Analisi strutturale ad elementi finiti con approccio agli spostamenti

→ FORMULAZIONE DIRETTA
→ VARIAZIONALE (PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI)

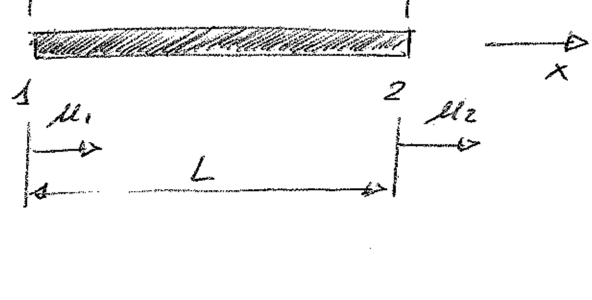
Vengono adottate le ipotesi di spostamenti e deformazioni infinitesime
⇒ Questo comporta che la configurazione indeformata possa essere impiegata per la valutazione dell'equilibrio della struttura soggetta ai carichi esterni; inoltre la legge costitutiva del materiale può variare da punto a punto ma non ammette altre dipendenze (per esempio non dipende dal livello di sforzo raggiunto)

FORMULAZIONE DIRETTA

⇒ Analisi matriciale delle strutture
→ formulazione diretta delle matrici di rigidezza di un elemento finito
→ determinazione dei coefficienti delle matrici in base a considerazioni fisiche
→ INTEGRAZIONE DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI
→ CONSIDERAZIONI DI EQUILIBRIO

ESEMPIO ⇒ ELEMENTO ASTA

elemento strutturale capace di sopportare solo carichi diretti come il suo asse



Sezione A
Modulo elastico E

Integrazione di equazioni differenziali

L'equazione differenziale che regge il problema dell'asta caricata assialmente è

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

che deve essere integrata due volte con le condizioni al contorno $u(0) = u_1$, $u(L) = u_2$ ⇒ generico spost. degli estremi

$$u = \frac{u_2 - u_1}{L} x + u_1$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_2 - u_1}{L}$$

⇒ l'azione interna vale allora

$$N = A \cdot \underbrace{\sigma}_{\text{sforzo sulla sezione}} = A E \varepsilon = A E \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{EA}{L}(u_2 - u_1)$$

$$\rightarrow \quad f_2 = \frac{EA}{L}(u_2 - u_1)$$

$$f_1 = \frac{EA}{L}(u_1 - u_2)$$

→ in forma matriciale

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix}}_{\text{forze nodali}} = \underbrace{\frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{matrice di rigidezza}} \underbrace{\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}}_{\text{spostamenti nodali}}$$

Considerazioni di equilibrio

Determinare i coefficienti di influenza relativi allo spostamento degli estremi dell'asta u_2 e u_1

→ l'allungamento dell'asta è

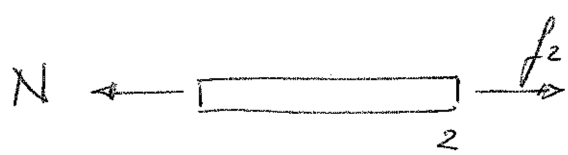
$$\Delta l = u_2 - u_1$$

→ cui corrisponde una deformazione

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{L} = \frac{u_2 - u_1}{L}$$

Il generico concio di asta è in equilibrio essendo lo sforzo costante lungo l'asse

Considerando conci di asta che comprendono un estremo della stessa possiamo determinare le forze che nascono agli estremi imponendone l'equilibrio



$$N = f_2$$

$$N = A\sigma = EA\varepsilon = \frac{EA}{L}(u_2 - u_1)$$

$$\rightarrow f_2 = \frac{EA}{L}(u_2 - u_1)$$

$$\Rightarrow f_1 = \frac{EA}{L}(u_1 - u_2)$$

→ forma matriciale

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

Per l'elemento trave le cose divengono immediatamente più complesse.

