Teoria dei Sistemi — 24-07-2015

A Si consideri il sistema dinamico lineare rappresentato dalla seguente funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{10}{(s^2 + 1.2s + 1)}. \tag{1}$$

A.1 Si disegni qualitativamente la risposta al gradino riportandone le caratteristiche principali e commentando i risultati ottenuti.

A.2 Data la risposta al gradino riportata in figura 1, si discuta come è modificata la funzione di trasferimento a partire dalla $G(s)$ in (1).

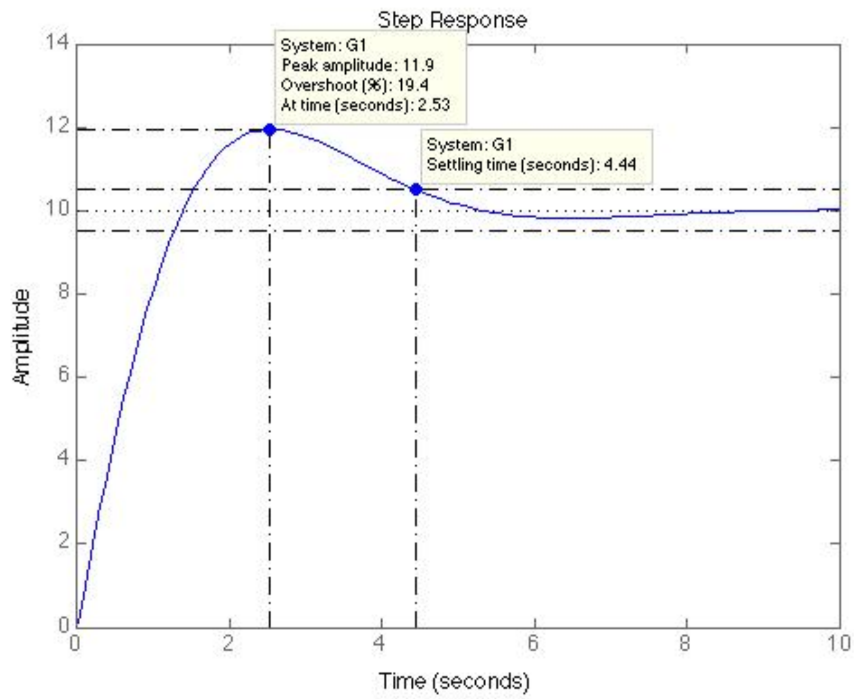

Figura 1: Risposta al gradino.

B Si consideri il sistema dinamico lineare rappresentato dalla seguente funzione di trasferimento

$$G(s) = -10^{-1}\frac{s - 10}{100s^2 + 10s + 1} \tag{2}$$

B.1 Si disegnino i diagrammi di Bode e i luoghi delle radici del sistema.

B.2 Si supponga di retroazionare il sistema con un regolatore integrale $C(s) = \frac{k}{s}$. Determinare i valori di k reali per cui il sistema in ciclo chiuso è stabile.

B.3 Si determini, se possibile, un valore k positivo della costante di guadagno del regolatore affinché il margine di guadagno del sistema sia almeno 20dB e determinare il margine di fase corrispondente.

B.4 Modificare il controllore della domanda B.2 affinché la specifica sul margine di ampiezza sia verificata con una pulsazione di taglio aumentata di un fattore 20 rispetto a quella ottenuta al punto B.3.

C.1 Risolvere l'equazione differenziale $\ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) + 5y(t) = 2u(t)$ con $y(0) = \dot{y}(0) = 0$ e $u(t) = H(t)$ e commentare i risultati ottenuti.

C.2 Determinare i modi del sistema.

Soluzione

A.1 Il sistema dinamico è caratterizzato da una costante di guadagno statica pari a 10 e una coppia di poli complessi coniugati con pulsazione naturale $\omega_n = 1$ e smorzamento $\delta = 0.6$.

Dal teorema del valore iniziale si ottiene che avendo il sistema una differenza poli-zeri pari a 2, la risposta al gradino parte dall'origine con pendenza nulla. Dal teorema del valore finale invece si ha che il valore a regime della risposta al gradino è pari a 10. Si avrà poi un andamento oscillatorio nel transitorio dovuto alla presenza dei poli complessi. La sovraelongazione è di circa il 10% e il tempo di assestamento $T_a = \frac{3}{\omega_n \delta} = 5$sec. Il periodo dell'oscillazione è pari a $T = \frac{2\pi}{\omega}$ con $\omega = 0.8$ parte immaginaria dei poli. Pertanto $T = 7.8$sec. In figura 2 è riportato l'andamento della risposta al gradino e si possono verificare le caratteristiche ottenute.

