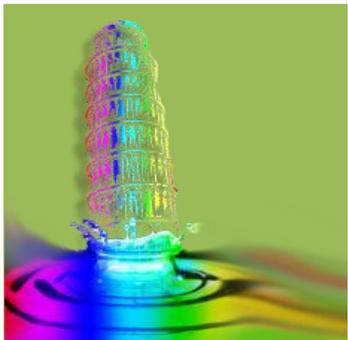




CENTRO E. PIAGGIO
Bioengineering and Robotics Research Center



Fluidodinamica Computazionale

carmelo.demaria@centropiaggio.unipi.it

+ Fluidodinamica Computazionale (CFD)

- CFD è l'analisi dei sistemi che coinvolgono movimento di fluidi, scambio di calore ed i fenomeni a loro relativi, come ad esempio reazioni chimiche, attraverso l'uso di simulazioni tramite computer.



+ Campi di applicazione (1/2)



Ingegneria Industriale:

- Profili alari;
- Profili di flusso intorno ad aerei/auto/navi;
- Scambiatori di calore;
- Reattori chimici;
- Separatori;
- ...

Ambientale:

- Formazione di uragani;
- Dispersione di inquinanti in atmosfera;
- Studio correnti oceaniche;
- ...

+ Campi di applicazione (2/2)



Biologia/Fisiologia:

- Flusso d'aria nei polmoni;
- Flusso sanguigno in arterie/vene;
- Stenosi/Aneurismi
- ...

Organi artificiali:

- Bioreattori;
- Protesi vascolari/valvolari;
- Sistemi di dialisi;
- ...

+ Ipotesi alla base della CFD

- Corpo approssimabile come un CONTINUO:
 - la struttura molecolare della materia ed il movimento delle singole molecole può essere trascurata

$$K_n = \frac{\lambda}{L} \ll 1$$

λ = 'Cammino libero medio' [m]

L = Dimensione caratteristica sistema [m]

K_n = N° di Knudsen

+ Ipotesi alla base della CFD

- PARTICELLA DI FLUIDO: la più piccola porzione di fluido le cui proprietà macroscopiche non sono influenzate da singole molecole;
- PROPRIETA' DEL FLUIDO: funzioni di spazio e tempo (es. $u(x,y,x,t)$);



+ Equazioni di Navier-Stokes

Leggi di conservazione

- La massa del fluido è conservata;
- In una particella di fluido la velocità di variazione della quantità di moto è uguale al totale somma delle forze agenti sulla stessa (*Il legge di Newton*);
- La velocità di variazione di energia interna in una particella di fluido è uguale alla somma della quantità di calore e del lavoro agenti sulla stessa (*Il principio della termodinamica*)



+ Equazioni di Navier-Stokes

Leggi di conservazione

- Conservazione della massa
- Conservazione della quantità di moto
- Conservazione dell'energia





Conservazione della massa

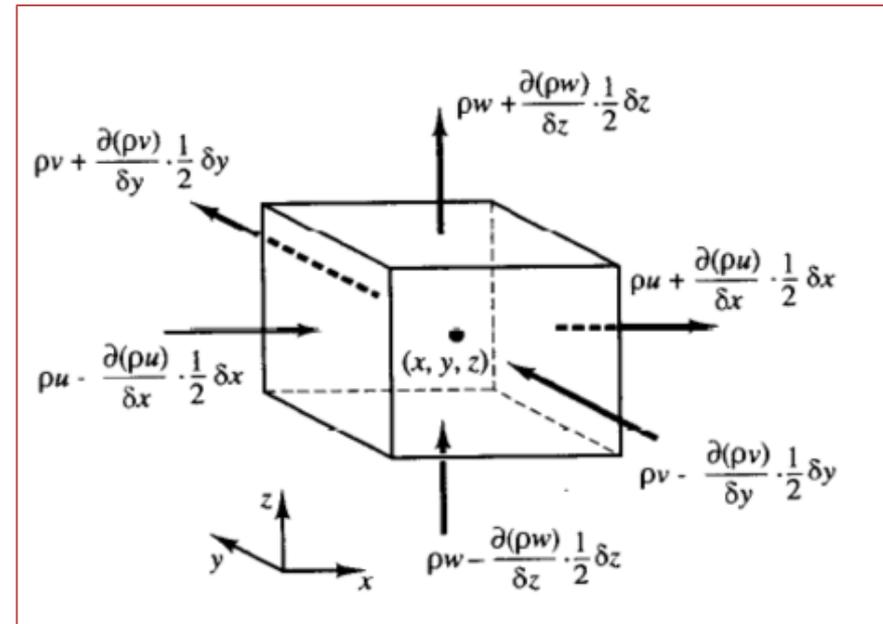


- Variazione di materia in un elemento fluido

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \delta x \delta y \delta z) = \frac{\partial \rho}{\partial t} \delta x \delta y \delta z$$