→ Bisogna tenere conto degli spostamenti ortogonali all'asse della trave, nonché delle rotazioni

→ Ad esempio nel caso dell'elemento trave a 2 nodi, a sezione costante, nel piano:

$$\{f\} = [K]\{u\}$$

$$\begin{Bmatrix} N_1 \\ T_1 \\ M_1 \\ N_2 \\ T_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ & \frac{12EJ}{L^3} & -\frac{6EJ}{L^2} & 0 & -\frac{12EJ}{L^3} & -\frac{6EJ}{L^2} \\ & & \frac{4EJ}{L} & 0 & \frac{6EJ}{L^2} & \frac{2EJ}{L} \\ & & & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ & \text{SYM} & & & \frac{12EJ}{L^2} & \frac{6EJ}{L^2} \\ & & & & & \frac{4EJ}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

Negli esempi trattati sono stati esaminati elementi che, per loro natura, ammettono una formulazione discreta del problema elastico.

Nel caso di elementi di forma generica, per esempio ottenuti dalla suddivisione di un continuo elastico tridimensionale, questo tipo di procedura non sarà applicabile o lo sarà solo in casi elementari

→ individuare una via alternativa (principio lavori virtuali)

FORMULAZIONE CON IL PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI

→ formulazione generale

Breve riepilogo:

→ lo scopo è di discretizzare, ovvero condensare le proprietà "distribuite" di ogni elemento su alcuni nodi di contorno che "comunicano" con il resto della struttura e con i carichi esterni

→ la conoscenza degli spostamenti nodali consente di ricostruire tutte le proprietà interne dell'elemento (stress, strain, temperatura...)

Il procedimento prevede l'esecuzione di sette passi logici

1. identificazione della formulazione adatta all'elemento (asta, trave, ...)
2. scelta dell'insieme di funzioni con le quali si descriverà il campo interno di spostamenti (mediante loro combinazione lineare)
3. calcolo delle funzioni di forma, che legano gli spostamenti interni con quelli nodali

(4) Esplicitare il legame "campo deformazioni interne" - "spostamenti nodali"

(5) Esplicitare il legame "campo tensioni interne" - "spostamenti nodali"

(6) Applicare il principio dei lavori virtuali per determinare la matrice di rigidezza $[K]$

(7) A calcolo avvenuto, ricavare tensioni e deformazioni

---

(1) IDENTIFICAZIONE DELLA ADATTA FORMULAZIONE DELL'ELEMENTO

→ scegliere la tipologia di elemento (asta, trave, piastra, ...) e determinare il numero di nodi che lo definisce

$$u = \begin{Bmatrix} \\ u_i \\ \\ \end{Bmatrix} \qquad f = \begin{Bmatrix} \\ f_i \\ \\ \end{Bmatrix} \qquad \bar{u}(P) = \begin{Bmatrix} \\ \bar{u}_k \\ \\ \end{Bmatrix}$$

spostamenti nodali — forze nodali — spostamenti interni

$i = 1 \dots n$ gradi di libertà elemento

$k = 1 \dots m$ spostamenti interni definiti

---

(2) Scelta dell'insieme di funzioni con le quali si descriverà il campo interno di spostamenti (mediante loro combinazione lineare)

→ le funzioni sono in genere di tipo polinomiale

→ a meno di casi particolari, la combinazione lineare di tali funzioni non fornirà una soluzione esatta ma solo approssimata

→ l'insieme delle funzioni interpolanti deve rispettere quattro requisiti (affinché la convergenza del risultato sia monotona con l'infittimento della mesh)

1. COMPLETEZZA AI MOTI RIGIDI: avere capacità di descrivere gli spostamenti rigidi dell'elemento senza l'insorgere di tensioni all'interno

2. COMPLETEZZA A DEFORMAZIONI COSTANTI: consentire stati di deformazioni costanti in tutto l'elemento

3. COMPATIBILITÀ: lungo le linee o facce di contorno di elementi contigui non si devono verificare strappi o compenetrazioni