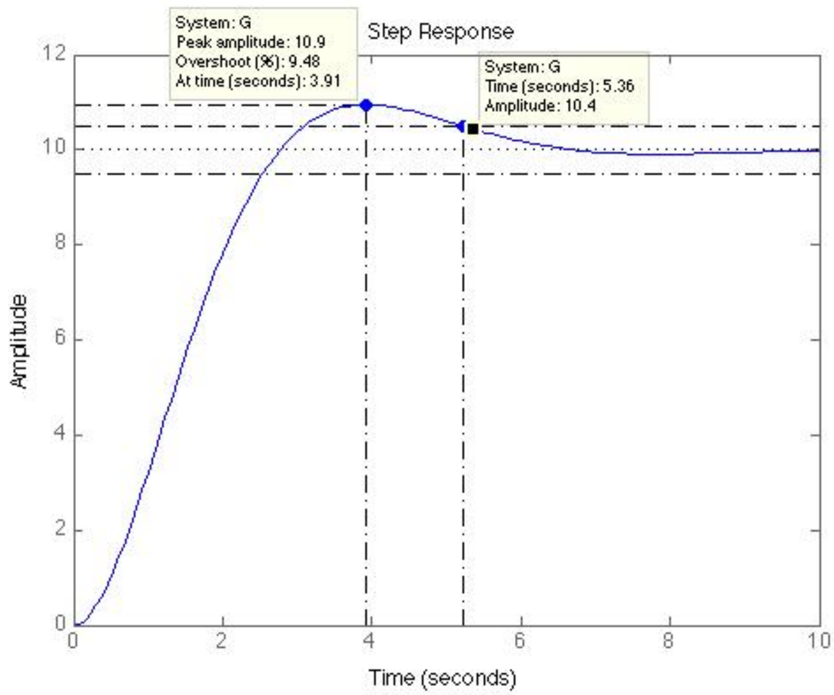

Figura 2: Risposta al gradino di $G(s)$.

A.2 Dalla figura 1 si nota che l'andamento è simile a quello ottenuto per $G(s)$. Ad esempio hanno lo stesso valore a regime. Le differenze stanno nel valore iniziale della derivata della risposta al gradino, nel valore della sovraelongazione (più elevato e anticipato nel tempo) e nel minor tempo di assestamento. Tale andamento indica quindi la presenza di uno zero a parte reale negativa nel sistema. Infatti il valore iniziale della derivata ha segno concorde con il valore a regime. Non essendo cambiato il valore a regime della riposta al gradino si può supporre che la funzione di trasferimento è stata modificata considerando uno zero in -1.

B.1 Facendo riferimento alla figura 3, la funzione di trasferimento presenta un guadagno statico pari a $K = 1$ (contributo di 0db in ampiezza e zero in fase), uno zero a parte reale positiva in 10 (contributo riportato in blu) e una coppia di poli complessi coniugati con pulsazione naturale $\omega_n = 10^{-2}$ e smorzamento $\delta = \frac{1}{2}$ (contributo riportato in verde). I diagrammi di Bode asintotici sono riportati in figura 3 in nero. I diagrammi reali sono bene approssimati da quelli asintotici e nell'immagine sono sovrapposti.

I luoghi delle radici sono infine riportati in figura 4. Si noti si hanno due punti di biforcazione nei luoghi soluzione dell'equazione $-10s^2 - 200s - 9.9 = 0$ ovvero in 20.05 e -0.05.

B.2 Utilizzando il criterio di Routh è possibile determinare i valori di k reali tali per cui il sistema retroazionato con un regolatore integrale $C(s) = \frac{k}{s}$ sia stabile. Il denominatore della funzione di trasferimento in anello chiuso risulta infatti: $100s^3 + 10s^2 + s - \frac{k}{10}s + k$. La tabella di Routh risulta:

