

Si consideri il modello dinamico del sistema illustrato in Fig. 1 che è descritto dalle equazioni

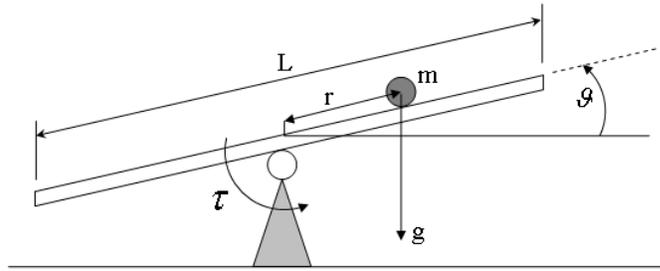


Figura 1: Modello del sistema

$$\begin{cases} (I + m r^2) \ddot{\theta} + m g r \cos(\theta) + 2 m r \dot{r} \dot{\theta} + b \dot{\theta} = \tau \\ \left(m + \frac{J}{R^2}\right) \ddot{r} + m g \sin(\theta) - m r \dot{\theta}^2 = 0 \end{cases}$$

dove  $I = 2.5 \text{ Kg m}^2$  è il momento di inerzia della barra,  $m = 1.5 \text{ Kg}$  e  $J = 45 \cdot 10^{-3} \text{ Kg m}^2$ , rispettivamente, la massa e il momento di inerzia della sfera;  $\tau$  è la coppia di ingresso,  $g = 9.81 \text{ m/sec}^2$  l'accelerazione di gravità,  $b = 1.5 \text{ Kg m}^2/\text{sec}$  è il coefficiente di attrito viscoso agente sul perno al quale è vincolata la barra ed  $R = 6 \text{ cm}$  è il raggio della sfera.

La barra ha lunghezza  $L$  ed è incernierata esattamente a metà; la coordinata  $r$  che indica la posizione della sfera lungo la barra è zero in corrispondenza del fulcro e positiva verso destra.

- A)** Si descriva un modello del sistema (in spazio di stato in forma simbolica) considerando come ingresso la coppia  $\tau$  e come uscita la posizione della sfera  $r$ , linearizzando attorno al punto di equilibrio con ingresso nominale  $\hat{\tau}$  nullo e scegliendo come variabili di stato  $[x_1, x_2, x_3, x_4]^T = [\theta, r, \dot{\theta}, \dot{r}]^T$ .  
Se ne riporti infine la forma numerica delle matrici.
- B)** Si consideri il problema del controllo della posizione della sfera mediante l'ingresso  $\tau$ , si specifichi la funzione di trasferimento del sistema, discutendone la stabilità e dandone un'interpretazione fisica; si disegnino inoltre i diagrammi di Bode asintotici.
- C)** Si progetti un controllore che, usando la misura del valore di uscita  $r$ , regoli la coppia  $\tau$  in modo da garantire le seguenti specifiche:
1. la sfera, a partire dal punto di equilibrio  $r = 0$ , raggiunga esattamente la posizione  $\hat{r} = 40 \text{ cm}$ ;
  2. dopo al più 7 sec, la posizione della sfera non si allontani da  $\hat{r}$  di più di 1 cm;
  3. la sfera non cada dalla barra la cui lunghezza è  $L = 1 \text{ m}$ .

Si riportino quindi

- le specifiche tradotte nel dominio della frequenza e visualizzate sul diagramma di Bode;
  - il procedimento di progetto del controllore che si intende seguire illustrato con diagrammi a blocchi;
  - il controllore progettato;
  - i diagrammi di Bode del sistema nelle diverse fasi del progetto, mostrando il raggiungimento delle specifiche;
  - la risposta al gradino del sistema controllato con le caratteristiche significative.
- D)** Si discretizzi la dinamica del controllore e si effettui la simulazione di una risposta al gradino del sistema controllato usando Simulink; si discuta la scelta del tempo di campionamento e si riportino:

- il codice Matlab che implementa il controllore discreto;
- lo schema a blocchi Simulink utilizzato per la simulazione;
- l'andamento simulato dell'uscita del sistema con le caratteristiche significative.

