

Si consideri il sistema di Figura 1. Esso è composto da tre corpi: all'estremità di un pendolo inverso è incernierato un telaio nel quale alloggia una ruota giroscopica. Si indichi con  $\theta$  l'inclinazione del pendolo rispetto all'asse verticale  $x$  e con  $\varphi$  la rotazione dell'asse della ruota rispetto al piano  $xz$  ( $\theta$  e  $\varphi$  positivi in Figura 1). Si consideri inoltre che la ruota giri attorno al suo asse (di versore  $\vec{a}$ ) ad una velocità  $\Omega$ , e che i corpi siano soggetti alla forza di gravità diretta nel verso opposto all'asse  $x$ .

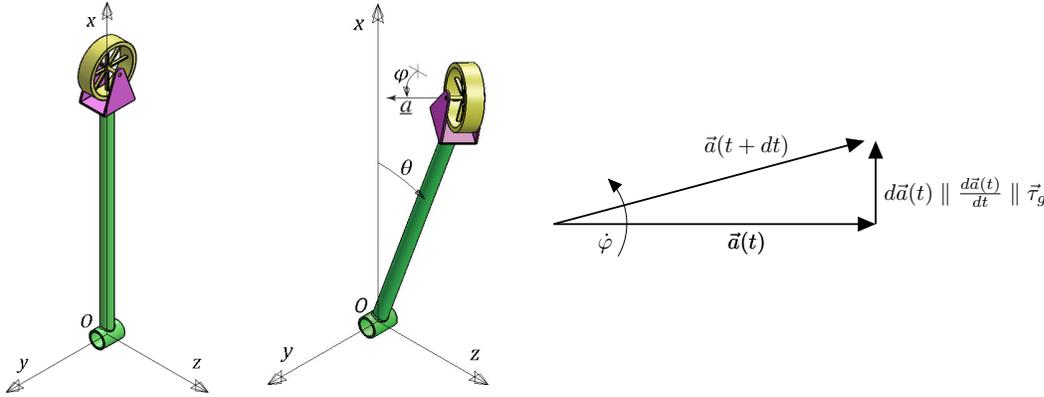


Figura 1: Sistema dinamico e rappresentazione schematica della tendenza al parallelismo.

Per valori di  $\Omega \neq 0$  si assiste ad un interessante fenomeno noto come *tendenza al parallelismo dell'asse giroscopico*: una variazione della direzione dell'asse della ruota ( $d\vec{a}/dt$ ) dà vita ad una coppia  $\vec{\tau}_g$  avente la medesima direzione ( $d\vec{a}/dt \parallel \vec{\tau}_g$ ) ed agente sulla ruota stessa (Figura 1). Secondo questo principio, interponendo tra il pendolo ed il telaio un motore che eroghi una coppia  $\tau_\varphi$  in grado di ruotare l'asse giroscopico  $\vec{a}$ , è possibile controllare la posizione  $\theta$  del pendolo. (Questo fenomeno è ad esempio sfruttato nel controllo d'assetto della Stazione Spaziale Internazionale, il cui modulo Zvezda utilizza 4 giroscopi da 270 kg ciascuno.)

Le equazioni che governano la dinamica del sistema di Figura 1 sono le seguenti:

$$\begin{aligned} [I_1 + I_3 + (I_4 - I_3) \sin^2(\varphi)] \ddot{\theta} + \dot{\theta} \dot{\varphi} (I_4 - I_3) \sin(2\varphi) - \Omega \dot{\varphi} I_5 \cos(\varphi) - G \sin(\theta) &= \tau_\theta \\ I_2 \ddot{\varphi} - \frac{\dot{\theta}^2 (I_4 - I_3) \sin(2\varphi)}{2} + \Omega \dot{\theta} I_5 \cos(\varphi) &= \tau_\varphi, \end{aligned}$$

dove i termini indicati con la lettera  $I$  sono momenti di inerzia (somme di molteplici contributi),  $G \sin(\theta)$  rappresenta il momento delle forze peso complessive del sistema e  $\tau_\theta$  è una coppia di disturbo.

Si risponda alle seguenti richieste:

- A.1** Fissato  $\tau_\theta = 0$ , si identifichino le configurazioni di equilibrio statico del sistema. Tra tutte le condizioni di equilibrio trovate, si scelga quella tale per cui  $\theta \in (-\pi, \pi)$  e, nel caso in cui essa non dipenda da  $\varphi$ , si utilizzi per i punti successivi  $\varphi = 0$ .
- A.2** Supponendo di disporre della misura dell'angolo  $\theta$ , si determini una rappresentazione in forma di stato del sistema linearizzato attorno alla configurazione di equilibrio determinata in precedenza. Si discuta la stabilità del sistema linearizzato al variare di  $\Omega \in [0, +\infty)$ . In particolare si mostri l'esistenza di un valore di transizione ( $\Omega = \bar{\Omega}$ ) superato il quale si assiste ad una variazione della tipologia dei modi propri del sistema.
- A.3** Si considerino i seguenti valori numerici:  $I_1 = 1.251 \times 10^{-1} \text{ kg m}^2$ ,  $I_2 = 4.044 \times 10^{-4} \text{ kg m}^2$ ,  $I_3 = 4.386 \times 10^{-4} \text{ kg m}^2$ ,  $I_4 = 6.773 \times 10^{-4} \text{ kg m}^2$ ,  $I_5 = 5.777 \times 10^{-4} \text{ kg m}^2$ ,  $G = 3.093 \text{ N m}$  e  $\Omega = \bar{\Omega}/2$ .

