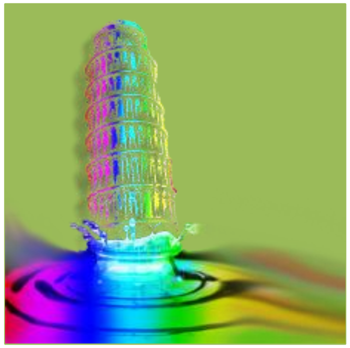


Fluidodinamica Computazionale

carmelo.demaria@centropiaggio.unipi.it

Fluidodinamica Computazionale (CFD)

- CFD è l’analisi dei sistemi che involvono movimento di fluidi, scambio di calore ed i fenomeni a loro relativi, come ad esempio reazioni chimiche, attraverso l’uso di simulazioni tramite computer.

- CFD = Modello Fisico + Metodi Numerici
- CFD presenta alcuni vantaggi rispetto a solo sperimentale:
  - Tempi ridotti di progettazione;
  - Analisi o valutazioni preliminari di sistemi in condizioni difficili da replicare;
  - Valutazione di grandezze del sistema difficili da misurare direttamente;

- Oggi la CFD ha un ruolo importante nell’ingegneria, ed è comunemente utilizzata per complementare studi sperimentali e teorici.

Campi di applicazione (1/2)

Ingegneria Industriale:

- Profili alari;
- Profili di flusso intorno ad aerei/auto/navi;
- Scambiatori di calore;
- Reattori chimici;
- Separatori;
- …

Ambientale:

- Formazione di uragani;
- Dispersione di inquinanti in atmosfera;
- Studio correnti oceaniche;
- …

Campi di applicazione (2/2)

Biologia/Fisiologia:

- Flusso d’aria nei polmoni;
- Flusso sanguigno in arterie/vene;
- Stenosi/Aneurismi
- ...

Organi artificiali:

- Bioreattori;
- Protesi vascolari/valvolari;
- Sistemi di dialisi;
- ...

Ipotesi alla base della CFD

- Corpo approssimabile come un CONTINUO:
  - la struttura molecolare della materia ed il movimento delle singole molecole può essere trascurata

$$K_n = \frac{\lambda}{L} << 1$$

λ= 'Cammino libero medio' [m]
L= Dimensione caratteristica sistema [m]
K_n = N° di Knudsen

Ipotesi alla base della CFD

- PARTICELLA DI FLUIDO: la piu piccola porzione di fluido le cui proprietà macroscopiche non sono infuenzate da singole molecole;

- PROPRIETA’ DEL FLUIDO: funzioni di spazio e tempo (es. u(x,y,x,t));

Leggi di conservazione

- La massa del fluido è conservata;
- In una particella di fluido la velocità di variazione della quantità di moto è uguale al totale somma delle forze agenti sulla stessa (*II legge di Newton*);
- La velocità di variazione di energia interna in una particella di fluido è uguale alla somma della quantità di calore e del lavoro agenti sulla stessa (*I principio della termodinamica*)

Equazioni di Navier-Stokes

- Conservazione della massa
- Conservazione della quantità di moto
- Conservazione dell’energia