## Soluzione

**A** Indicando con  $x = [\theta, r, \dot{\theta}, \dot{r}]^T$  il vettore di stato ed imponendo le condizioni di equilibrio,  $\dot{x} = 0$  con  $\tau = 0$  si ottiene:

$$\begin{cases} m g r \cos(\theta) = 0 \\ m g \sin(\theta) = 0 \end{cases}$$

Dalla seconda equazione si ottiene  $\theta = 0$  e, di conseguenza, dalla prima si ha che anche  $r = 0$ .

Indicando con  $\tilde{x} = [\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \tilde{x}_4]^T$  il vettore delle variabili di stato traslate nell'equilibrio e con  $\tilde{u}$  l'ingresso anch'esso traslato (si noti che in questo particolare caso tutti i valori di equilibrio sono pari a 0), il sistema non lineare scritto in forma di stato traslato attorno all'equilibrio è

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_1 = \tilde{x}_3 \\ \dot{\tilde{x}}_2 = \tilde{x}_4 \\ \dot{\tilde{x}}_3 = \frac{1}{I + m \tilde{x}_2^2} (\tilde{u} - m g \tilde{x}_2 \cos(\tilde{x}_1) - 2 m \tilde{x}_2 \tilde{x}_4 \tilde{x}_3 - b \tilde{x}_3) \\ \dot{\tilde{x}}_4 = \frac{1}{m + \frac{J}{R^2}} (-m g \sin(\tilde{x}_1) + m \tilde{x}_2 \tilde{x}_3^2) \end{cases}$$

Linearizzando il sistema attorno all'origine, essendo questo l'equilibrio delle nuove variabili  $\tilde{x}$  e  $\tilde{u}$ , si ottiene il sistema linearizzato approssimato nella consueta forma di stato

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \tag{1}$$

dove,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{m g}{I} & -\frac{b}{I} & 0 \\ -\frac{m g}{m + \frac{J}{R^2}} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/I \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$C = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0],$$

$$D = [0].$$

Sostituendo infine i valori numerici assegnati si ottiene:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -5.89 & -0.6 & 0 \\ -1.05 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.4 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

**B** La funzione di trasferimento tra l'ingresso di controllo  $u = \tau$  e l'uscita  $y = r$  è

$$G_u(s) = \frac{-0.42043}{(s - 1.446)(s + 1.751)(s^2 + 0.2946s + 2.443)}.$$

Come si può osservare, essa presenta un polo a parte reale positiva ed è dunque instabile. Questo si può interpretare da un punto di vista fisico col fatto che se ci si sposta, anche di poco, dalla posizione di equilibrio coincidente con il fulcro la barra si inclina e la sfera tende ad allontanarsi sempre più.

In Fig. 2 sono riportati il diagramma di Bode e il diagramma di Bode asintotico del sistema.

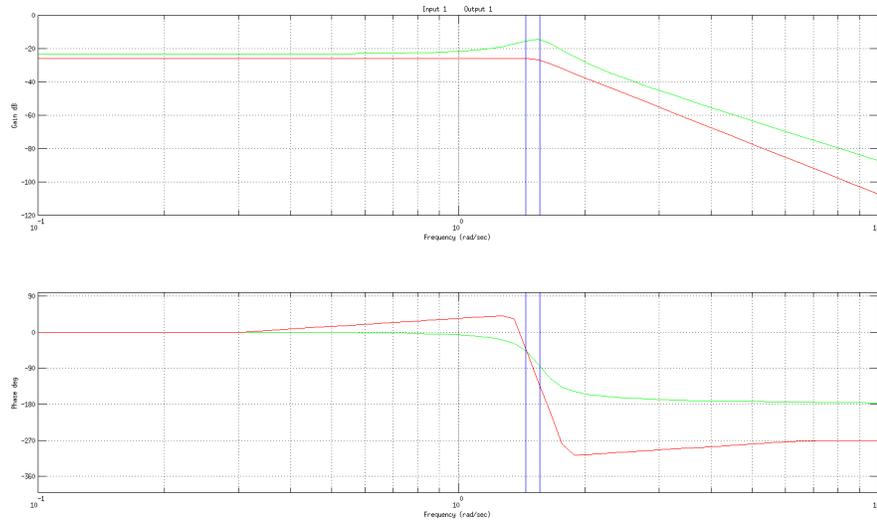


Figura 2: Diagramma di Bode (in blu) e diagramma di Bode asintotico (in rosso)