4. CONTINUITÀ nella descrizione del campo degli spostamenti

→ identificate le funzioni interpolanti $\varphi_i(P)$ per ciascun punto interno dell'elemento si può scrivere

$$\begin{Bmatrix} \bar{u}_1(P) \\ \vdots \\ \bar{u}_k(P) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \alpha_1 \varphi_{11}(P) + \alpha_2 \varphi_{12}(P) + \dots + \alpha_n \varphi_{1n}(P) \\ \vdots \\ \alpha_1 \varphi_{k1}(P) + \alpha_2 \varphi_{k2}(P) + \dots + \alpha_n \varphi_{kn}(P) \end{Bmatrix}$$

$$\rightarrow \{\bar{u}(P)\} = [\varphi(P)]\{\alpha\}$$

③ CALCOLO DELLE FUNZIONI DI FORMA, CHE LEGANO GLI SPOSTAMENTI INTERNI CON QUELLI NODALI

→ applicare l'interpolazione precedente su particolari punti, i nodi, considerando tutti i gdl definiti per nodo

$$\{u_i\} = \{\alpha_1 \varphi_{k1}(P_i) + \alpha_2 \varphi_{k2}(P_i) + \dots + \alpha_n \varphi_{kn}(P_i)\}$$

$$\{u\} = [A]\{\alpha\}$$

↳ matrice nota

$$\rightarrow \{\alpha\} = [A]^{-1}\{u\}$$

→ inserendo questa espressione nel campo di spostamento interno

$$\{\bar{u}(P)\} = \underbrace{[\varphi(P)][A]^{-1}}_{N(P)}\{u\}$$

$N(P)$ ⇒ FUNZIONI DI FORMA

↳ $k * n$ = # spostamenti interni definiti * # di gdl dell'elemento

(4) Esplicitare il legame "campo deformazioni interne" – "spostamenti nodali"

→ le relazioni cinematiche consentono di correlare spostamenti interni con deformazioni interne

→ le loro espressioni dipendono dal problema di riferimento, ma sono sempre ricavate da $u(P)$ mediante relazioni differenziali

$$\{\varepsilon(P)\} = \partial_{iff} \{\bar{u}(P)\}$$

nel caso lineare elastico

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right]$$

→ il "trucco" è ora organizzare le componenti dello spostamento e della deformazione in vettori

→ le relazioni che legano le diverse componenti possono essere messe in forma matriciale

→ esempio CASO BIDIMENSIONALE

$$\{u\} = [u_x, u_y]^T$$

$$\{\varepsilon\} = [\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}]^T$$

$$\Rightarrow \partial_{iff} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial y \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix}$$

nota: in queste relazioni i numeri 1, 2, 3 sono stati sostituiti dalle più intuitive x, y

$$\left\{\varepsilon(P)\right\} = D_r \iint \left\{\bar{u}(P)\right\} =$$

$$= D_r \iint \left\{ \left[\varphi(P)\right]\left[A\right]^{-1} \left\{u\right\} \right\}$$

$$= \underbrace{D_r \iint \left[\varphi(P)\right]\left[A\right]^{-1}}_{\left[B(P)\right]} \left\{u\right\}$$

\# def. interne definite * \# gdl elemento

---

(5) Esplicitare il legame "campo tensioni interne" - "spostamenti nodali"

→ il modello costitutivo fornisce il legame tra le tensioni e le deformazioni

→ la matrice di rigidezza del materiale $[D]$ dipende dal tipo di configurazione (plane stress, plain strain, ...) e dal materiale

$$\left\{\sigma(P)\right\} = \left[D\right]\left\{\varepsilon(P)\right\}$$

$$\Rightarrow \sigma(P) = \left[D\right]\left[B(P)\right]\left\{u\right\}$$

⑥ Applicare il principio dei lavori virtuali per determinare la matrice di rigidezza $[K]$

PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI (PLV)

Nella configurazione di equilibrio, il lavoro virtuale compiuto da un sistema di forze reali in seguito all'applicazione di una variazione virtuale della configurazione (⇒ congruente e compatibile con i vincoli) è nullo; in altre parole il lavoro virtuale di deformazione compiuto dalle forze interne è uguale a quello svolto dalle forze esterne

⊳ energia immagazzinata dal campo di tensioni interno

$$\delta \mathcal{L}_{int} = \delta \mathcal{L}_{est}$$

δ ⇒ VIRTUALE

⟶ $\{u^*\}$, $\{\varepsilon^*\}$ ⇒ spostamenti e deformazioni virtuali

$$\delta \mathcal{L}_{est} = \{u^*\}^T \cdot \{f\}$$

$$d\, \delta \mathcal{L}_{int}(P) = \{\varepsilon^*(P)\}^T \cdot \{\sigma(P)\}\, dV$$