Si scrivano le matrici numeriche del sistema linearizzato in forma di stato. Si ricavino le funzioni di trasferimento tra: l'ingresso di controllo  $u = \tau_\varphi$  e l'uscita  $y = \theta$ , l'ingresso di disturbo  $u_d = \tau_\theta$  e l'uscita  $y = \theta$ . Verificare che il risultato abbia approssimativamente la forma

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{300}{s(s-4)(s+4)} \\ G_d(s) &= \frac{Y(s)}{U_d(s)} = \frac{8}{(s-4)(s+4)}, \end{aligned}$$

in caso negativo, per i punti successivi, è possibile utilizzare le funzioni di trasferimento qui fornite.

**A.4** Si sintetizzi un controllore stabilizzante in grado di assolvere i seguenti compiti:

- Portare il sistema esattamente in posizione verticale, a partire dalla condizione iniziale  $\theta(0) = -8.3^\circ$ . Si faccia inoltre in modo che durante l'evoluzione (a causa della presenza di un ostacolo) l'inclinazione del pendolo non superi mai il valore di  $\theta_{\max} = 0.5^\circ$  e che il pendolo entri (senza più uscirne) nell'intervallo  $\theta \in [-0.415^\circ, 0.415^\circ]$  entro un tempo pari a 0.38 s,.
- Si consideri il caso in cui il pendolo sia incernierato ad una base mobile vibrante. Modellando (in prima approssimazione) gli effetti del movimento della base come una coppia  $\tau_\theta = \sum_i A_i \sin(\omega_i t)$  dove  $\sum_i A_i \leq 10.0 \text{ Nm}$   $\forall i$  e  $\omega_i \leq 0.5 \text{ rad/s}$   $\forall i$ ; si vuole che a regime l'inclinazione del pendolo rimanga contenuta nell'intervallo  $\theta \in [-0.1^\circ, 0.1^\circ]$ .

Si riportino quindi:

- le specifiche tradotte nel dominio della frequenza e visualizzate sul diagramma di Bode,
- il procedimento di progettazione del controllore illustrato con diagrammi a blocchi,
- la funzione di trasferimento del controllore progettato,
- i diagrammi di Bode del sistema nelle diverse fasi del progetto (mostrando il raggiungimento delle specifiche),
- la risposta al gradino del sistema controllato riportando le caratteristiche più significative.

**A.5** Al Punto A.1 è stato indicato (nel caso in cui la configurazione di equilibrio trovata non dipenda da  $\varphi$ ) di considerare un valore  $\varphi = 0$ . Il candidato discuta brevemente gli effetti che una diversa scelta di questo angolo avrebbe sulla dinamica del sistema (linearizzato e non). Si tenga presente che  $\Omega \gg \dot{\theta}$  e che  $I_5 \approx (I_4 - I_3) \ll I_1$ .

*Nota: Si riportino tutti i risultati numerici con almeno 3 cifre significative*

## Soluzione

**A.1** Imponendo  $\ddot{\theta} = \ddot{\varphi} = \dot{\theta} = \dot{\varphi} = \tau_{\theta} = 0$  le equazioni del moto si riducono a

$$\begin{aligned}\sin(\theta) &= 0 \\ \tau_{\varphi} &= 0.\end{aligned}$$

Si seleziona  $\theta = 0 \in (-\pi, \pi)$  e, non essendovi dipendenza da  $\varphi$ ,  $\varphi = 0$  come suggerito nel testo.

**A.2** Indicando con:  $x = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T = [\theta \ \varphi \ \dot{\theta} \ \dot{\varphi}]^T$  il vettore delle variabili di stato,  $u = \tau_{\varphi}$  l'ingresso di controllo,  $u_d = \tau_{\theta}$  l'ingresso di disturbo e  $y = \theta$  l'uscita del sistema; il sistema non lineare assume la seguente forma di stato:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_3 \\ \dot{x}_2 &= x_4 \\ \dot{x}_3 &= -\frac{x_3 x_4 (I_4 - I_3) \sin(2x_2) + \Omega x_4 I_5 \cos(x_2) + G \sin(x_1) + u_d}{[I_1 + I_3 + (I_4 - I_3) \sin^2(x_2)]} \\ \dot{x}_4 &= \frac{x_3^2 (I_4 - I_3) \sin(2x_2) - 2\Omega x_3 I_5 \cos(x_2) + 2u}{2I_2}.\end{aligned}$$

Linearizzando queste equazioni attorno alla condizione di equilibrio individuata in precedenza si ottiene

$$\dot{x} = Ax + Bu + B_d u_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{G}{I_1 + I_3} & 0 & 0 & \frac{\Omega I_5}{I_1 + I_3} \\ 0 & 0 & \frac{-\Omega I_5}{I_2} & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{I_2} \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{I_1 + I_3} \\ 0 \end{bmatrix} u_d.$$