- Flusso di materia in un elemento fluido

$$\begin{aligned} & \left(\rho u - \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \frac{1}{2} \delta x \right) \delta y \delta z - \left(\rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \frac{1}{2} \delta x \right) \delta y \delta z \\ & + \left(\rho v - \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \frac{1}{2} \delta y \right) \delta x \delta z - \left(\rho v + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \frac{1}{2} \delta y \right) \delta x \delta z \\ & + \left(\rho w - \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \frac{1}{2} \delta z \right) \delta x \delta y - \left(\rho w + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \frac{1}{2} \delta z \right) \delta x \delta y \end{aligned}$$



u, v, w sono le componenti di velocità lungo i versori x, y, z

+ Conservazione della massa

- Fluido generico

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0$$

- Fluido incomprimibile
 - Ipotesi di densità costante

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

+ Come seguo un fluido in movimento?

Approccio Lagrangiano:

- La proprietà ϕ è funzione della posizione e del tempo: $\phi(x(t),y(t),z(t),t)$
- La Derivata Materiale (seguendo singole particelle di fluido):

$$\frac{D\phi}{Dt} = \frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{\partial\phi}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial\phi}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial\phi}{\partial z} \frac{dz}{dt}$$

$$\frac{D\phi}{Dt} = \frac{\partial\phi}{\partial t} + u \frac{\partial\phi}{\partial x} + v \frac{\partial\phi}{\partial y} + w \frac{\partial\phi}{\partial z} = \frac{\partial\phi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{grad} \phi$$

u,v,w sono le componenti di velocità lungo i versori x,y,z

- Ci sono $N \gg 1$ particelle nel vostro fluido!!
- È possibile sviluppare modelli numerici per particelle di fluido (modello Lagrangiano) ma è molto più comune utilizzare approccio Euleriano.

+ Come seguo un fluido in movimento?

Approccio Euleriano:

- Si valuta la variazione della proprietà ϕ in un volume unitario per una particella di fluido;
- Si definisce un volume di controllo infinitesimo e si monitora il campo di ϕ che lo attraversa:

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \text{div}(\rho\phi\mathbf{u}) = \rho \left[\frac{\partial\phi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \text{grad} \phi \right] + \phi \left[\frac{\partial\rho}{\partial t} + \text{div}(\rho\mathbf{u}) \right] = \rho \frac{D\phi}{Dt}$$

Velocità di variazione della proprietà ϕ per elemento fluido

Flusso della proprietà ϕ uscente dall'elemento fluido

Velocità di variazione della proprietà ϕ per una particella di fluido/volume

+ Conservazione della quantità di moto

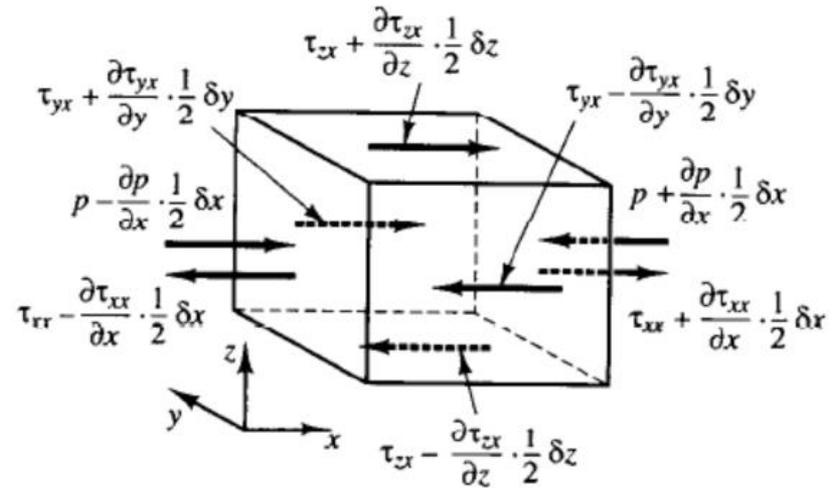
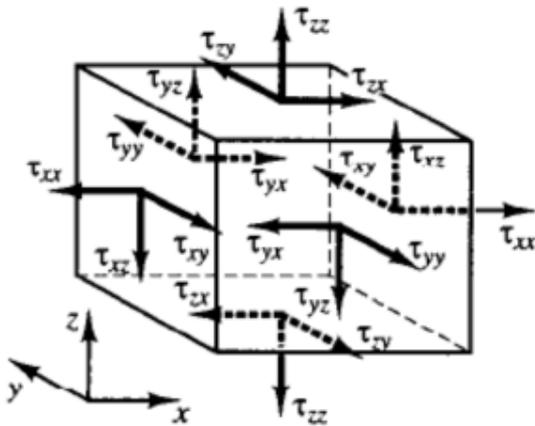
Velocità di variazione della
quantità di moto di una
particella di fluido



