

**A** Si consideri l'evoluzione libera del sistema LTITC in forma di stato

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \tag{1}$$

rappresentato dalle seguenti matrici:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \tag{2}$$

$$C = [1 \quad 0 \quad 1]. \tag{3}$$

Si determinino, se possibile, le condizioni iniziali del sistema affinché l'evoluzione libera sia del tipo:

a)  $2e^{-2t}$ , b)  $te^{-2t}$ , c)  $e^{-t} \cos t$ , d)  $te^{-t} \cos t$ , e)  $e^{-t} \cos 2t$ .

**B.1** Data la seguente funzione di trasferimento

$$G(s) = -7500 \frac{(s + 12)}{(s + 30)(s^2 + 30s + 300)}$$

si riportino i seguenti diagrammi

- Diagrammi di Bode
- Diagramma di Nyquist
- Luogo delle Radici (diretto e inverso)

**B.2** In base ai diagrammi riportati determinare la stabilità del sistema in anello chiuso con retroazione unitaria. Determinare, dai diagrammi di Bode o Nyquist, una approssimazione del più piccolo valore di  $K$  tale per cui il sistema in anello chiuso con retroazione  $K$  sia asintoticamente stabile.

**B.3** Progettare un controllore che renda il sistema in anello chiuso asintoticamente stabile e tale per cui l'errore al gradino sia nullo, il tempo di assestamento (al 5%) sia minore di 4sec e l'evoluzione non superi il valore a regime per più del 10% del suo valore.

**B.4** Determinare se esiste un ingresso permanente, della forma  $u(t) = e^{\lambda t}$  tale per cui l'andamento a regime del sistema in anello chiuso sia nulla.

**C** Si consideri il sistema tempo continuo non lineare

$$\begin{cases} \dot{z} &= z + \pi + u \cos z \\ \dot{\theta} &= -\theta + \theta z \\ y &= -\frac{z^2}{4} + \theta \end{cases}$$

Per  $u = 0$  trovare gli equilibri del sistema e determinare la forma di stato del linearizzato intorno all'equilibrio. Si determini la funzione di trasferimento del sistema linearizzato tra l'ingresso  $u$  e l'uscita  $y$ .

## Soluzione

**A** La matrice dinamica  $A$  é in forma di Jordan reale e ha un autovalore reale,  $\lambda_1 = -2$  e una coppia di autovalori complessi  $\lambda_{2,3} = -1 \pm j$  con molteplicitá 1 pertanto non é possibile vedere una evoluzione libera di questo sistema con un andamento di tipo b) e d). Gli autovalori complessi sono associati a modi del tipo  $e^{-t} \cos t$  e  $e^{-t} \sin t$  quindi l'andamento e) non é possibile.

L'esponenziale della matrice risulta

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} \cos t & e^{-t} \sin t \\ 0 & -e^{-t} \sin t & e^{-t} \cos t \end{bmatrix} \quad (4)$$

mentre

$$Ce^{At} = [e^{-2t} \quad -e^{-t} \sin t \quad e^{-t} \cos]. \quad (5)$$

L'evoluzione libera é infine data da

$$Ce^{At}x(0) = e^{-2t}x_1(0) - e^{-t} \sin tx_2(0) + e^{-t} \cos x_3(0). \quad (6)$$

L'andamento di tipo a) si ottiene a partire da condizioni iniziali  $x(0) = [2 \ 0 \ 0]^T$  mentre l'andamento c) per  $x(0) = [0 \ 0 \ 1]^T$ .

**B.1** Il sistema é asintoticamente stabile, ha un guadagno statico pari a  $-10$ , uno zero in  $-12$ , un polo reale in  $-30$  e due poli complessi in  $-15 \pm j5\sqrt{3}$  ( $\omega_n = 10\sqrt{3} = 17.32$ ). I diagrammi di Bode, Nyquist e i luoghi delle radici per  $K > 0$  e  $K < 0$  sono riportati nelle seguenti figure.

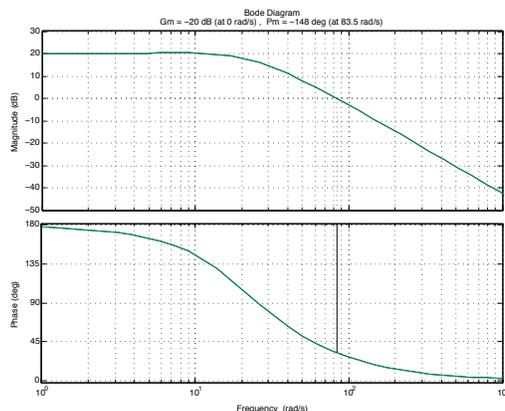


Figura 1: Diagrammi di Bode del sistema.