Per quanto riguarda l'uscita del sistema, si ha

$$y = Cx = [1 \ 0 \ 0 \ 0] x.$$

Al fine di analizzare la stabilità del sistema linearizzato è necessario calcolare il polinomio caratteristico della matrice dinamica  $A$ :

$$\pi(\lambda, \Omega) = \det(A - \lambda I) = \lambda^2 \left[ \lambda^2 - \frac{GI_2 - \Omega^2 I_5^2}{I_2(I_1 + I_3)} \right].$$

Imponendo  $\pi(\lambda, \Omega) = 0$ , si ricavano gli autovalori del sistema

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = -\lambda_4 = \sqrt{\frac{GI_2 - \Omega^2 I_5^2}{I_2(I_1 + I_3)}}.$$

Si prospettano pertanto tre possibilità:

- a)  $GI_2 > \Omega^2 I_5^2 \Rightarrow 2$  autovalori nell'origine e 2 autovalori sull'asse reale (uno positivo, l'altro negativo);
- b)  $GI_2 < \Omega^2 I_5^2 \Rightarrow 2$  autovalori nell'origine e 2 autovalori immaginari coniugati;
- c)  $GI_2 = \Omega^2 I_5^2 \Rightarrow 4$  autovalori nell'origine.

Tra questi autovalori, gli unici di cui non è possibile verificare immediatamente gli associati modi propri sono quelli nell'origine. Pertanto, al fine di concludere sull'instabilità del sistema, è necessario calcolare la molteplicità geometrica degli autovalori  $\lambda = 0$ :

$$\nu_{\lambda=0} = \dim(\ker(A - \lambda I)) \equiv \dim(\ker(A)) = 1 \quad \forall \Omega.$$

Ne segue che il blocco della matrice di Jordan associato agli autovalori  $\lambda = 0$  è: nei casi a) e b)

$$J_{\lambda=0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

nel caso c)

$$J_{\lambda=0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

L'analisi modale per i vari casi è in definitiva la seguente:

- a) 2 modi propri polinomiali  $t^k$  con  $0 \leq k \leq 1$  e  $k \in \mathbb{Z}$  (associati agli autovalori  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ ) di cui uno stabile e uno instabile, 2 modi propri esponenziali semplici  $e^{\lambda t}$  di cui uno instabile (associato a  $\lambda_3$ ) e uno stabile (associato a  $\lambda_4$ );
- b) 2 modi propri polinomiali  $t^k$  con  $0 \leq k \leq 1$  e  $k \in \mathbb{Z}$  (associati agli autovalori  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ ) di cui uno stabile e uno instabile, 2 modi propri limitati ma non convergenti  $\cos(\omega t)$  e  $\sin(\omega t)$  (associati agli autovalori  $\lambda_3$  e  $\lambda_4$ );
- c) 4 modi propri polinomiali  $t^k$  con  $0 \leq k \leq 3$  e  $k \in \mathbb{Z}$  di cui uno stabile e tre instabili.

Si conclude pertanto che il sistema linearizzato è instabile  $\forall \Omega$ , mentre la velocità angolare di transizione è quella relativa al caso c):  $\bar{\Omega} = \sqrt{GI_2/I_5}$ .

**A.3** Sostituendo i valori numerici forniti, si ottiene  $\Omega = \bar{\Omega}/2 = 30.61$  rad/s. Le matrici numeriche del sistema linearizzato sono

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 24.64 & 0 & 0 & 0.1409 \\ 0 & 0 & -43.73 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2473 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0].$$

La funzione di trasferimento tra l'ingresso di controllo  $u = \tau_\varphi$  e l'uscita  $y = \theta$  è

$$G(s) = \frac{348.3}{s(s - 4.299)(s + 4.299)},$$

mentre la funzione di trasferimento tra l'ingresso di disturbo  $u_d = \tau_\theta$  e l'uscita  $y = \theta$  è

$$G_d(s) = \frac{7.966}{(s - 4.299)(s + 4.299)}.$$

**A.4** Essendo il sistema instabile in catena aperta, un primo controllore stabilizzante può essere ottenuto mediante l'utilizzo del luogo delle radici. In figura 2 è visibile il luogo delle radici del sistema in anello aperto.

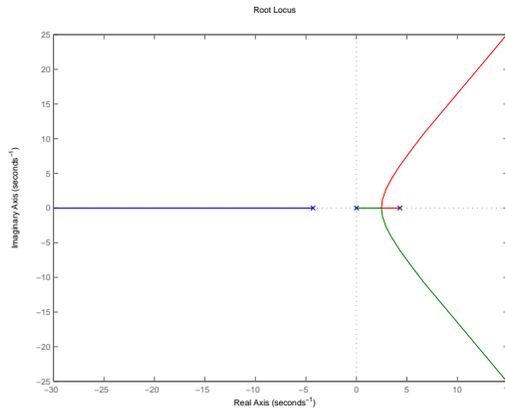


Figura 2: Luogo delle radici del sistema in anello aperto.