Somma delle forze
agenti sulla particella
di fluido

- Forze di Superficie: pressione e sforzo viscoso;
- Forze di Volume: gravità, centrifuga, Coriolis, etc.

τ è stress viscoso (τ_{ij} agisce in
direzione j sulla faccia di normale i)



Nota: mentre τ è un vettore, p è scalare.

+ Conservazione della quantità di moto

QM lungo x	u	$\rho \frac{Du}{Dt}$	$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \text{div}(\rho u \mathbf{u})$
QM lungo y	v	$\rho \frac{Dv}{Dt}$	$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \text{div}(\rho v \mathbf{u})$
QM lungo z	w	$\rho \frac{Dw}{Dt}$	$\frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \text{div}(\rho w \mathbf{u})$

Su testi anglosassoni la Quantità di Moto è indicata come **Momentum**.

+ Conservazione della quantità di moto

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \frac{\partial(-p + \tau_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z} + S_{Mx}$$

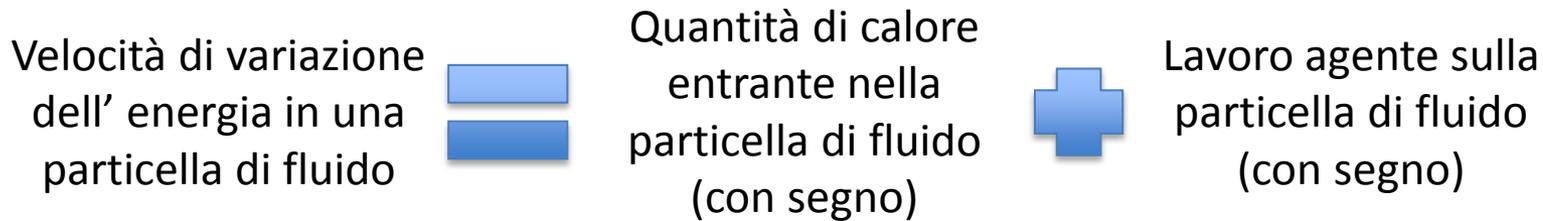
$$\rho \frac{Dv}{Dt} = \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial(-p + \tau_{yy})}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z} + S_{My}$$

$$\rho \frac{Dw}{Dt} = \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial(-p + \tau_{zz})}{\partial z} + S_{Mz}$$

Sorgenti di
quantità di moto



+ Conservazione dell'energia



- Velocità di variazione dell'energia in una particella di fluido

$$\rho \frac{DE}{Dt} = \frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \text{div}(\rho E \mathbf{u})$$



Conservazione dell'energia



- Lavoro fatto dalle forze superficiali
- Calore totale entrante/uscente in una particella di fluido per unità di volume data da *conduzione*.

$$-\frac{\partial q_x}{\partial x} - \frac{\partial q_y}{\partial y} - \frac{\partial q_z}{\partial z} = -\text{div } \mathbf{q} \quad \boxed{-\text{div } \mathbf{q} = \text{div}(k \text{ grad } T)}$$