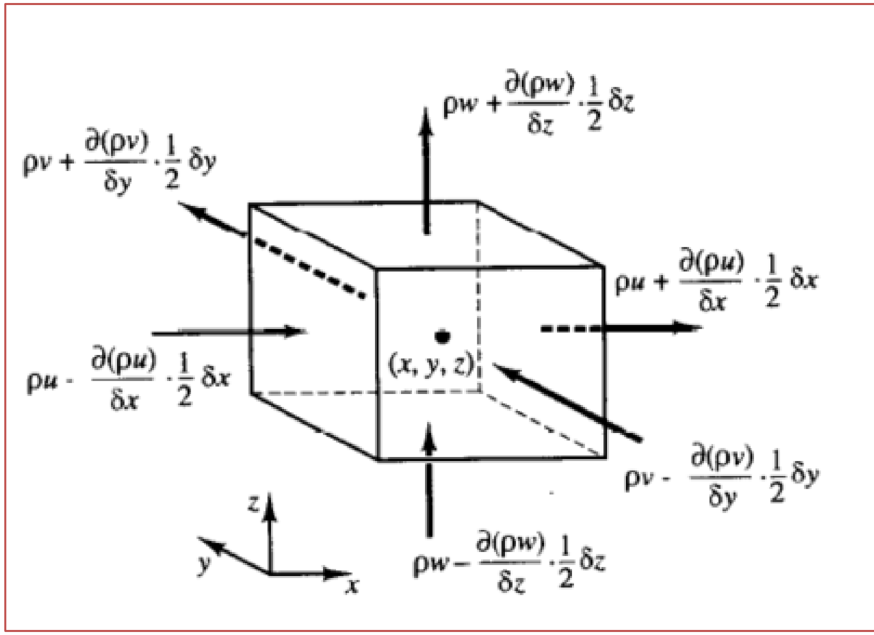
Conservazione della massa

- Variazione di materia in un elemento fluido

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\delta x\delta y\delta z)=\frac{\partial\rho}{\partial t}\delta x\delta y\delta z$$

- Flusso di materia in un elemento fluido

$$\left(\rho u-\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}\tfrac{1}{2}\delta x\right)\delta y\delta z-\left(\rho u+\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}\tfrac{1}{2}\delta x\right)\delta y\delta z$$
$$+\left(\rho v-\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}\tfrac{1}{2}\delta y\right)\delta x\delta z-\left(\rho v+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}\tfrac{1}{2}\delta y\right)\delta x\delta z$$
$$+\left(\rho w-\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\tfrac{1}{2}\delta z\right)\delta x\delta y-\left(\rho w+\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\tfrac{1}{2}\delta z\right)\delta x\delta y$$



u,v,w sono le componenti di velocità lungo i versori x,y,z

Conservazione della massa

Fluido generico

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0$$

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho \mathbf{u}) = 0}$$

Fluido incomprimibile

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

Ipotesi di densità costante

Come seguo un fluido in movimento?

Approccio Lagrangiano:

- La proprietà ϕ è funzione della posizione e del tempo: $\phi(x(t),y(t),z(t),t)$
- La Derivata Materiale (seguendo singole particelle di fluido) :

$$\frac{D\phi}{Dt} = \frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

$$\frac{D\phi}{Dt} = \frac{\partial\phi}{\partial t} + u\,\frac{\partial\phi}{\partial x} + v\,\frac{\partial\phi}{\partial y} + w\,\frac{\partial\phi}{\partial z} = \frac{\partial\phi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot grad\ \phi$$

u,v,w sono le componenti di velocità lungo i versori x,y,z

- Ci sono N>>1 particelle nel vostro fluido!!
- È possibile sviluppare modelli numerici per particelle di fluido(modello Lagrangiano) ma è molto più comune utilizzare approccio Euleriano.

Come seguo un fluido in movimento?

Approccio Euleriano:

- Si valuta la variazione della proprietà ϕ in un volume unitario per una particella di fluido;
- Si definisce un volume di controllo infinitesimo e si monitora il campo di ϕ che lo attraversa;

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + div(\rho\phi\mathbf{u}) = \rho\left[\frac{\partial\phi}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot grad\ \phi\right] + \phi\left[\frac{\partial\rho}{\partial t} + div(\rho\mathbf{u})\right] = \rho\frac{D\phi}{Dt}$$

Velocità di variazione della proprietà ϕ per elemento fluido

Flusso della proprietà ϕ uscente dall'elemento fluido

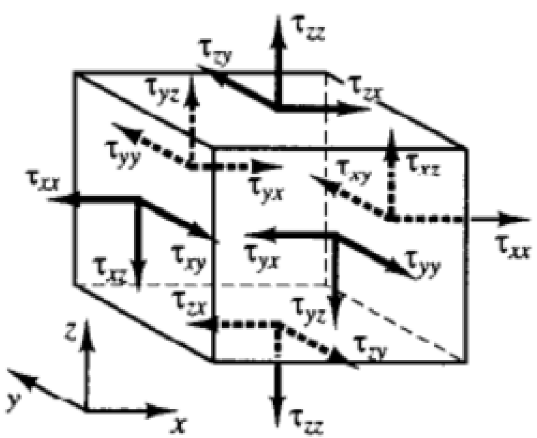
Velocità di variazione della proprietà ϕ per una particella di fluido/volume