Un possibile controllore stabilizzante può essere ottenuto mediante una doppia rete anticipatrice, ed è dato da:

$$C_1(s) = \frac{1 + 0.47s + (0.33s)^2}{(1 + 0.001s)(1 + 0.001s)}$$

Diverse configurazioni sono possibili (due coppie di zeri e poli complessi coniugati o reali). Una scelta alternativa è data dal controllore  $C_1^B(s)$ :

$$C_1^B(s) = \frac{750(s + 1)(s + 10)}{(s + 100)^2}$$

Con i controllori  $C_1(s)$  e  $C_1^B(s)$  si ottengono, rispettivamente, i luoghi delle radici mostrati in figura 3 e figura 4.

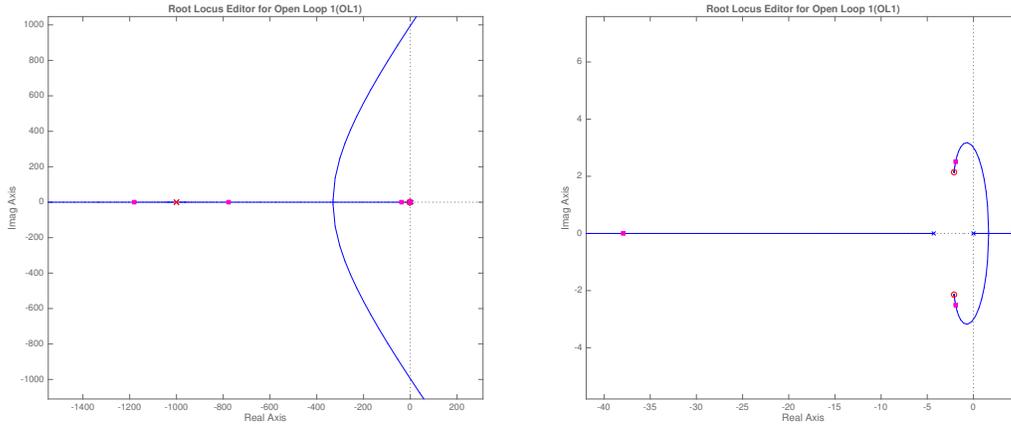


Figura 3: Luogo delle radici del sistema in anello chiuso con controllore  $C_1(s)$  inserito. A destra, dettaglio nell'intorno dell'origine.

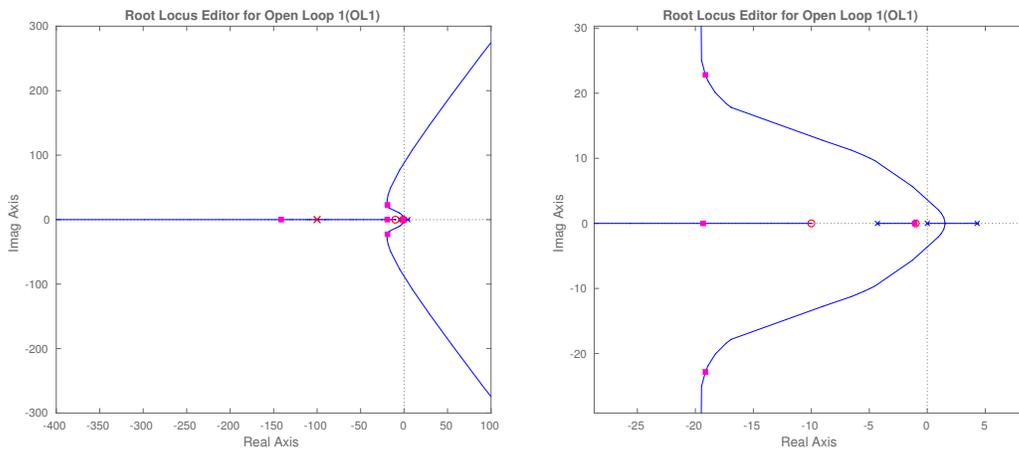


Figura 4: Luogo delle radici del sistema in anello chiuso con controllore  $C_1(s)$  inserito. A destra, dettaglio nell'intorno dell'origine.

Le rispettive funzioni di trasferimento a seguito della chiusura del primo anello di controllo con il controllore  $C_1(s)$  sono:

$$G_2(s) = \frac{3.8704e07(s^2 + 4.2s + 9)}{(s + 1181)(s + 777.5)(s + 37.94)(s^2 + 3.852s + 10)}$$

$$G_{d2}(s) = \frac{G_{d1}(s)}{1 + C_1(s)G_1(s)} = \frac{7.9658s(s + 1000)^2}{(s + 1181)(s + 777.5)(s + 37.94)(s^2 + 3.852s + 10)}$$

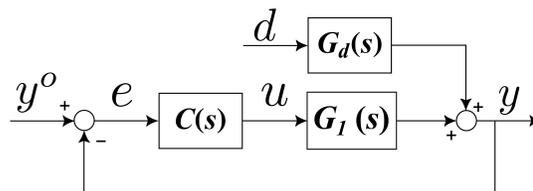


Figura 5: Diagramma a blocchi del sistema.

Si procede a sintetizzare il secondo controllore  $C_2(s)$  affinché il sistema in anello chiuso, approssimato ad un sistema del secondo ordine, rispetti le specifiche.

