

Figura 1: Schema semplificato di un piccolo corpo sommersibile comandato con camera di compensazione (elaborato da M. Barbarossa)

Si consideri la dinamica semplificata di un piccolo sommersibile di massa m nel moto di immersione ed emersione. Il sommersibile è costituito da una struttura sferica di raggio r (figura 1) composta da due ambienti, uno rigido abitabile di volume V_{amb} ed una camera di compensazione. Il controllo avviene regolando la portata di aria (fornita a pressione costante da un compressore posto su di un'imbarcazione in superficie) entrante e uscente dalla cassa attraverso una valvola di apertura u : detta m_a la massa d'aria nel sommersibile, variando quest'ultima si varia il volume della cassa di compensazione e quindi la spinta di Archimede complessiva.

Detta z la profondità d'immersione del sommersibile positiva nel verso della discesa e modellando possibili disturbi quali correnti come una forza F agente sul sommersibile, le equazioni che descrivono la dinamica del sistema (accelerazione verticale e variazione della massa d'aria) sono le seguenti:

$$\ddot{z} = -\frac{b\dot{z}}{m} + \alpha - \frac{\beta m_a}{p_0 + \rho_H g z} - \frac{F}{m}$$

$$\dot{m}_a = (p_0 + \rho_H g z) \gamma u$$

dove b è lo smorzamento viscoso dell'acqua sul sommersibile, p_0 la pressione atmosferica a livello del mare ($z = 0$), ρ_H la densità dell'acqua, e le costanti α , β e γ (riportate solo per completezza) sono definite come

$$\alpha = \frac{g}{m}(m - \rho_H V_{\text{amb}}) \quad \beta = \frac{\rho_H g R_a T_a}{m} \quad \gamma = \frac{\dot{V}_{\text{max}}}{R_a T_a}$$

in cui R_a è la costante caratteristica dell'aria, T_a la temperatura ambiente e \dot{V}_{max} la massima portata volumetrica fra il compressore ed il sommersibile.

A.1 Si determinino tutti gli equilibri fisicamente ammissibili del sistema per disturbo assente.

A.2 Supponendo di disporre della misura della posizione z , si determini una rappresentazione in forma di stato simbolica del sistema linearizzato intorno ad un equilibrio come calcolato al punto precedente per un valore della profondità $z = \bar{z}$.

Successivamente, si considerino i seguenti valori numerici:

$$m = 6 \cdot 10^3 \text{ [Kg]}, \quad g = 9.81 \text{ [m/s}^2\text{]}, \quad b = 0.03013 \text{ [N s/m]}, \quad \alpha = 0.981 \text{ [m/s}^2\text{]}, \quad \beta = 1.329 \cdot 10^5 \text{ [s}^{-4}\text{]}$$

$$\gamma = 2.45 \cdot 10^{-6} \text{ [m s]}, \quad \rho_H = 10^3 \text{ [Kg/m}^3\text{]}, \quad p_0 = 10^5 \text{ [Pa]}, \quad \bar{z} = 300 \text{ [m]}$$

A.3 Si determinino le funzioni di trasferimento tra l'ingresso u e l'uscita z e tra il disturbo F e la medesima uscita. Si discuta inoltre la stabilità dell'equilibrio del sistema linearizzato dando un'interpretazione fisica del risultato.

A.4 Si determini una legge di controllo per u che agisca in modo tale da garantire che:

A.4.1 il sommergibile si sposti, dalla configurazione di equilibrio precedentemente calcolata, di 20 m verso il basso, senza superare tale posizione di oltre 1 m, con un errore a regime non oltre l'1%, ed entrando senza più uscirne in un intervallo di ± 50 cm rispetto al valore di regime entro al più 50 sec.

A.4.2 in corrispondenza di un disturbo di forza (in N) del tipo

$$F = -450 + 1200 \sin(0.5\pi t) + 300 \cos(0.9\pi t)$$

non si abbia a regime uno spostamento del sommergibile superiore a 25 cm.

Si riportino quindi:

- il diagramma di Bode dell'impianto con le specifiche da rispettare;
- il controllore progettato;
- il diagramma di Bode della funzione d'anello aperto con le relative specifiche rispettate;
- il diagramma a blocchi del sistema prima e dopo l'inserimento del controllore;
- la risposta al gradino del sistema controllato con le caratteristiche significative.