C Poiché il sistema risulta essere instabile si sceglie di procedere preliminarmente alla sintesi di un controllore stabilizzante  $C_1(s)$  utilizzando ad esempio il luogo delle radici, per poi progettare un secondo controllore  $C_2(s)$  che faccia rispettare al nostro sistema le specifiche di progetto (vedi la figura 3 per una rappresentazione a blocchi del sistema con l'ingresso di controllo  $u$  e l'uscita di misura  $y = r$ , ed il montaggio di figura 4 per il sistema controllato).

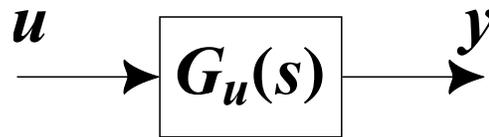


Figura 3: Diagramma a blocchi del sistema.

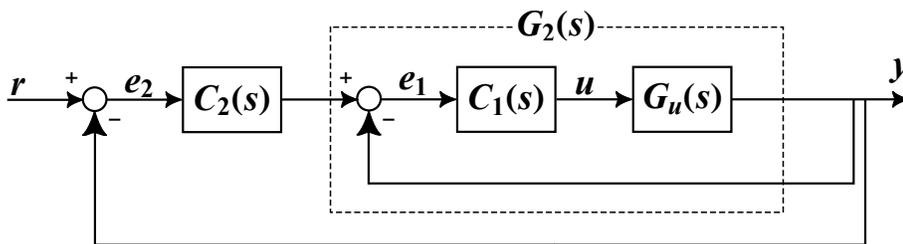


Figura 4: Diagramma a blocchi del sistema con controllo in cascata.

Per stabilizzare il sistema si può innanzitutto utilizzare un guadagno negativo del controllore in modo da riportarsi nel luogo diretto; successivamente, basta inserire un'azione anticipatrice al fine di mantenere per un certo intervallo tutti i rami del luogo nel semipiano stabile. Un esempio di

controllore stabilizzante è il seguente:

$$C_1(s) = -1.25 \cdot 10^5 \frac{s^2 + 0.3s + 2.45}{(s + 100)^2}.$$

In figura 5 si può vedere il luogo delle radici di  $G_u(s)$  mentre in figura 6 è rappresentato il luogo delle radici del sistema  $C_1(s)G_u(s)$ , ovvero in seguito al progetto del controllore stabilizzante  $C_1(s)$ .

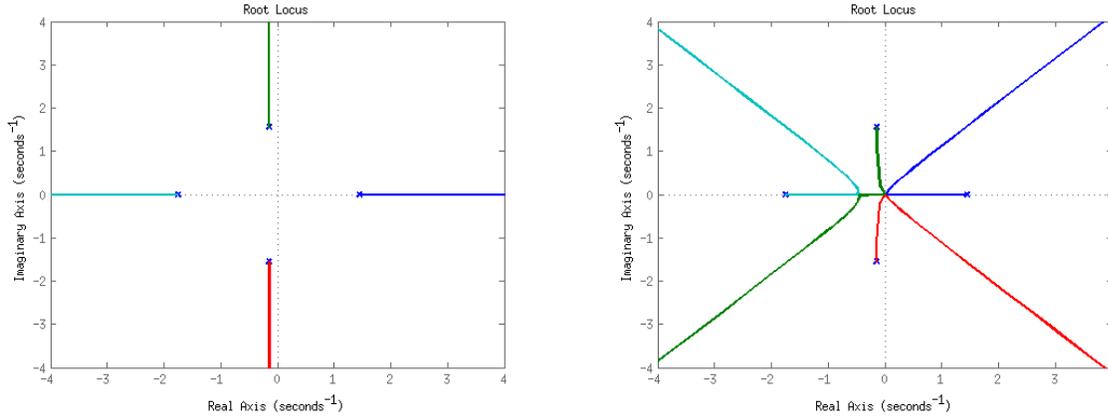


Figura 5: Luogo delle radici del sistema prima della compensazione. Nella figura di sinistra si ha il luogo inverso, in quella di destra il luogo diretto (a cui ci riportiamo ponendo un controllore con costante negativa)