- Si vuole portare il sistema dal valore di  $\theta(0) = -8.3^\circ$  al valore di regime desiderato  $\theta_{REF} = 0^\circ$ . Il gradino del segnale di riferimento in ingresso al sistema ha dunque ampiezza  $\theta_{STEP} = 8.3^\circ$ .
- Il valore massimo dell'uscita è pari a  $\theta_{MAX} = 0.5^\circ$ , da cui si può ricavare la sovrallungamento massima percentuale come:

$$S_{\%} = \frac{\theta_{MAX} - \theta_{REF}}{\theta_{REF} - \theta(0)} 100 = 6.02\%$$

La specifica sulla sovrallungamento si impone tramite

$$S_{\%} = 100e^{-\frac{\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}} \leq 6.02\%$$

Da cui

$$\delta > 0.666 \quad \implies \quad M_{\phi} \simeq 100\delta = 66.6^\circ$$

- Si vuole che l'uscita entri in un intervallo di  $[-0.415^\circ, 0.415^\circ]$ , senza più uscirne, dopo 0.38 secondi. L'intervallo, simmetrico rispetto al valore  $\theta_{REF}$ , ha una ampiezza percentuale di:

$$tol_{PERC} = 5\%$$

rispetto al valore di regime. La specifica sulla pulsazione di taglio  $\omega_T$  è:

$$T_{a5} \simeq \frac{-\ln(\frac{5}{100}) - \frac{1}{2}\ln(1-\delta^2)}{\delta\omega_T} \quad \implies \quad \omega_T > 12.9864 \text{ rad/s.}$$

- Si desidera che l'errore a regime vada a zero in assenza di disturbi: il soddisfacimento di tale specifica è garantito con un controllore del tipo:

$$C(s) = \frac{K}{s^t} C_0(s), \text{ con } C_0(0) \geq 1 \text{ e } t > 1.$$

**A.4.2** Si richiede che un disturbo  $\tau_{\theta} = \sum_i A_i \sin(\omega_i t)$  dove  $\sum_i A_i \leq 10.0 \text{ Nm } \forall i$  e  $\omega_i \leq 0.5 \text{ rad/s } \forall i$  non produca a regime un errore superiore a  $\pm 0.1^\circ$ .

Si applica il teorema della risposta armonica. La funzione di trasferimento tra la trasformata  $D(j\omega)$  del disturbo e la trasformata  $Y(j\omega)$  dell'uscita è data da

$$Y(j\omega) = \frac{G_{d2}(j\omega)}{1 + C_2(j\omega)G_2(j\omega)} D(j\omega) = \bar{G}(j\omega)D(j\omega),$$

dove

$$G_{d2}(j\omega) = \frac{G_d(j\omega)}{1 + C_1(j\omega)G_1(j\omega)}$$

è la f.d.t. tra il disturbo e l'uscita a seguito dell'inserimento del controllore stabilizzante.

La componente dell'uscita dovuta ad un disturbo sinusoidale ad una frequenza generica  $\omega_k$  sarà quindi del tipo

$$y(t) = |\bar{G}(j\omega_k)| |D(j\omega_k)| \sin(t + \angle \bar{G}(j\omega_k)).$$

Facendo riferimento al caso peggiore, in cui  $\sin(\omega_k t + \angle \bar{G}(j\omega_k)) = 1$ , e considerando di aumentare il modulo  $|\bar{G}(j\omega)|$  con il suo valore massimo nel range di frequenze d'interesse ( $\omega_k \leq 0.5 \text{ rad/s}$ ), il modulo della componente sinusoidale del disturbo da considerare è pari a 10 Nm.

Il controllo deve dunque essere scelto in modo tale che

$$|\bar{G}(j\omega)| = \frac{|G_{d2}(j\omega)|}{|1 + C_2(j\omega)G_2(j\omega)|} \leq \frac{0.1 \frac{\pi}{180}}{10} = 1.7453 \cdot 10^{-4} \quad \forall \omega \leq \omega_d,$$

dove  $\omega_d$  viene scelta come la massima frequenza del disturbo, ovvero 0.5 rad/s.

Poiché a bassa frequenza è ragionevole applicare l'approssimazione  $|1 + C_2(j\omega)G_2(j\omega)| \approx |C_2(j\omega)G_2(j\omega)|$ , il controllore deve soddisfare

$$|C_2(j\omega)G_2(j\omega)| \geq \frac{|G_{d2}(j\omega)|}{1.7453 \cdot 10^{-4}}.$$