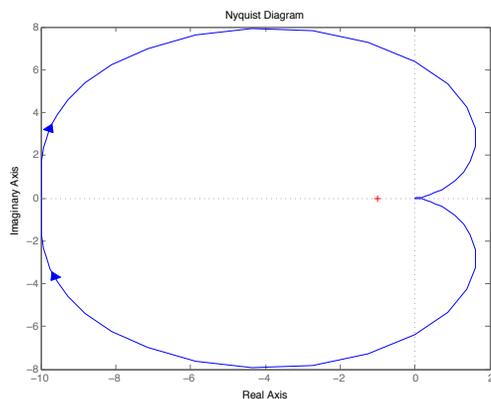


Figura 2: Diagramma di Nyquist del sistema.

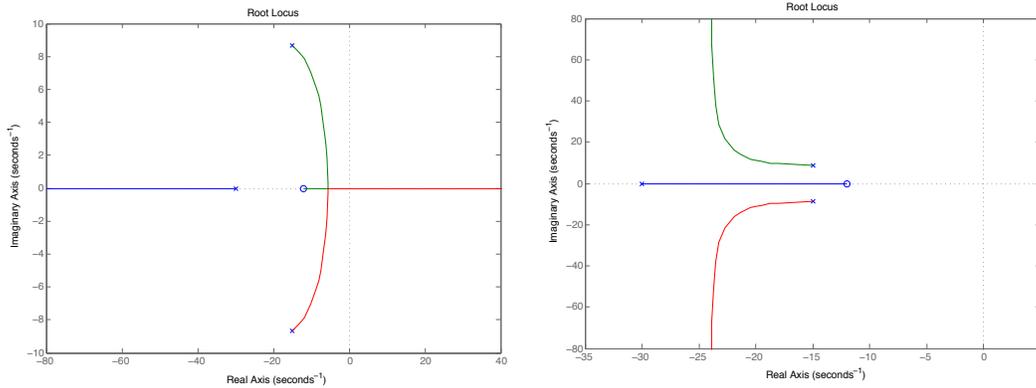


Figura 3: Luogo delle radici per  $K > 0$  e  $K < 0$ .

**B.2** Dal diagramma delle ampiezze si vede che tramite una retroazione unitaria il diagramma delle ampiezze ha valore positivo (circa 20db) in corrispondenza ad una fase di  $-\pi$  (per pulsazione nulla  $\omega = 0$ ). Questo indica che il diagramma di Nyquist (come si vede dal Diagramma stesso) circonda il punto  $-1$  mentre il sistema in anello aperto ha 0 poli instabili. Pertanto per il criterio di Nyquist il sistema in anello chiuso con retroazione unitaria é instabile. Dai diagrammi di Bode si nota anche un margine di fase negativo. Una approssimazione del piú piccolo valore di  $K$  tale per cui il sistema in anello chiuso con retroazione  $K$  sia asintoticamente stabile corrisponde al calcolo del valore delle ampiezze in corrispondenza alla fase di  $-\pi$  e quindi  $K = 0.1$  é il valore richiesto. Per  $K < 0.1$  il sistema in anello chiuso sará asintoticamente stabile.

**B.3** Affinché il sistema in anello chiuso abbia un errore nullo a regime é necessario inserire un polo nell'origine nel controllore in quanto il sistema non ne possiede. La richiesta sul tempo di assestamento e sulla sovralongazione suggeriscono una approssimazione al secondo ordine e richiedono un margine di fase di 60gradi ( $\delta = 0.6$ ) e una pulsazione di taglio maggiore di 1.25rad/sec.

In Figura 4 sono riportate le specifiche sul diagramma di Bode.