B Date due funzioni di trasferimento instabili G_1 e G_2 , discutere in quali dei seguenti casi è possibile ottenere una funzione di trasferimento globale che sia stabile:

- G_1 e G_2 connessi in serie
- G_1 e G_2 connessi in parallelo
- G_1 e G_2 connessi in retroazione

C Si riporti un esempio di funzione di trasferimento per ognuno dei seguenti tipi di sistema:

- sistema passa-basso
- sistema passa-alto
- sistema passa-banda

Soluzione

A.1 Indicando con $x = [z \dot{z} m_{air}]^T$ il vettore di stato ed imponendo le condizioni di equilibrio, $\dot{x} = 0$ con $W = 0$ si ottiene:

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha - \frac{\beta \bar{m}_a}{p_0 + \rho_H g \bar{z}} \\ 0 &= (p_0 + \rho_H g \bar{z}) \gamma \bar{u}. \end{aligned}$$

Dalla prima equazione si ottiene l'espressione della massa d'aria \bar{m}_a in funzione di \bar{z}

$$\bar{m}_a = \frac{\alpha}{\beta} (p_0 + \rho_H g \bar{z})$$

mentre dalla seconda, essendo questa una moltiplicazione, si ricavano due diverse condizioni:

- $\bar{u} = 0$
- $\bar{z} = -\frac{p_0}{\rho_H g}$

dato che il rapporto contiene solo quantità positive, la seconda condizione richiede che sia $z < 0$, ovvero una posizione al di sopra del livello del mare. Dunque l'unica soluzione che ha senso fisico è quella con $\bar{u} = 0$ e $\bar{z} > 0$ qualsiasi.

A.2 Indicando con $\tilde{x} = [\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3]^T = [x_1 - \bar{z}, x_2, x_3 - \bar{m}_a]^T$, il vettore delle variabili di stato traslate nell'equilibrio e con $\tilde{u} = [\tilde{u}_1, \tilde{u}_2]^T = [u - \bar{u}, W]^T$ il vettore degli ingressi anch'essi traslati, il sistema non lineare scritto in forma di stato traslato attorno all'equilibrio è

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_1 = \tilde{x}_2 \\ \dot{\tilde{x}}_2 = -\frac{b}{m} \tilde{x}_2 + \alpha - \beta \frac{\tilde{x}_3 + \bar{m}_a}{p_0 + \rho_H g (\tilde{x}_1 + \bar{z})} - \frac{\tilde{u}_2}{m} \\ \dot{\tilde{x}}_3 = (p_0 + \rho_H g (\tilde{x}_1 + \bar{z})) \gamma (\tilde{u}_1 + \bar{u}) \end{cases}$$

Linearizzando il sistema attorno all'origine, essendo questo l'equilibrio delle nuove variabili \tilde{x} e \tilde{u} , si ottiene il sistema linearizzato approssimato nella consueta forma di stato

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \tag{1}$$

dove,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{\beta g \rho_H \bar{m}_a}{(p_0 + g \rho_H \bar{z})^2} & -\frac{b}{m} & -\frac{\beta}{p_0 + g \rho_H \bar{z}} \\ g \gamma \rho_H \bar{u} & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{\alpha g \rho_H}{p_0 + g \rho_H \bar{z}} & -\frac{b}{m} & -\frac{\beta}{p_0 + g \rho_H \bar{z}} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{m} \\ \gamma (p_0 + g \rho_H \bar{z}) & 0 \end{bmatrix},$$

$$C = [1 \quad 0 \quad 0],$$

$$D = [0 \quad 0].$$

A.3 Sostituendo i valori numerici assegnati si ottiene:

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0.0032 & -5 \cdot 10^{-6} & -0.0437 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ B &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -0.0002 \\ 7.4858 & 0 \end{bmatrix}, \\ C &= [1 \quad 0 \quad 0], \\ D &= [0 \quad 0]. \end{aligned}$$

La funzione di trasferimento tra l'ingresso di controllo $u_1 = u$ e l'uscita $y = z$ è

$$G_u(s) = \frac{-0.327}{s(s - 0.05623)(s + 0.05624)}.$$

mentre quella tra l'ingresso di disturbo $u_2 = W$ e l'uscita $y = z$ è

$$G_d(s) = \frac{-0.000167}{(s - 0.05623)(s + 0.05624)}.$$

Come si può direttamente osservare, esse presentano un polo a parte reale positiva e sono dunque instabili. Questo si può interpretare da un punto di vista fisico col fatto che se ci si trova in condizioni diverse da quelle di equilibrio, ad esempio ad una profondità inferiore, la pressione a tale profondità sarà minore e conseguentemente il volume della cassa di compensazione maggiore, avendo una maggiore spinta di Archimede ed una tendenza a spostarsi verso l'alto e divergendo. Stesse considerazioni, all'opposto, si possono fare per il caso di profondità superiori a quella di equilibrio.

In figura 2 è riportato il diagramma a blocchi rappresentante il sistema con due ingressi (di controllo u e di disturbo F) e l'uscita di misura $y = z$.