La funzione di trasferimento  $G_2$  che si ottiene chiudendo l'anello risulta:

$$G_2(s) = 52554 \frac{s^2 + 0.3s + 2.45}{(s^2 + 0.3804s + 2.449)(s^2 + 0.1142s + 2.727)(s^2 + 200.1s + 1.002 \cdot 10^4)}.$$

Adesso passiamo a progettare un controllore per soddisfare le specifiche. Tale controllore sarà del tipo

$$C_2(s) = \frac{K}{s^t} C_0(s), \text{ con } C_0(0) \geq 1.$$

Le specifiche da rispettare sono:

- errore a regime nullo;
- assestamento entro un intervallo di  $\pm 1$  cm entro un tempo di 7 sec, ovvero un tempo di assestamento al 2.5% di 7 sec.
- sovralongazione massima ammessa di 0.1 m ( $L/2 - 40$  cm) per un gradino di 0.4 m:  $S\% = 25\%$ .

Si può cercare di rispettare tali specifiche con un controllo che punti ad approssimare il sistema in ciclo chiuso con un sistema a due poli dominanti, per il quale le specifiche si traducono come segue:

$$S\% = 100 e^{-\frac{\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}} \leq 25\% \implies \delta > 0.4 \implies M_\phi \simeq 100 \delta \simeq 40^\circ$$

$$T_{a2.5} \simeq \frac{-\ln(\frac{2.5}{100}) - \frac{1}{2} \ln(1 - \delta^2)}{\delta \omega_T} \implies \omega_T > \frac{9.44}{T_{a2.5}} \simeq 1.35 \text{ rad/s}.$$

Per quanto riguarda l'errore a regime nullo serve che la funzione d'anello abbia un polo nell'origine: essendo che questo non è presente nel sistema a seguito dell'inserimento del controllore stabilizzante, si procede al suo inserimento all'interno del controllore per il rispetto delle specifiche.

La figura 7 mostra il diagramma di Bode di  $G_2(s)$  con la specifica sulla banda passante.

Il controllore può essere progettato inserendo per prima cosa il polo nell'origine. Per avere poi un sistema stabile in anello chiuso è necessario aumentare il margine di fase, per cui si procede all'inserimento di una coppia di zeri complessi coniugati prima della pulsazione di taglio di interesse, inserendo anche un polo in alta frequenza per la causalità.

Un controllore che permette al sistema di rispettare tutte le specifiche, compresa la causalità, è il seguente:

$$C_2(s) = 58 \frac{(s + 1.65)^2}{s(s + 100)}.$$

In figura 8 si vede come le specifiche siano rispettate sul diagramma di Bode, mentre in figura 9 è riportata la risposta al gradino del sistema in ciclo chiuso. Come si può osservare le specifiche risultano rispettate. La f.d.t. del sistema in anello chiuso complessiva è la seguente:

$$G_{cl} = \frac{3.0481 \cdot 10^6 (s + 1.65)^2 (s^2 + 0.3s + 2.45)}{(s + 64.53)(s + 0.7678)(s^2 + 0.3031s + 2.453)(s^2 + 2.437s + 11.85)(s^2 + 232.6s + 1.411 \cdot 10^4)}.$$

D Il codice di una funzione che simuli la dinamica discretizzata del controllore, ad esempio implementato come una Matlab function, è riportato di seguito.

```
function out = controllore(in)

% definizione del controllore
s = tf('s');
C2 = (58 * s^2 + 191.4*s + 157.9)/(s^2 + 100*s);
% controllore in spazio di stato
C_ss = ss(C2);

% errore (in ingresso al controllore)
e = in(1);
% stato del controllore
x = in(2:end);

% campionamento: almeno 5-10 volte piu' veloce degli autovalori
% piu' veloci del controllore - controllando che questo rimanga stabile
Ts = 0.005;

% matrici discretizzate
Ad = C_ss.a*Ts + eye(size(C_ss.a));
Bd = C_ss.b*Ts;
Cd = C_ss.c;
Dd = C_ss.d;

% controllo del sistema (uscita del controllore)
u = Cd*x + Dd*e;
% nuovo stato
x = Ad*x + Bd*e;

out = [u; x];
```