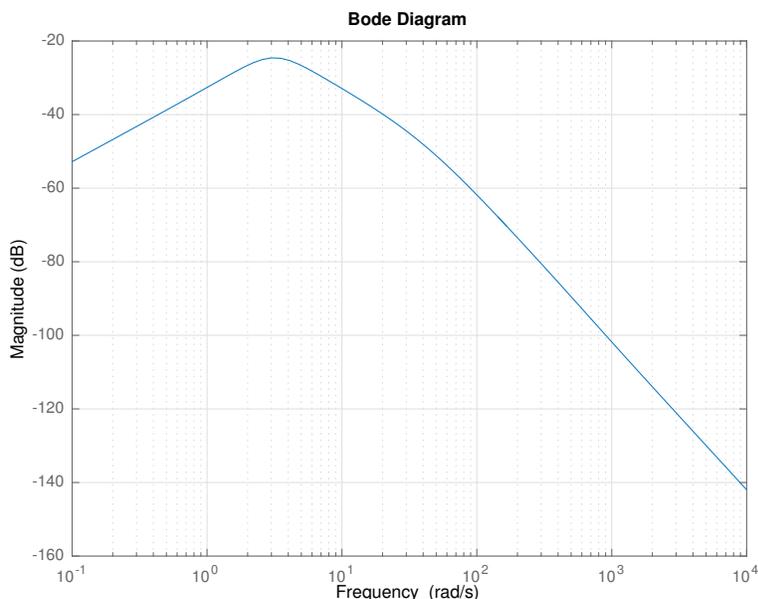


Figura 6: Diagramma di Bode della f.d.t.  $G_{d2}(s)$ .

Notando infine che nel campo frequenziale d'interesse (vedi figura 6) si ha  $|G_{d2}(j\omega)| < -37$  dB e  $20 \log_{10}(1.7453E-4) = -75.1625$  dB, il guadagno d'anello per soddisfare questa specifica deve essere superiore a  $-37 - (-75.1625) = 38.1625$  dB per frequenze minori di 0.5 rad/s.

La figura 7 mostra il diagramma di Bode di  $G_2(s)$  con le specifiche sul guadagno statico e sul guadagno in bassa frequenza che devono essere rispettate per l'errore a regime e l'attenuazione dei disturbi.

Il controllore può essere progettato anzitutto inserendo un integratore per la specifica sull'errore al gradino. Poi si modula il guadagno e si aumenta la banda passante del sistema in anello chiuso per mezzo di una rete anticipatrice.

Un controllore che permette al sistema di rispettare tutte le specifiche, compresa la causalità, è il seguente:

$$C_2(s) = \frac{50(0.1s + 1)}{s(0.0001s + 1)}.$$

nel quale si è provveduto ad inserire un integratore, aumentare il guadagno per soddisfare le specifiche di bassa frequenza ed aggiungere una rete anticipatrice per soddisfare le specifiche sulla pulsazione di taglio e margine di fase. Il sistema chiuso in retroazione col nuovo controllore risulta essere:

$$G_{2cl}(s) = \frac{1.9352e12(s + 10)(s^2 + 4.2s + 9)}{(s + 9998)(s + 1428)(s + 8.716)(s^2 + 4.257s + 9.106)(s^2 + 561s + 1.537e05)}.$$

In figura 8 si mostra il diagramma di Bode del sistema con il controllore  $C_2(s)$  inserito.

Per questo sistema sono riportate la risposta al gradino in figura 9 e la risposta al disturbo in figura 10.

Nel caso si fosse usato il controllore stabilizzante  $C_1^B(s)$ , si sarebbe potuto progettare un controllore  $C_2(s)$  della forma guadagno più integratore.

- A.5** La scelta  $\varphi = 0$  è motivata dal fatto che l'accoppiamento dinamico delle due equazioni del moto (principalmente dovuto all'effetto giroscopico, dal momento che  $\Omega \gg \dot{\theta}$  e che  $(I_4 - I_3) \approx I_5$ ) varia con  $\cos(\varphi)$ . Per questo motivo la capacità di controllare l'inclinazione  $\theta$  del pendolo, tramite l'ingresso  $\tau_\varphi$ , è massima per  $\varphi = k\pi$  ed è praticamente nulla per  $\varphi = k\pi + \pi/2$  (con  $k \in \mathbb{Z}$ ). La condizione  $(I_4 - I_3) \ll I_1$  ci indica come il termine inerziale, nell'equazione del moto relativa al grado di libertà  $\theta$ , sia sostanzialmente indipendente da  $\varphi$  e pertanto non influenzi la capacità di controllare  $\theta$ .