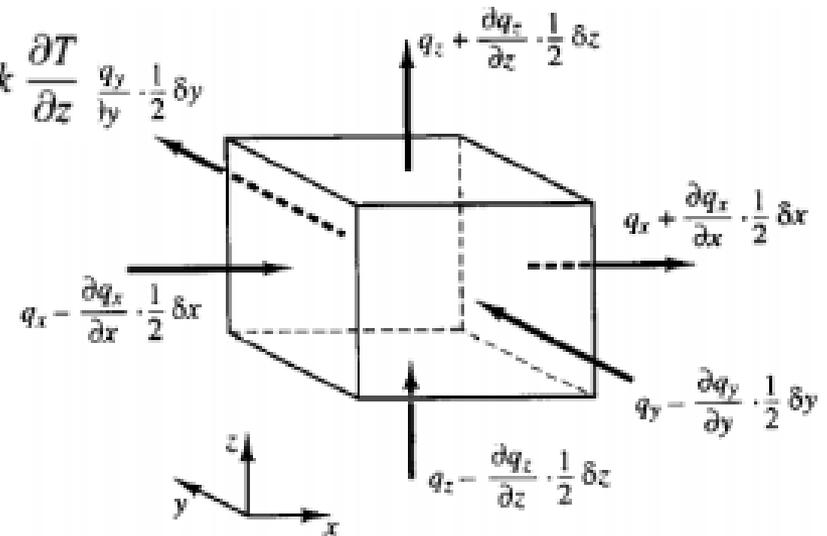
- Legge di Fourier

$$q_x = -k \frac{\partial T}{\partial x}$$

$$q_y = -k \frac{\partial T}{\partial y}$$

$$q_z = -k \frac{\partial T}{\partial z}$$

$$\mathbf{q} = -k \text{ grad } T$$



- Energia interna (I)

+ Equazioni vs incognite

- 5 EQUAZIONI

- Continuità (1)
- Quantità di Moto (3)
- Energia (1)

- 11 INCOGNITE

- 2 Variabili Termodinamiche, in quanto ρ , p , l e T sono legate da equazioni di stato

$$p=p(\rho,T) \quad i=i(\rho,T)$$

- Velocità (3)
- Sforzi viscosi (6)

- Liquidi e gas a basse velocità di solito si comportano come fluidi incomprimibili: senza variazioni di densità non c'è un legame fra equazione dell'energia interna e le conservazioni di massa e quantità di moto. Per risolvere il campo di moto fluido basta risolvere solo le equazioni per massa e quantità di moto.

- Si usa N° di Mach

$$Ma = v/v_{\text{suono}}$$

se $Ma < 0.2$ si considera incomprimibile.

+ Sforzi viscosi

- Gli sforzi viscosi τ_{ij} possono essere espressi in funzione della velocità di deformazione locale (strain rate);
- Tutti i gas e molti liquidi hanno comportamento isotropo;
- La velocità di deformazione di un elemento fluido ha 9 componenti in 3D, di cui 6 sono indipendenti fra loro in caso di isotropia.
- 3 componenti indicano deformazione lungo assi principali

$$e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad e_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad e_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}$$

- 6 componenti indicano deformazione lungo piani di taglio

$$e_{xy} = e_{yx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad e_{xz} = e_{zx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$
$$e_{yz} = e_{zy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)$$

- Deformazione volumetrica

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \text{div } \mathbf{u}$$

+ Sforzi viscosi

- In un fluido Newtoniano gli stress viscosi sono proporzionali al gradiente di deformazione del fluido:

$$\begin{aligned}\tau_{xx} &= 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \operatorname{div} \mathbf{u} & \tau_{yy} &= 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} + \lambda \operatorname{div} \mathbf{u} & \tau_{zz} &= 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} + \lambda \operatorname{div} \mathbf{u} \\ \tau_{xy} &= \tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \tau_{xz} &= \tau_{zx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \tau_{yz} &= \tau_{zy} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)\end{aligned}\quad (2.31)$$