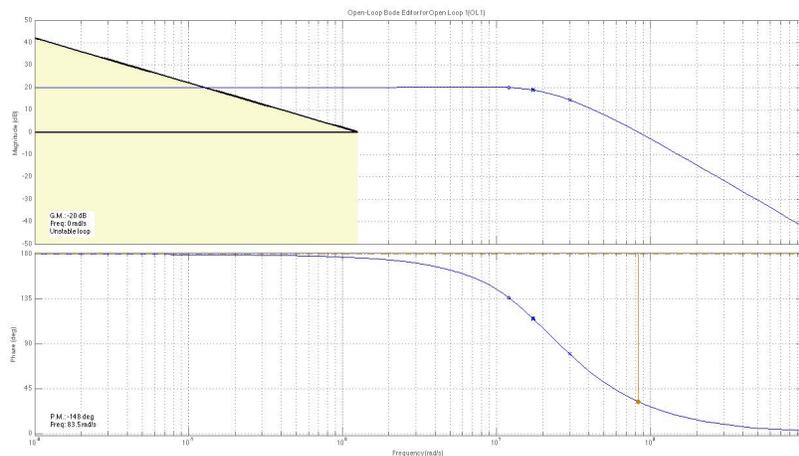


Figura 4: Diagrammi di Bode con specifiche di progetto.

Una volta inserito il polo nell'origine nel controllore i diagrammi di Bode ottenuti sono riportati in Figura 5. Si puó notare che la fase parte da  $-\frac{3}{2}\pi$  a causa del guadagno statico negativo e del polo nell'origine. Questo rende quindi necessario un aumento della fase per avere un margine di fase positivo. Tale aumento si puó

ottenere scegliendo per il controllore una costante negativa. Per un controllore della forma  $C(s) = -\frac{1}{s}$  i diagrammi di bode dell'anello aperto sono riportati in Figura 6.

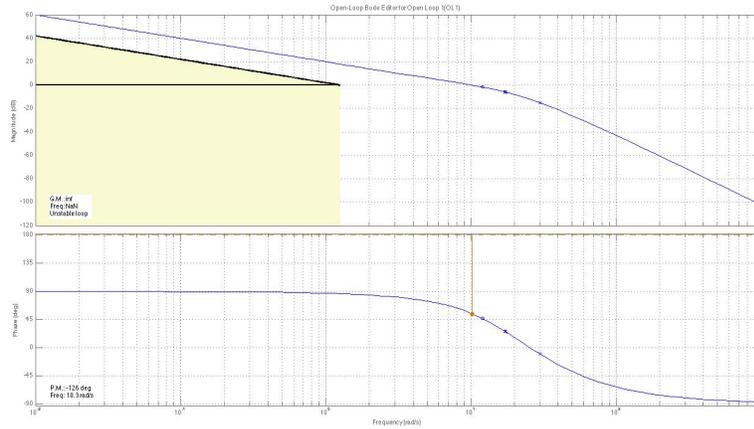


Figura 5: Diagrammi di Bode con un polo nell'origine del controllore.

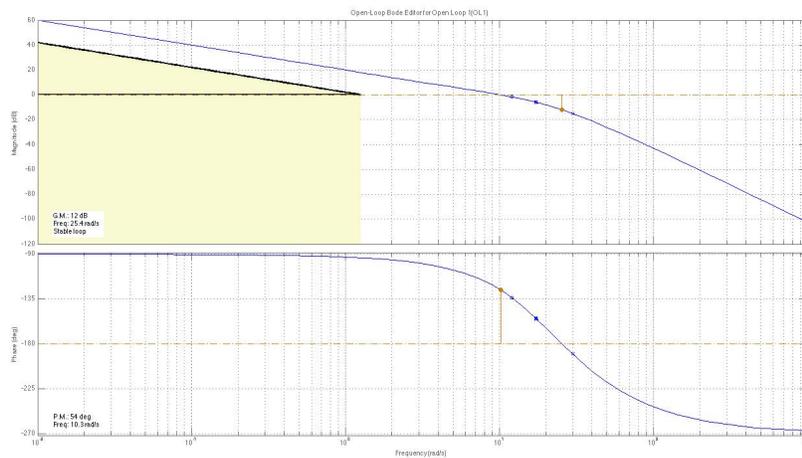


Figura 6: Diagrammi di Bode dell'anello con  $C(s) = -\frac{1}{s}$ .