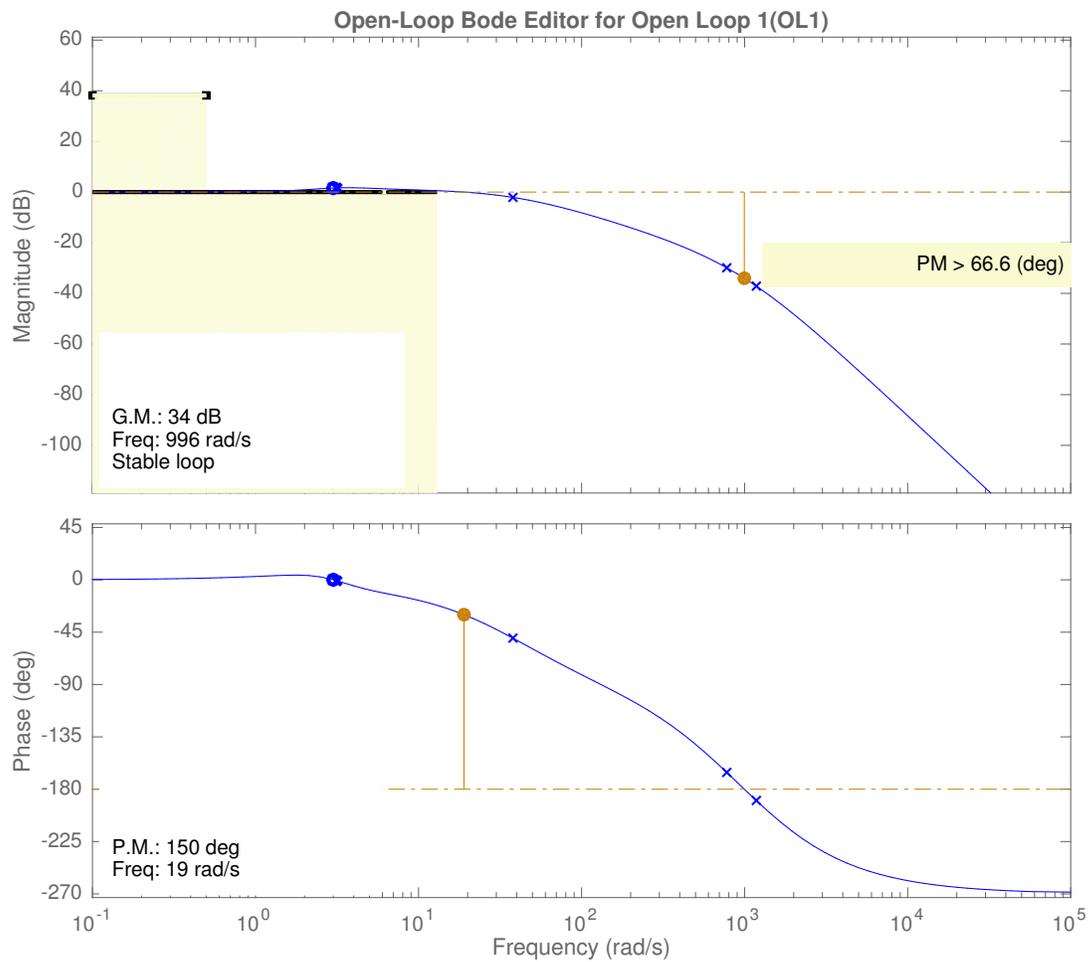


Figura 7: Diagrammi di Bode della f.d.t.  $G_2(s)$  con le specifiche da rispettare.

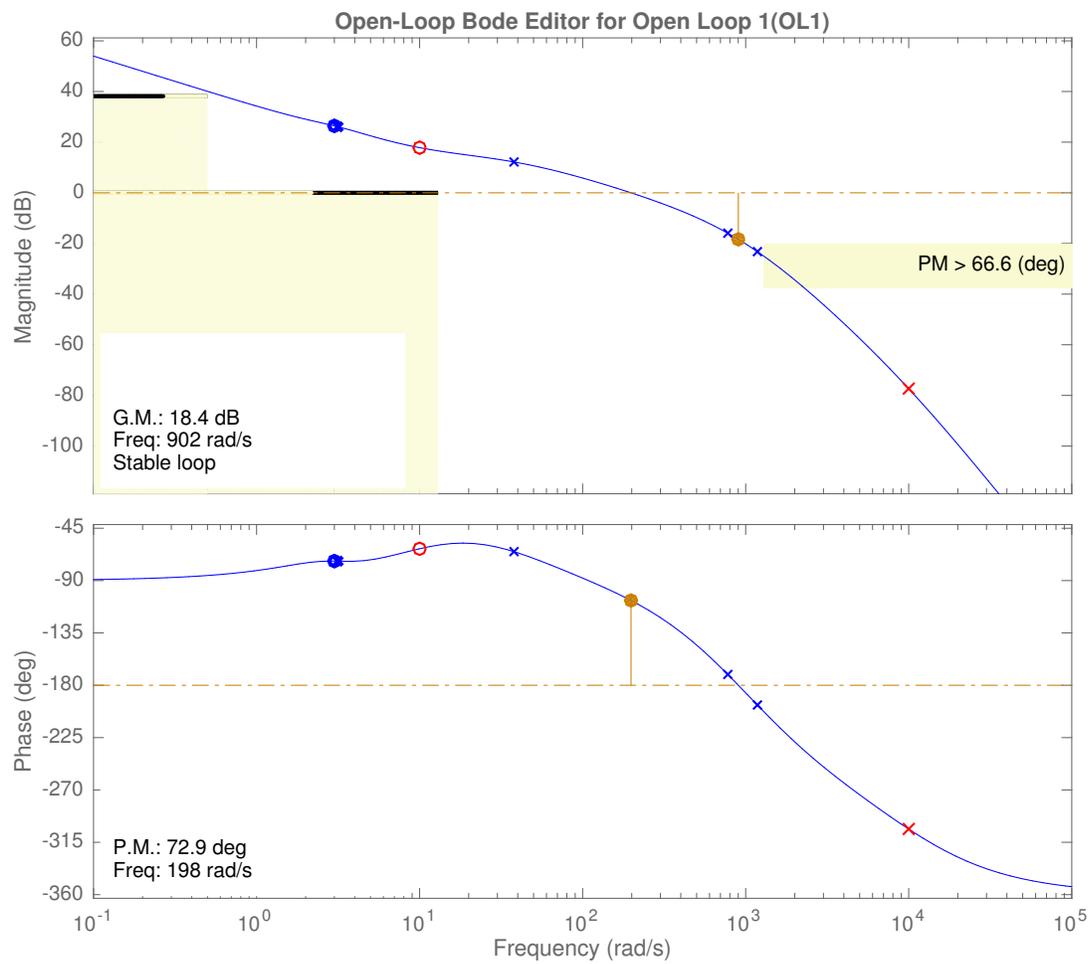


Figura 8: Diagrammi di Bode del sistema in anello chiuso, con le specifiche in evidenza.