- La prima viscosità (Dinamica) μ lega gli sforzi viscosi al gradiente di deformazione
- La seconda viscosità λ lega gli sforzi alla deformazione volumetrica

$$\text{Gas } \lambda = -\frac{2}{3}\mu$$

$$\text{Liquido } \operatorname{div} \mathbf{u} = 0$$

+ Equazioni di Navier-Stokes

- Massa $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{u}) = 0$
- QM $\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \text{div}(\rho u \mathbf{u}) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \text{div}(\mu \text{grad } u) + S_{Mx}$
 $\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \text{div}(\rho v \mathbf{u}) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \text{div}(\mu \text{grad } v) + S_{My}$
 $\frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \text{div}(\rho w \mathbf{u}) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \text{div}(\mu \text{grad } w) + S_{Mz}$
- Energia $\frac{\partial(\rho i)}{\partial t} + \text{div}(\rho i \mathbf{u}) = -p \text{div } \mathbf{u} + \text{div}(k \text{grad } T) + \Phi + S_i$
- Equazioni di stato $p = p(\rho, T)$ and $i = i(\rho, T)$
e.g. perfect gas
 $p = \rho RT$ and $i = C_v T$

+ Casi di studio nel corso

Conservazione Massa, fluido incomprimibile, forma compatta

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0$$

Conservazione QM, fluido incomprimibile, forma compatta

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = \vec{g} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \vec{V}$$

Energia, fluido incomprimibile non dissipativo, forma compatta
(trasporto di calore per via convettiva)

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) T = \frac{k}{\rho c_p} \Delta T$$

+ Numero di Reynolds

Determina il regime di flusso del problema:

- Laminare
- Turbolento

$$Re = \frac{\rho v D}{\mu}$$

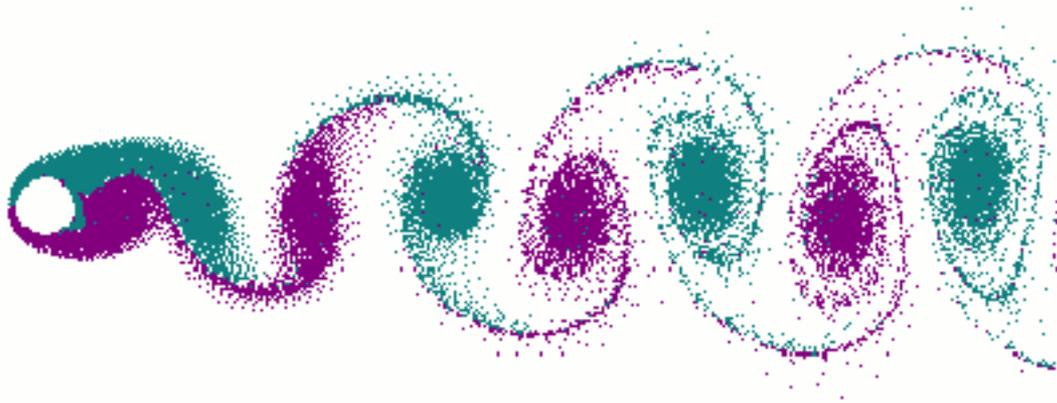
v = velocità caratteristica fluido

D = diametro idraulico condotto

$$= 4A/P$$

+ Vortici e turbolenza

- Presenza di Vortici **NON** implica Turbolenza!!!
- Turbolenza caratterizzata da vortici



Es. Vortici di Van Karman, in regime Laminare

+ Perché vortici?

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = \vec{g} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \vec{V}$$

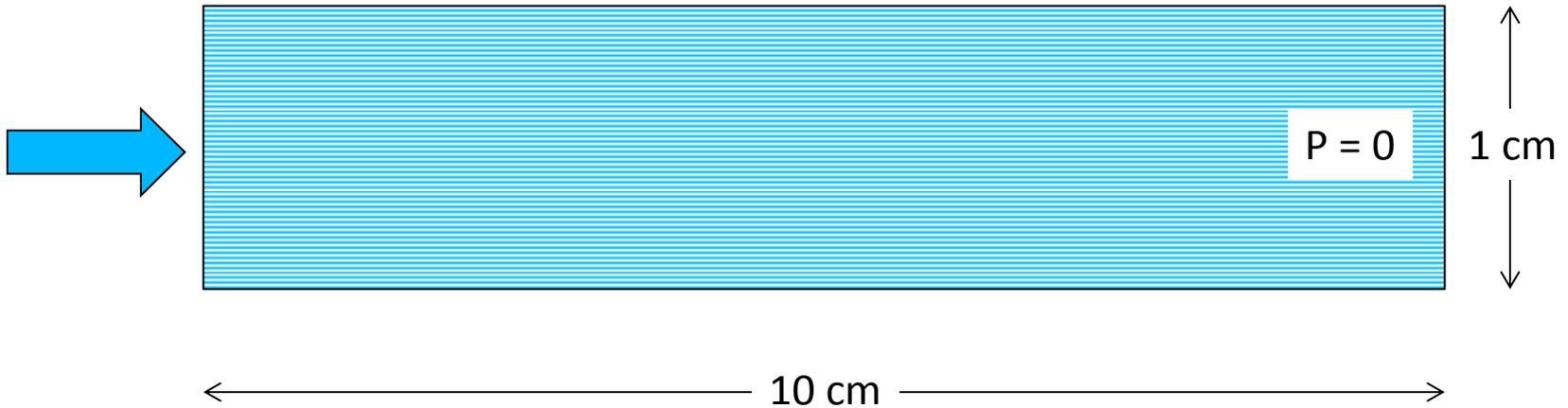
Termine NON LINEARE nell'equazione!!