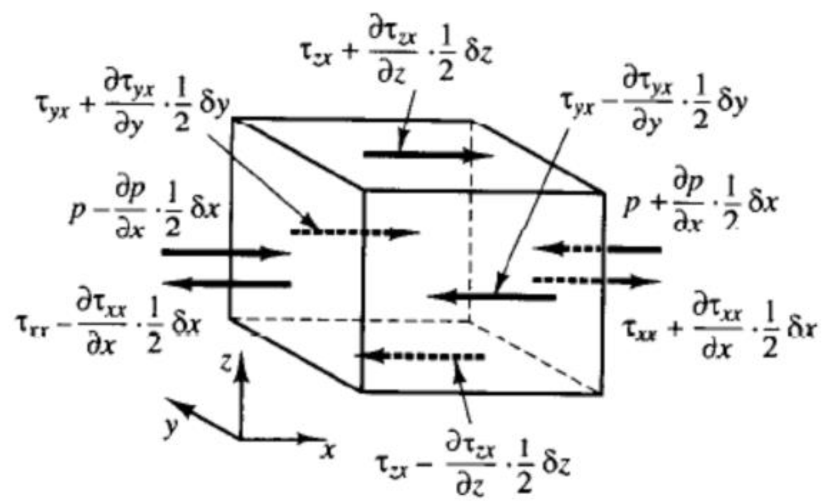
Conservazione della quantità di moto

Velocità di variazione della quantità di moto di una particella di fluido = Somma delle forze agenti sulla particella di fluido

- Forze di Superficie: pressione e sforzo viscoso;
- Forze di Volume: gravità, centrifuga, Coriolis, etc.

τ è stress viscoso (τij agisce in direzione j sulla faccia di normale i)





Nota: mentre t è un vettore la p è scalare.

Conservazione della quantità di moto

QM lungo x	u	$\rho \dfrac{Du}{Dt}$	$\dfrac{\partial(\rho u)}{\partial t} + div(\rho u \mathbf{u})$
QM lungo y	v	$\rho \dfrac{Dv}{Dt}$	$\dfrac{\partial(\rho v)}{\partial t} + div(\rho v \mathbf{u})$
QM lungo z	w	$\rho \dfrac{Dw}{Dt}$	$\dfrac{\partial(\rho w)}{\partial t} + div(\rho w \mathbf{u})$

Trovate su testi anglosassoni la Quantità di Moto come **Momentum.**

Conservazione della quantità di moto

$$\boxed{\rho \frac{Du}{Dt} = \frac{\partial(-p + \tau_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + S_{Mx}}$$

$$\boxed{\rho \frac{Dv}{Dt} = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial(-p + \tau_{yy})}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + S_{My}}$$

$$\boxed{\rho \frac{Dw}{Dt} = \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial(-p + \tau_{zz})}{\partial z} + S_{Mz}}$$

Sorgenti di
quantità di moto

Conservazione dell'Energia

Velocità di variazione dell' energia in una particella di fluido = Quantità di calore entrante nella particella di fluido (con segno) + Lavoro agente sulla particella di fluido (con segno)

- Velocità di variazione dell'energia in una particella di fluido

$$\boxed{\rho \frac{DE}{Dt}}$$

- Lavoro fatto dalle forze superficiali

$$\left[\left(pu - \frac{\partial(pu)}{\partial x}\frac{1}{2}\delta x\right) - \left(\tau_{xx}u - \frac{\partial(\tau_{xx}u)}{\partial x}\frac{1}{2}\delta x\right) - \left(pu + \frac{\partial(pu)}{\partial x}\frac{1}{2}\delta x\right) + \left(\tau_{xx}u + \frac{\partial(\tau_{xx}u)}{\partial x}\frac{1}{2}\delta x\right)\right]\delta y\delta z$$
$$+\left[-\left(\tau_{yx}u - \frac{\partial(\tau_{yx}u)}{\partial y}\frac{1}{2}\delta y\right) + \left(\tau_{yx}u + \frac{\partial(\tau_{yx}u)}{\partial y}\frac{1}{2}\delta y\right)\right]\delta x\delta z$$
$$+\left[-\left(\tau_{zx}u - \frac{\partial(\tau_{zx}u)}{\partial z}\frac{1}{2}\delta z\right) + \left(\tau_{zx}u + \frac{\partial(\tau_{zx}u)}{\partial z}\frac{1}{2}\delta z\right)\right]\delta x\delta y$$