Esso può essere utilizzato per simulare il sistema con controllore chiuso in retroazione con uno schema Simulink come quello di fig. 10. Da notare in particolare il blocco `memory`, necessario per mantenere traccia dello stato del controllore, ed il fatto che il blocco `Matlab-function` collegato al codice presentato ha un campionamento pari a quello del controllore stesso, ovvero 0.005 s.

in Fig. 11

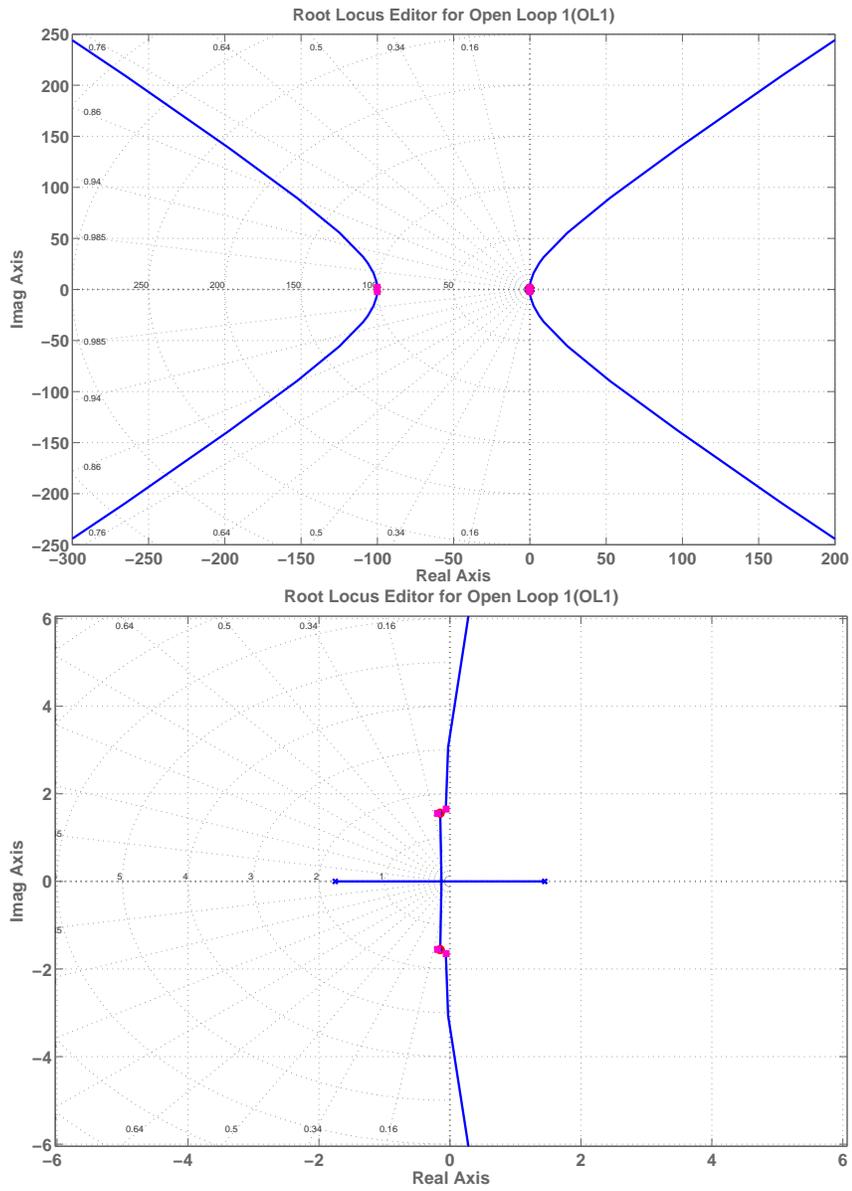


Figura 6: Luogo delle radici del sistema con controllore stabilizzante (complessivo, e zoom attorno all'origine).