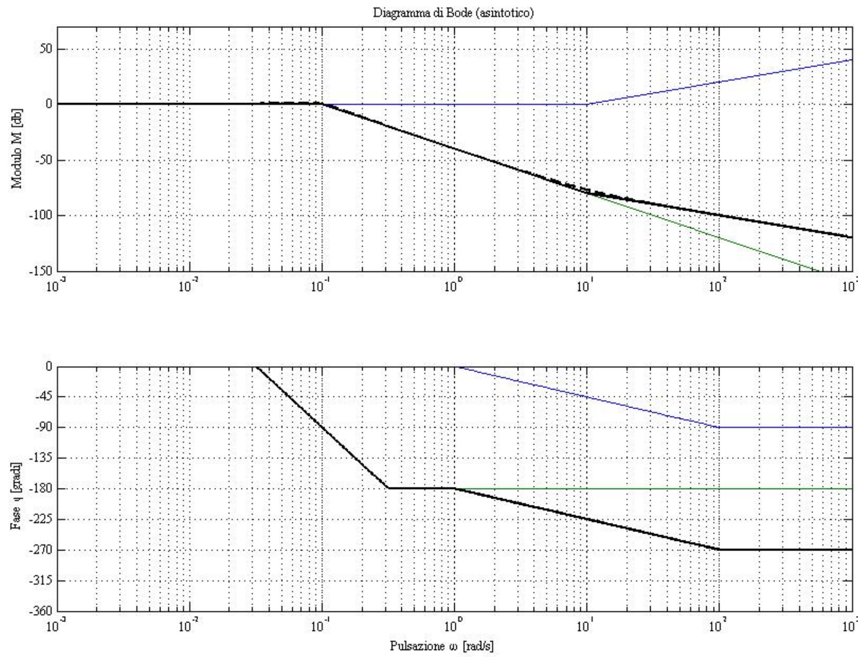

Figura 3: Diagrammi di Bode asintotici del sistema con i vari contributi.

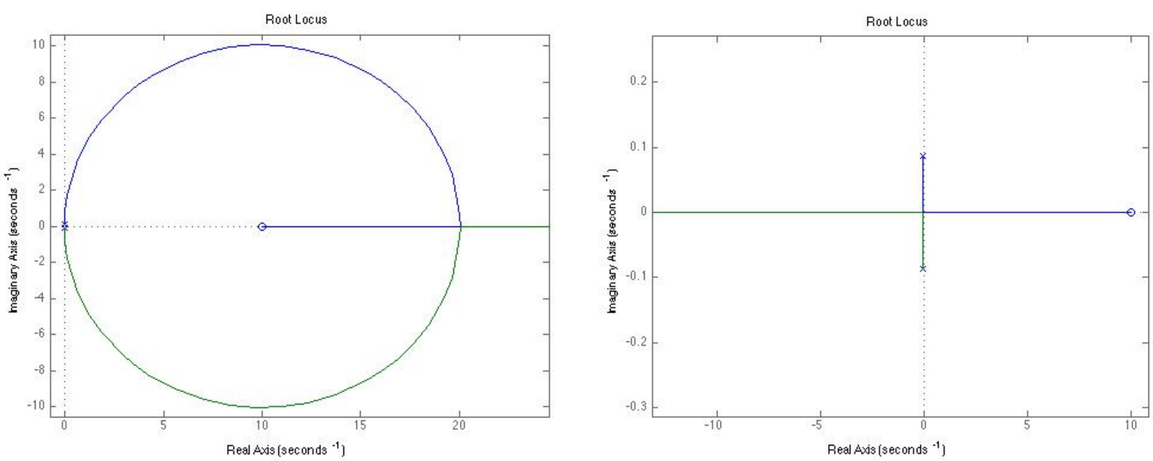

Figura 4: Luogo delle radici per $K > 0$ e $K < 0$.

$$\begin{array}{cc}
100 & 1-\frac{k}{10} \\
10 & k \\
a & 0 \\
k & 0
\end{array}$$

con $a = -\frac{1}{10}(101k - 10)$. Affinché il sistema sia asintoticamente stabile la prima colonna della tabella non deve avere cambi di segno. Si deve quindi avere $101k - 10 < 0$ e $k > 0$ da cui: $0 < k < 0.099$. Dal luogo delle radici infatti si può notare che l'inserimento di un polo nell'origine porta a richiedere $k > 0$ altrimenti si avrebbe un ramo totalmente giacente sull'asse reale positivo.

B.3 I diagrammi di bode una volta inserito un polo nell'origine (quindi considerando $k = 1$) sono riportati in figura 5.

Rispetto ai diagrammi asintotici di figura 3, inserendo un polo nell'origine del controllore si ha una diminuzione di $-\pi/2$ nel diagramma delle fasi per ogni pulsazione e un contributo di -20db/dec in ampiezza. Si ottiene quindi facilmente che la pulsazione in cui il diagramma delle fasi attraversa il valore $-\pi$ è pari a 0.1rad/sec. Inoltre, l'ampiezza corrispondente a tale pulsazione vale circa $-20 + 20 Log k$db e pertanto, per avere un margine di guadagno di almeno 20db, la costante di guadagno deve essere pari