$$\boxed{[-div(p\mathbf{u})] + \left[\frac{\partial(u\tau_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(u\tau_{yx})}{\partial y} + \frac{\partial(u\tau_{zx})}{\partial z} + \frac{\partial(v\tau_{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(v\tau_{yy})}{\partial y} + \frac{\partial(v\tau_{zy})}{\partial z} + \frac{\partial(w\tau_{xz})}{\partial x} + \frac{\partial(w\tau_{yz})}{\delta y} + \frac{\partial(w\tau_{zz})}{\partial z}\right]}$$

Conservazione dell’energia

Velocità di variazione dell’ energia in una particella di fluido = Quantità di calore entrante nella particella di fluido (con segno) + Lavoro agente sulla particella di fluido (con segno)

- Velocità di variazione dell’energia in una particella di fluido

$$\boxed{\rho \frac{DE}{Dt}}$$

- Lavoro fatto dalle forze superficiali

$$\left[\left(pu - \frac{\partial(pu)}{\partial x}\frac{1}{2}\delta x\right) - \left(\tau_{xx}u - \frac{\partial(\tau_{xx}u)}{\partial x}\frac{1}{2}\delta x\right)\right.$$
$$\left. -\left(pu + \frac{\partial(pu)}{\partial x}\frac{1}{2}\delta x\right) + \left(\tau_{xx}u + \frac{\partial(\tau_{xx}u)}{\partial x}\frac{1}{2}\delta x\right)\right]\delta y\delta z$$
$$+\left[-\left(\tau_{yx}u - \frac{\partial(\tau_{yx}u)}{\partial y}\frac{1}{2}\delta y\right) + \left(\tau_{yx}u + \frac{\partial(\tau_{yx}u)}{\partial y}\frac{1}{2}\delta y\right)\right]\delta x\delta z$$
$$+\left[-\left(\tau_{zx}u - \frac{\partial(\tau_{zx}u)}{\partial z}\frac{1}{2}\delta z\right) + \left(\tau_{zx}u + \frac{\partial(\tau_{zx}u)}{\partial z}\frac{1}{2}\delta z\right)\right]\delta x\delta y$$

$$\boxed{[-div(p\mathbf{u})] + \left[\frac{\partial(u\tau_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(u\tau_{yx})}{\partial y} + \frac{\partial(u\tau_{zx})}{\partial z} + \frac{\partial(v\tau_{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(v\tau_{yy})}{\partial y} + \frac{\partial(v\tau_{zy})}{\partial z} + \frac{\partial(w\tau_{xz})}{\partial x} + \frac{\partial(w\tau_{yz})}{\delta y} + \frac{\partial(w\tau_{zz})}{\partial z}\right]}$$

Conservazione dell’energia

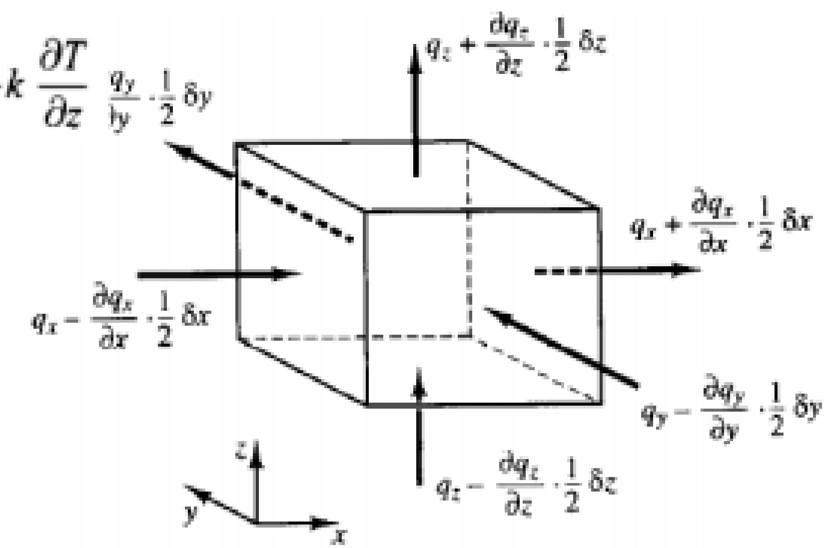
• Calore totale entrante/uscente in una particella di fluido per unità di volume data da *conduzione*.