Figura 7: Diagrammi di Bode della f.d.t.  $G_2(s)$  con le specifiche da rispettare.

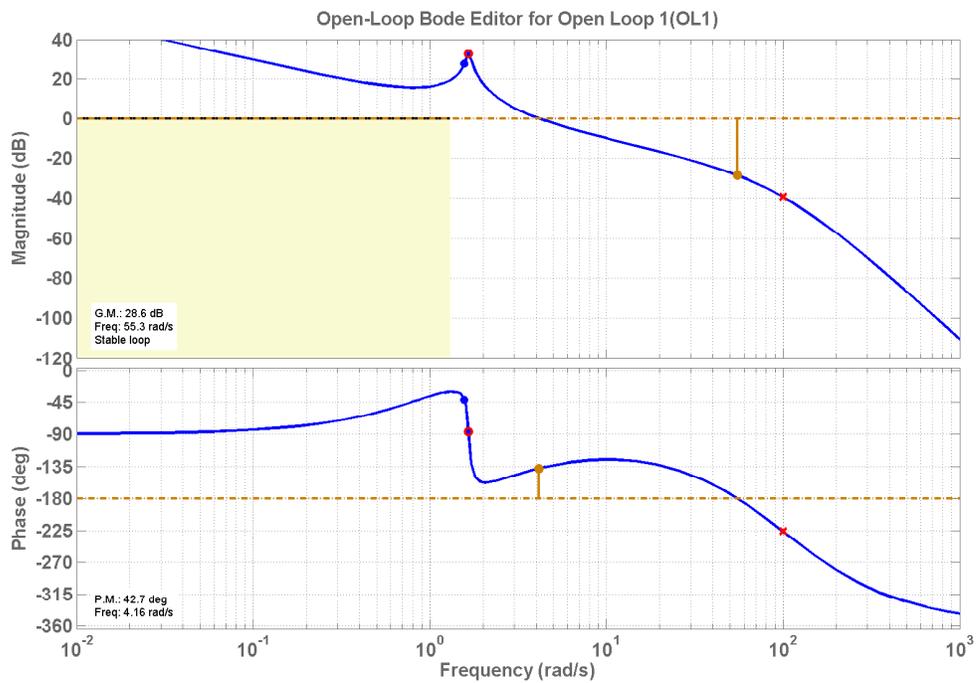


Figura 8: Diagrammi di Bode della f.d.t.  $C_2(s)G_2(s)$ .

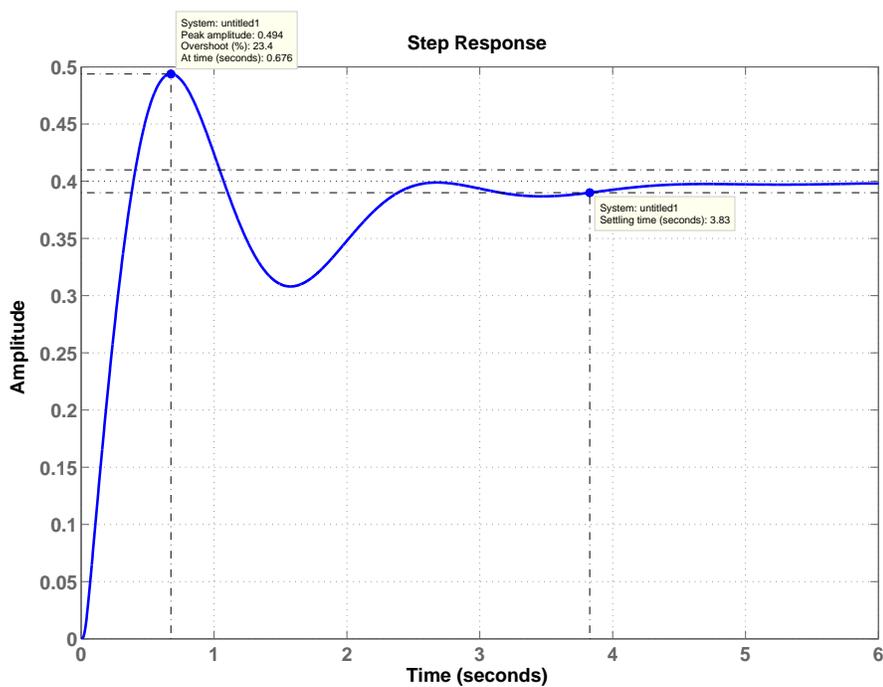


Figura 9: Risposta per ingresso a gradino del sistema controllato.