È necessaria quindi particolare attenzione quando si risolve Navier Stokes, in particolare per Reynolds alti !!!

ESERCIZI

+ Esercizio 1

$V_{in} = \text{\#matricola}/1000$



Variare:

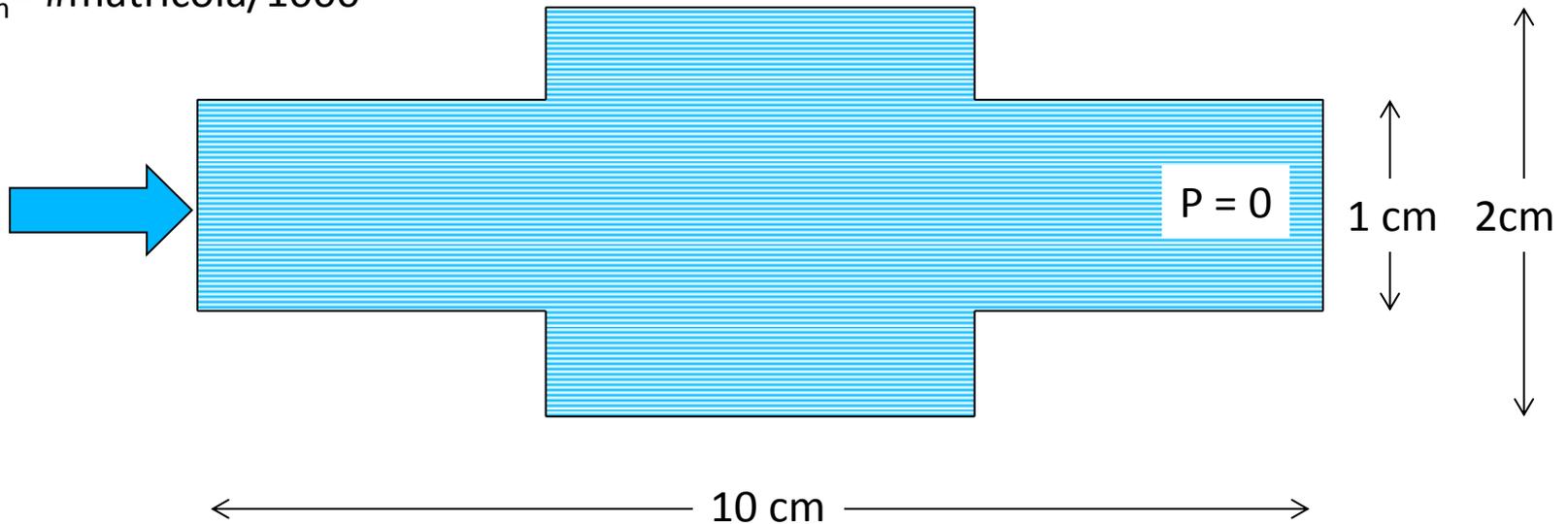
- Il grado della funzione forma (lineare, quadratica, cubica)
- La finitura della mesh (rada, normale, fine)
- Confrontare il profilo di velocità con la soluzione analitica di un flusso tra due piastre parallele distanti $2h$ (con caduta di pressione lineare):

$$u(y) = \frac{h^2}{2n} \left(\frac{DP}{DL} \right) \left(1 - \frac{y^2}{h^2} \right)$$

+ Esercizio 2 (1/2)



$$V_{in} = \#matricola/1000$$



- Valutare il profilo di velocità e di perdita di carico e metterlo in relazione con l'equazione di Bernoulli

+ Esercizio 2 (2/2)