$$-\frac{\partial q_x}{\partial x}-\frac{\partial q_y}{\partial y}-\frac{\partial q_z}{\partial z}=-div\,\mathbf{q} \qquad \boxed{-div\,\mathbf{q}=div(k\ grad\ T)}$$

•Legge di Fourier

$$q_x=-k\frac{\partial T}{\partial x} \qquad q_y=-k\frac{\partial T}{\partial y} \qquad q_z=-k\frac{\partial T}{\partial z}$$

$$\mathbf{q}=-k\ grad\ T$$



Equazioni vs incognite

- 5 EQUAZIONI

- Continuità (1)
- Quantità di Moto (3)
- Energia (1)

- 11 INCOGNITE

- 2 Variabili Termodinamiche, in quanto ρ, p, I e T sono legate da equazioni di stato
  $p=p(\rho,T)$ $i=(\rho,T)$
- Velocità (3)
- Sforzi viscosi (6)

- Liquidi è gas a basse velocità di solito si comportano come fluidi incomprimibili: senza variazioni di densità non c'è un legame fra equazione dell'energia interna e le conservazioni di massa e quantità di moto. Per risolvere il campo di moto fluido basta risolvere solo le equazioni per massa e quantità di moto.

- Si usa N° di Mach
  $Ma = v/v_{suono}$
  se $Ma < 0.2$ si considera incomprimibile.

Sforzi viscosi

•Gli sforzi viscosi τ_{ij} possono essere espressi in funzione della velocità di deformazione locale (strain rate);
• Tutti i gas e molti liquidi hanno comportamento isotropo;
• La velocità di deformazione di un elemento fluido ha 9 componenti in 3D, di cui 6 sono indipendenti fra loro in caso di isotropia.

• 3 componenti indicano deformazione lungo assi principali

$$e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad e_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad e_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}$$

• 6 componenti indicano deformazione lungo piani di taglio

$$e_{xy} = e_{yx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \qquad e_{xz} = e_{zx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

$$e_{yz} = e_{zy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)$$

• Deformazione volumetrica

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = div\ \mathbf{u}$$

Sforzi viscosi

- In un fluido Newtoniano gli stress viscosi sono proporzionali al gradiente di deformazione del fluido:

$$\tau_{xx} = 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \, div \, \mathbf{u} \quad \tau_{yy} = 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} + \lambda \, div \, \mathbf{u} \quad \tau_{zz} = 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} + \lambda \, div \, \mathbf{u}$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \tag{2.31}$$

- La prima viscosità (Dinamica) µ lega gli sforzi viscosi al gradiente di deformazione
- La seconda viscosità λ lega gli sforzi alla deformazione volumetrica

Gas $\lambda = -\frac{2}{3}\mu$

Liquido $div \, \mathbf{u} = 0$

Equazioni di Navier-Stokes

- Massa $$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho \mathbf{u}) = 0$$
- QM $$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + div(\rho u \mathbf{u}) = -\frac{\partial p}{\partial x} + div(\mu\ grad\ u) + S_{Mx}$$
$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + div(\rho v \mathbf{u}) = -\frac{\partial p}{\partial y} + div(\mu\ grad\ v) + S_{My}$$
$$\frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + div(\rho w \mathbf{u}) = -\frac{\partial p}{\partial z} + div(\mu\ grad\ w) + S_{Mz}$$
- Energia $$\frac{\partial(\rho i)}{\partial t} + div(\rho i \mathbf{u}) = -p\ div\ \mathbf{u} + div(k\ grad\ T) + \Phi + S_i$$
- Equazioni di stato $p = p(\rho, T)$ and $i = i(\rho, T)$
  e.g. perfect gas
  $p = \rho RT$ and $i = C_v T$

Casi di studio nel corso

Conservazione Massa, fluido incomprimibile, forma compatta

$$\nabla \vec{V} = 0$$

Conservazione QM, fluido incomprimibile, forma compatta

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla)\vec{V} = \vec{g} - \frac{1}{\rho}\nabla p + \nu \triangle \vec{V}$$