⇝ deve essere integrato sul volume dell'elemento

$$\delta \mathcal{L}_{int} = \int_{V_e} \{\varepsilon^*(P)\}^T \cdot \{\sigma(P)\}\, dV$$

$$\delta \mathcal{L}_{int} = \int_{V_e} \underbrace{\{u^*\}^T [B]^T}_{\text{nota } [AB]^T = B^T A^T} \cdot [D][B]\{u\}\, dV$$

è possibile portare fuori dall'integrale le grandezze discrete

$$\delta \mathcal{L}_{int} = \{u^*\}^T \int_{V_e} [B]^T \cdot [D][B]\, dV \,\{u\}$$

→ Uguagliando $\delta \mathcal{L}_{int}$ e $\delta \mathcal{L}_{est}$ è possibile eliminare $\{u^*\}^T$ perché tale uguaglianza deve valere non per un solo vettore di spostamenti virtuali, ma per una serie infinita di valori, il cui unico requisito è la compatibilità con i vincoli

$$\{f\} = \underbrace{\int_{V_e} [B]^T [D][B]\, dV}_{} \,\{u\}$$

$$[f] = [K] \{u\}$$

↳ matrice di rigidezza

nota: è possibile estendere l'applicazione del PLV al caso in cui siano presenti forze di volume, di superficie o tensioni residue

---

7 A calcolo avvenuto, ricavare tensioni e deformazioni in base alla soluzione

$$\varepsilon(P) = [B(P)]\{u\}$$

$$\sigma(P) = [D][B(P)]\{u\}$$

La matrice che consentirà di risolvere l'intero problema sarà costruita assemblando le matrici calcolate al livello dei singoli elementi, cioè andando a posizionare i coefficienti, definiti in funzione della posizione locale, nelle posizioni assolute che i corrispondenti gradi di libertà hanno nel vettore complessivo di tutte le incognite del problema.

Riassumendo, si è visto come mediante l'applicazione del PLV, la tecnica di suddivisione in elementi di dimensione finita e di forma regolare, all'interno dei quali approssimare gli spostamenti in funzione degli spostamenti di un insieme di nodi appartenenti al loro contorno, la soluzione del problema del continuo elastico, retta da equazioni differenziali alle derivate parziali, è stata ricondotta alla soluzione di un sistema algebrico lineare avente come incognite gli spostamenti dei punti di discretizzazione.

APPLICAZIONE ALL'ELEMENTO ASTA (fare riferimento alla figura di pag. 1)

incognite

$$\{u\} = [u_1, u_2]^T$$

→ interpolazione dello spostamento mediante funzioni lineari

$$\varphi_1 = \frac{L-x}{L} \qquad \varphi_2 = \frac{x}{L}$$

x=0 x=L

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \alpha_1 \varphi_1(P_1) + \alpha_2 \varphi_2(P_1) \\ \alpha_1 \varphi_1(P_2) + \alpha_2 \varphi_2(P_2) \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = [A]^{-1} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

$$\bar{u}(x) = [\varphi][A]^{-1}\{u\}$$

$$\bar{u}(x) = \begin{bmatrix} \frac{L-x}{L} & \frac{x}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

$$\bar{u}(x) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{L} & \frac{x}{L} \end{bmatrix}}_{N(x)} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow u(x) = \left(1 - \frac{x}{L}\right) u_1 + \frac{x}{L} u_2$$

Il legame spostamento-deformazione è definito da

$$\varepsilon = \frac{\partial \bar{u}(x)}{\partial x}$$

$$\Rightarrow [Diff] = \left[\frac{\partial}{\partial x}\right]$$

Lo stato di sforzo invece è definito dalla relazione $\sigma = E\varepsilon$

$$\Rightarrow [D] = [E]$$

$\hookrightarrow$ matrice con un solo elemento

$$\Rightarrow [B] = \text{diff}\,[N(x)]$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} = \frac{1}{L}\begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[K] = \int_{V_e} [B]^T [D] [B]\, dV$$

$dV = A\,dx$ $\Rightarrow$ sezione costante

$$[K] = A \int_L \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix}^T [E] \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} dx$$

$$\frac{AE}{L^2} \int_L \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} dx$$

$$\underbrace{\frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}_{[k]}$$