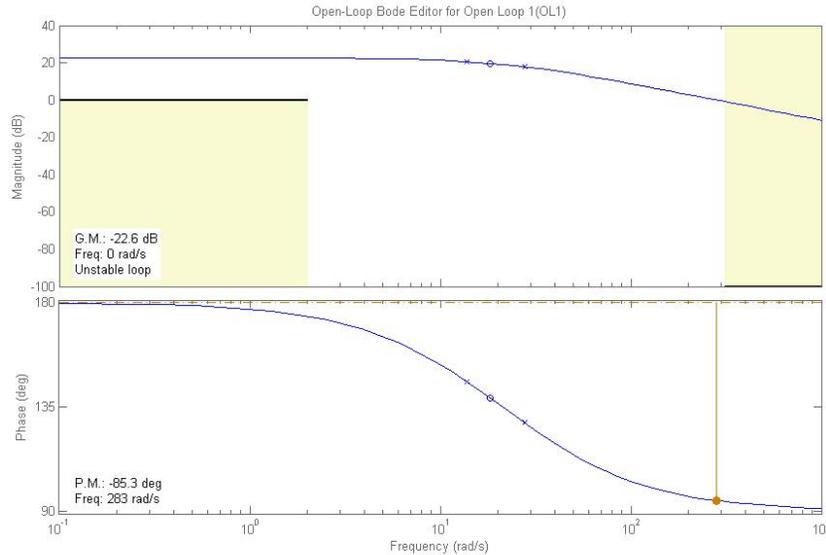


Figura 1: Diagrammi di Bode della f.d.t. $G(s)$ con le specifiche da rispettare.

Un controllore che permetta al sistema di rispettare tutte le specifiche, compresa la causalità, è il seguente:

$$C(s) = -300 \frac{1}{s(s+40)^2}.$$

nel quale si è provveduto ad inserire un integratore, a scegliere il guadagno al fine portare la frequenza di taglio sopra quella minima, e ad aggiungere due poli a frequenze più alte per soddisfare le stringenti specifiche di attenuazione del rumore.

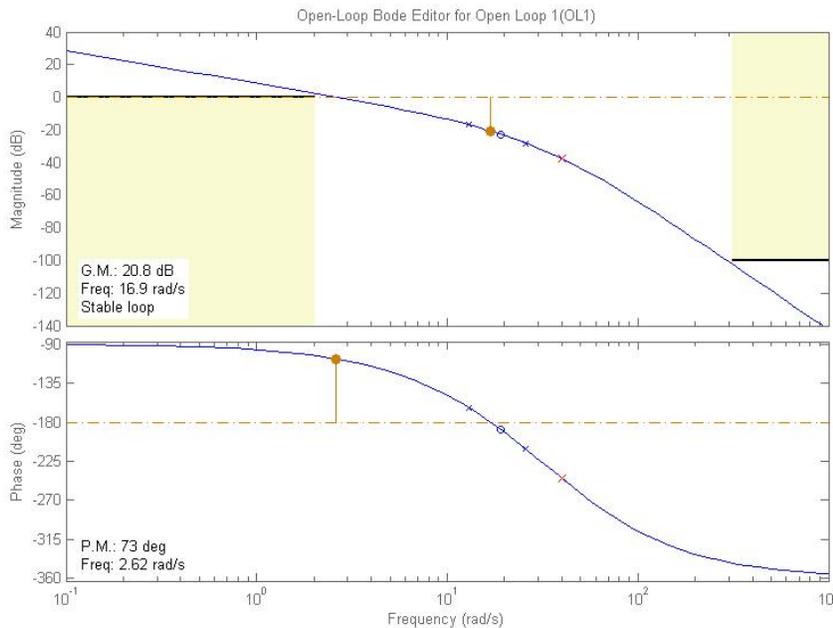


Figura 2: Diagrammi di Bode della f.d.t. $G(s)C(s)$ con le specifiche rispettate.

Il sistema chiuso in retroazione risulta essere:

$$G_{cl}(s) = 85107 \frac{s + 18.23}{(s + 22.09)(s + 9.005)(s + 3.997)(s^2 + 86.48s + 1952)}.$$

Per questo sistema è riportata la risposta al gradino in figura 3.

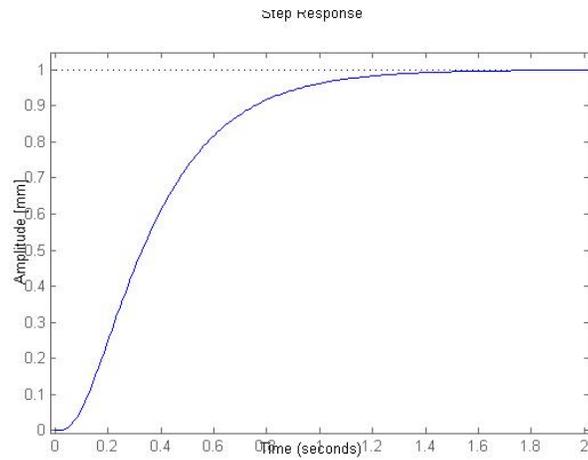


Figura 3: Risposta allo scalino del sistema in anello chiuso.

B La matrice A risulta nella forma di Jordan reale, presenta un blocco di Jordan di dimensione 2 associato al blocco reale

$$M = \begin{bmatrix} -0.5 & 1 \\ -1 & -0.5 \end{bmatrix} \quad (8)$$

gli autovalori sono quindi complessi $\lambda = -0.5 \pm j$ e i modi del sistema risultano

$$e^{-0.5t} \cos(t), e^{-0.5t} \sin(t), t e^{-0.5t} \cos(t), t e^{-0.5t} \sin(t)$$