Si é ottenuto cosí un margine di fase di 54gradi, per aumentarlo oltre i 60gradi richiesti é sufficiente abbassare il guadagno del controllore. Ad esempio scegliendo un controllore della forma  $C(s) = -\frac{0.2}{s}$  i diagrammi di bode dell'anello aperto sono riportati in Figura 7. La scelta di un guadagno statico del controllore piú basso del necessario é per allontanare la pulsazione di taglio dalle singolaritá del sistema (in particolare lo zero in  $-12$ ). Con questa scelta del controllore si ha un margine di fase di circa 84gradi. La risposta al gradino del sistema controllato é riportata in Figura 8.

**B.4** Si noti che il sistema in anello chiuso possiede gli stessi zeri dell'anello aperto (a meno di cancellazioni). Non avendo inserito nel controllore zeri a parte reale positiva e non essendocene nel sistema originale, non esistono ingressi permanenti che hanno andamento nullo a regime.

**C** Gli equilibri del sistema si calcolano ponendo  $\ddot{z} = \dot{z} = \dot{\theta} = u = 0$  da cui segue

$$\begin{cases} 0 &= z + \pi \\ 0 &= -\theta + \theta z \end{cases}$$

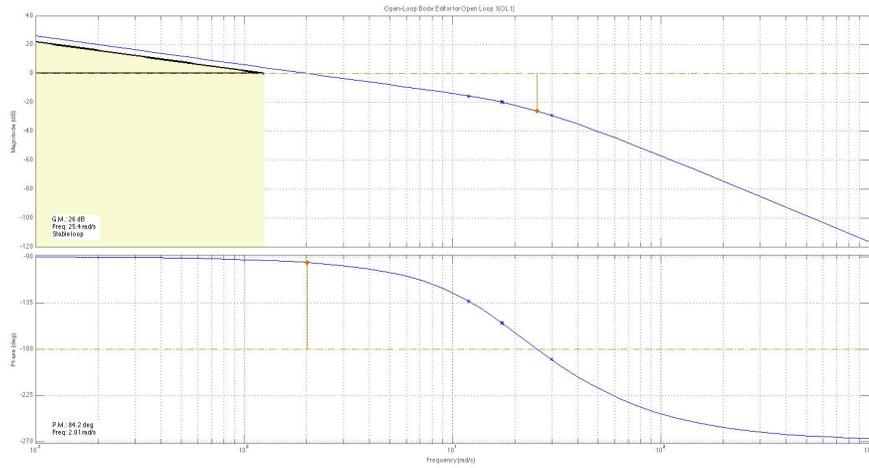


Figura 7: Diagrammi di Bode dell'anello con  $C(s) = -\frac{0.2}{s}$ .

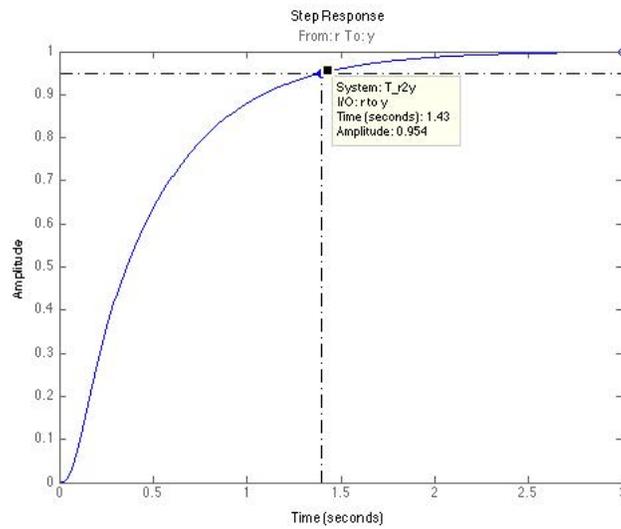


Figura 8: Risposta al gradino del sistema controllato.

e corrispondono a  $\bar{z} = -\pi$  e  $\bar{\theta} = 0$ . Si consideri lo stato  $x_1 = z$ ,  $x_2 = \dot{z}$ ,  $x_3 = \theta$  il sistema non lineare risulta:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 + \pi + u \cos x_1 \\ \dot{x}_3 = -x_3 + x_3 x_1 \\ y = -\frac{x_1^2}{4} + x_3 \end{cases}$$

Il sistema linearizzato nell'equilibrio é caratterizzato dalle seguenti matrici

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 - \pi \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$C = \begin{bmatrix} \frac{\pi}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (8)$$

La funzione di trasferimento del sistema é  $G(S) = -\frac{\pi}{2} \frac{1}{s^2 - 1}$ .