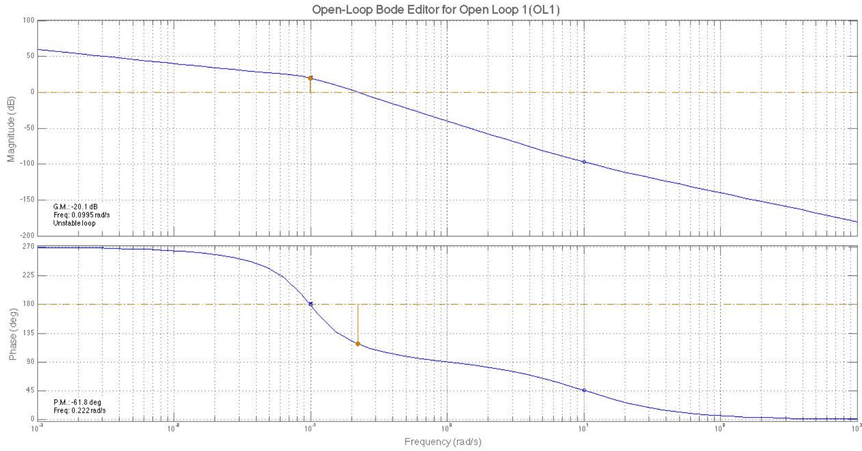

Figura 5: Diagrammi di Bode asintotici del sistema con controllore $C(s) = \frac{1}{s}$.

a 10^{-2}. Abbassando il diagramma delle ampiezze di circa 40db si ha che la pulsazione di taglio si sposta fino ad un valore pari a 0.01rad/sec infatti a quella pulsazione il contributo del controllore portava ad avere ampiezza pari a $40 + 20Logk$db.

B.4 Per aumentare la pulsazione di taglio fino a 0.2rad/sec senza diminuire il margine di ampiezza (ma ovviamente modiciando il margine di fase) è possibile inserire una rete anticipatrice con uno zero in bassa frequenza e un polo più in alta frequenza. Ad esempio con un controllore del tipo $C(s) = 0.01\frac{590s+1}{0.029s+1}$ si ottengono i diagrammi di Bode in figura 6 dove si nota che la pulsazione di taglio è pari a 0.252rad/sec e il margine di ampiezza è pari a 22db.

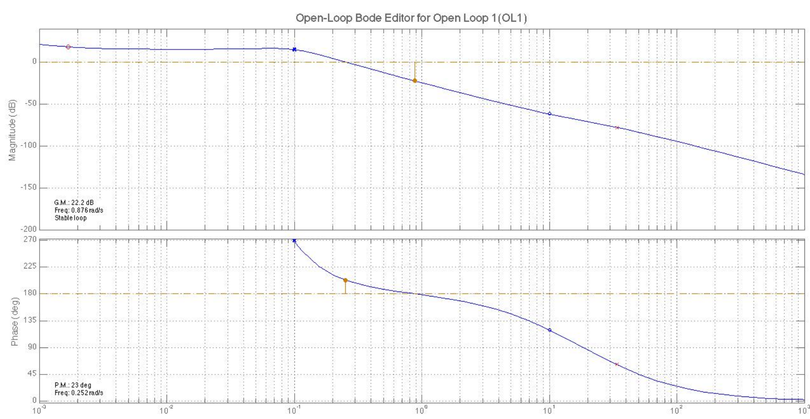

Figura 6: Diagrammi di Bode asintotici del sistema con controllore $C(s) = 0.01\frac{590s+1}{0.029s+1}$.

C.1 Applicando la trasformata di Laplace all'equazione differenziale si ottiene $Y(s) = \frac{2}{s(s^2+2s+5)}$ in cui si nota il polo nell'origine dovuto all'ingresso a gradino e la presenza di una coppia di poli complessi in $-1 \pm 2j$. Per decomporre in fratti semplici si considera $Y(s) = \frac{a}{s} + \frac{b(s+1)}{(s+1)^2+2^2} + \frac{c2}{(s+1)^2+2^2}$ da cui si ottiene $a = \frac{2}{5}$, $b = -\frac{2}{5}$ e $c = -\frac{1}{5}$ da cui antitrasformando si ha che la soluzione dell'equazione differenziale risulta: $y(t) = \frac{2}{5}H(t) - \frac{2}{5}e^{-t}\cos(2t) - \frac{1}{5}e^{-t}\sin(2t)$.

C.2 La funzione di trasferimento si ottiene dalla $Y(s)$ e dividendo per il contributo dell'ingresso pari a $\frac{2}{s}$. Pertanto si ha $G(s) = \frac{1}{s^2+2s+5}$ i cui poli sono $-1 \pm 2j$ quindi i modi del sistema sono $e^{-t}\cos(2t)$ e $e^{-t}\sin(2t)$.