Energia, fluido incomprimibile non dissipativo, forma compatta (trasporto di calore per via convettiva)

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla)T = \frac{k}{\rho c_p}\triangle T$$

Numero di Reynolds

Determina il regime di flusso del problema:

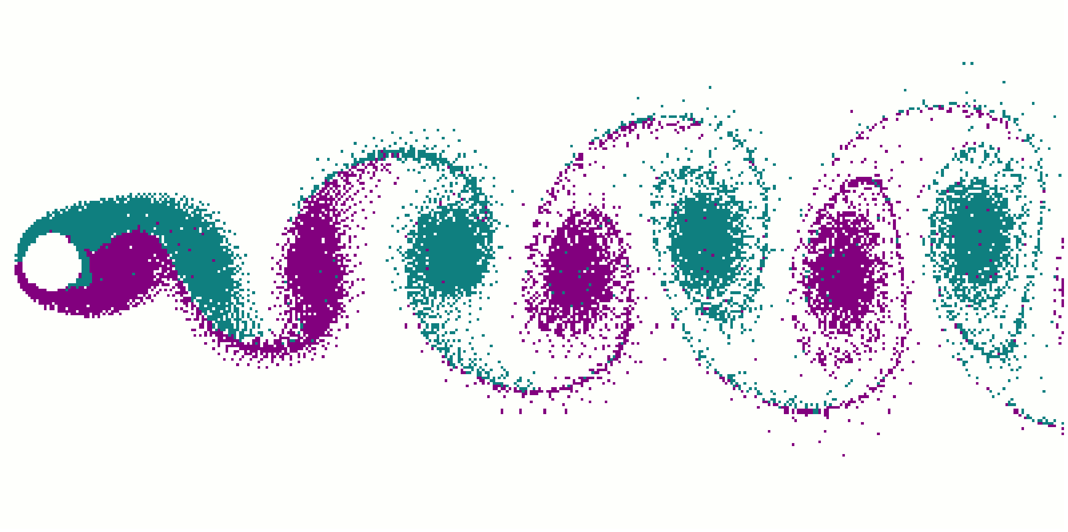
- Laminare
- Turbolento

$$Re = \frac{\rho v D}{\mu}$$

v = velocità caratteristica fluido
D = diametro idraulico condotto
= 4A/P

Vortici e turbolenza

- Presenza di Vortici **NON** implica Turbolenza!!!
- Turbolenza caratterizzata da vortici



Es. Vortici di Van Karman, in regime Laminare

Perché vortici?

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla)\vec{V} = \vec{g} - \frac{1}{\rho}\nabla p + \nu \triangle \vec{V}$$

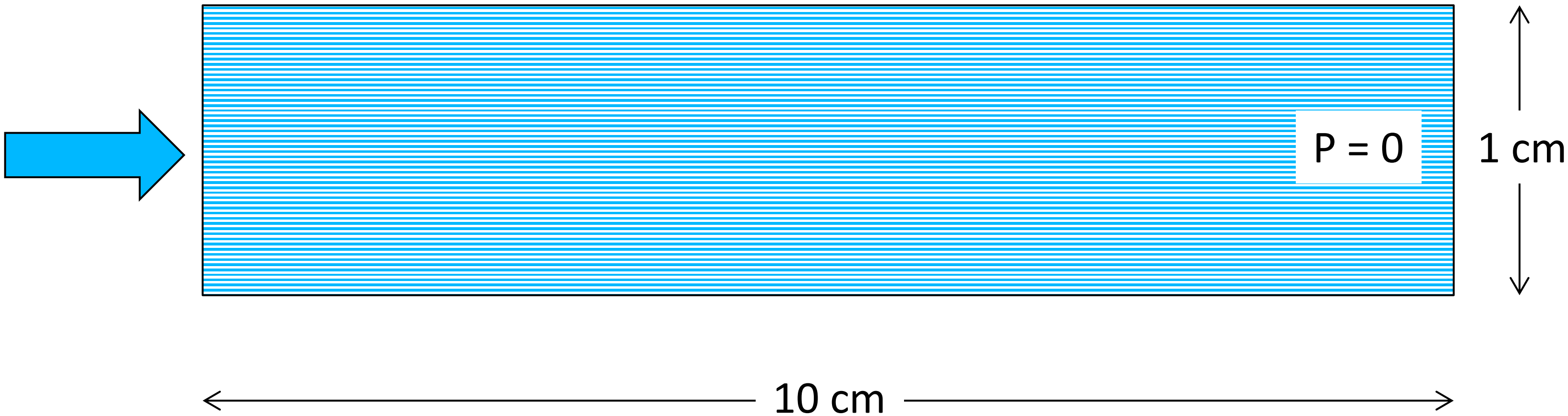
Termine NON LINEARE nell'equazione!!