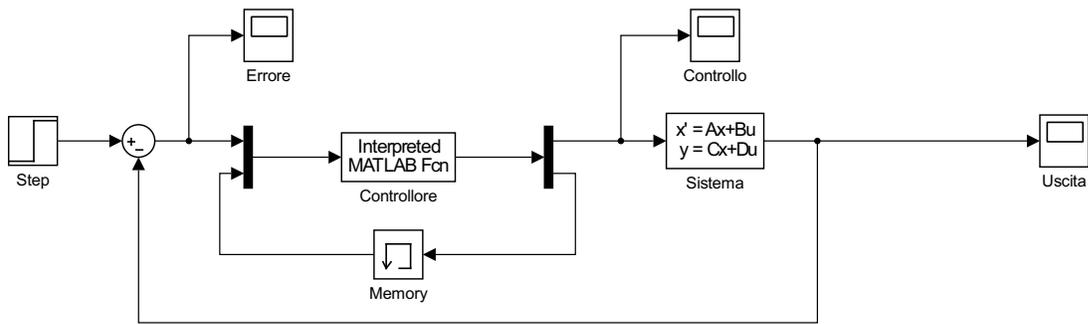


Figura 10: Schema Simulink utilizzabile per simulare la risposta del sistema in ciclo chiuso con il controllore discretizzato.

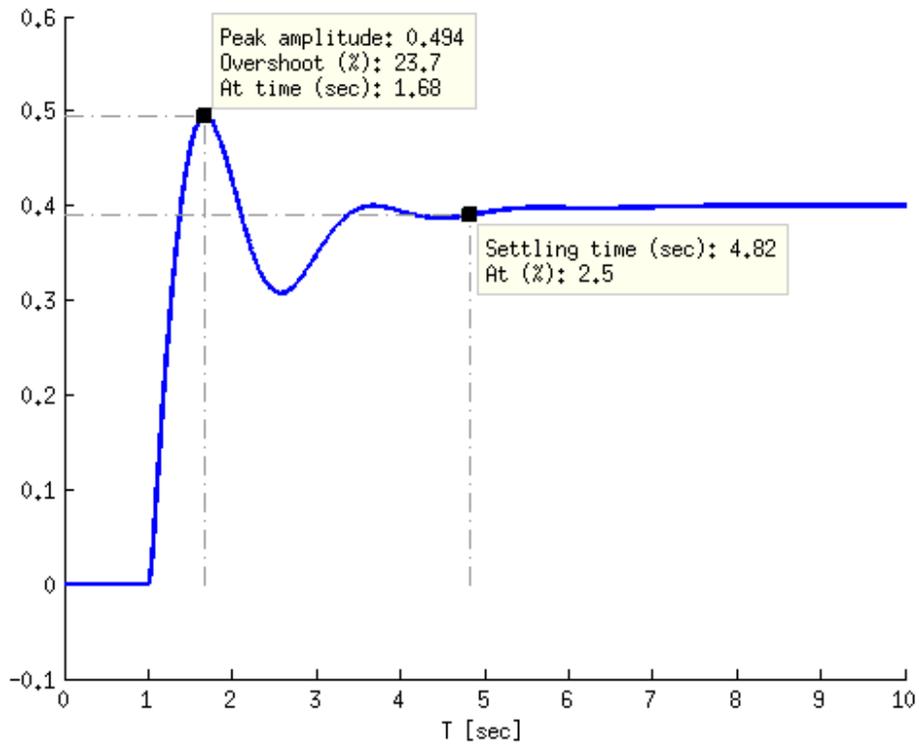


Figura 11: Risposta al gradino del sistema controllato con controllore discretizzato