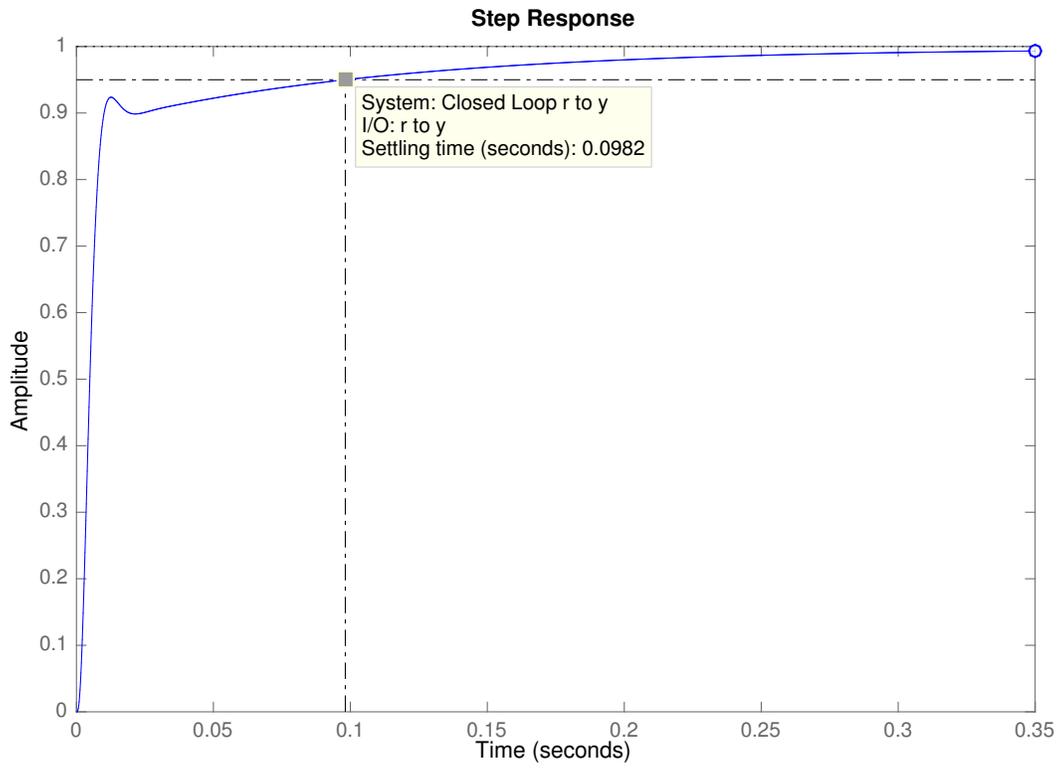


Figura 9: Risposta allo scalino del sistema in anello chiuso.

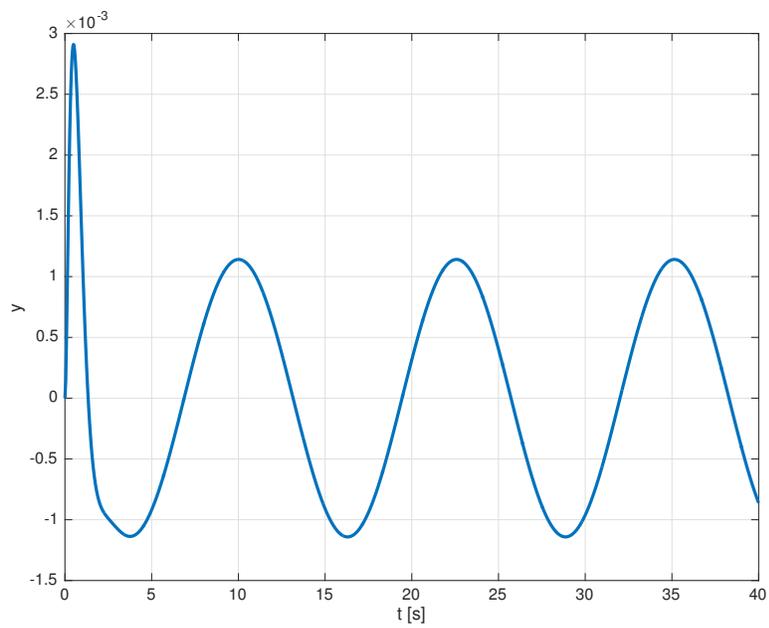


Figura 10: Risposta al disturbo del sistema in anello chiuso.