É necessaria quindi particolare attenzione quando si risolve Navier Stokes, in particolare per Reynolds alti !!!

ESERCIZI

Esercizio 1

V_{in}= #matricola/1000

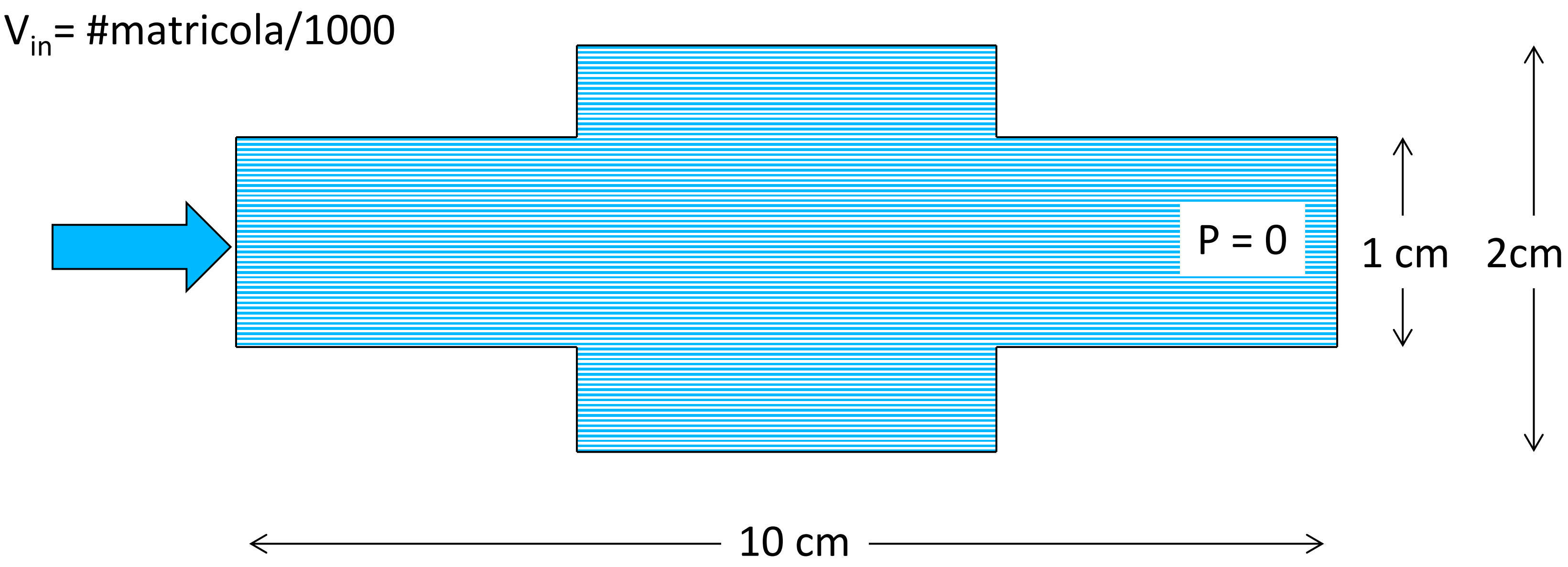


Variare:

- Il grado della funzione forma (lineare, quadratica, cubica)
- La finitura della mesh (rada, normale, fine)
- Confrontare il profilo di velocità con la soluzione analitica di un flusso tra due piastre parallele distanti 2h (con caduta di pressione lineare):

$$u(y) = \frac{h^2}{2n}\left(\frac{DP}{DL}\right)\left(1 - \frac{y^2}{h^2}\right)$$

Esercizio 2 (1/2)



- Valutare il profilo di velocità e di perdita di carico e metterlo in relazione con l'equazione di Bernoulli

Esercizio 2 (2/2)