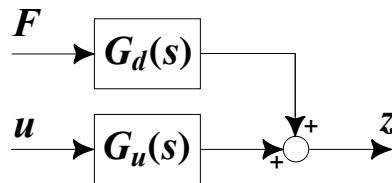


Figura 2: Diagramma a blocchi del sistema.

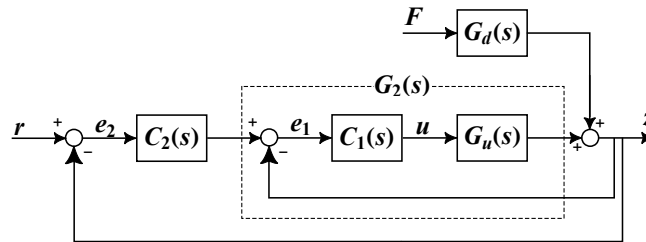


Figura 3: Diagramma a blocchi del sistema con controllo in cascata.

A.4 Il sistema risulta essere instabile per cui si sceglie di procedere preliminarmente alla sintesi di un controllore stabilizzante $C_1(s)$ utilizzando ad esempio il luogo delle radici, per poi progettare un secondo controllore $C_2(s)$ che faccia rispettare al nostro sistema le specifiche di progetto (vedi il montaggio di figura 3). Per stabilizzare il sistema si può inserire un'azione anticipatrice al fine di attrarre tali rami nel semipiano stabile. Un esempio di controllore stabilizzante è il seguente:

$$C_1(s) = -435 \frac{(s + 0.25)^2}{(s + 10)^2}$$

costituito da due reti anticipatrici reali. In figura 4 si può vedere il luogo delle radici di $G_u(s)$ mentre in figura 5 è rappresentato il luogo delle radici del sistema $C_1(s)G_u(s)$, ovvero in seguito al progetto del controllore stabilizzante $C_1(s)$.

La funzione di trasferimento G_2 che si ottiene chiudendo l'anello risulta:

$$G_2(s) = \frac{142.22 (s + 0.25)^2}{(s + 13.22)(s + 4.876)(s + 0.8772)(s + 0.8421)(s + 0.1867)}$$

Adesso passiamo a progettare un controllore per soddisfare le specifiche. Tale controllore sarà del tipo

$$C_2(s) = \frac{K}{s^t} C_0(s), \text{ con } C_0(0) \geq 1.$$

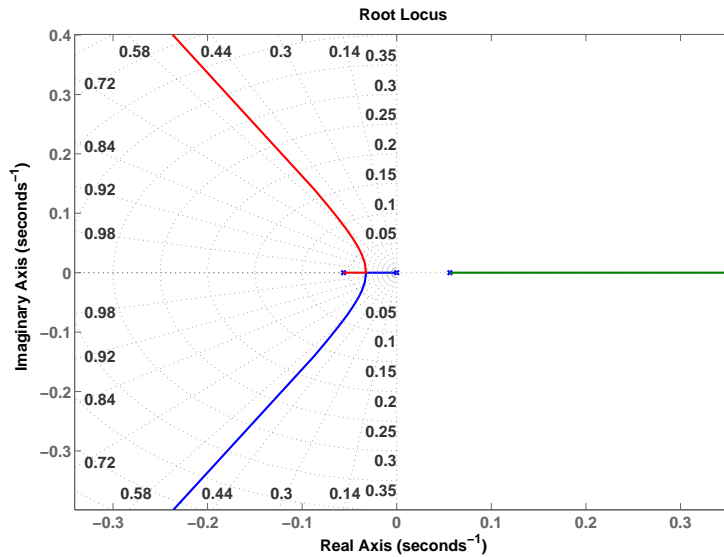


Figura 4: Luogo delle radici del sistema prima della compensazione.

A.4.1 Le specifiche da rispettare sono:

- sovraelongazione massima ammessa di 1 m per un gradino di 20 m: $S_{\%} = 5\%$;
- assestamento entro un intervallo di ± 50 cm entro un tempo di 50 sec, ovvero un tempo di assestamento al 2.5% di 10 sec.
- errore a regime inferiore all'1%

Si può cercare di rispettare tali specifiche con un controllo che punti ad approssimare il sistema in ciclo chiuso con un sistema a due poli dominanti, per il quale le specifiche si traducono come segue:

$$S_{\%} = 100 e^{-\frac{\pi \delta}{\sqrt{1-\delta^2}}} \leq 5\% \quad \implies \quad \delta > 0.69 \quad \implies \quad M_{\phi} \simeq 100 \delta \simeq 69^{\circ}$$

$$T_{a2.5} \simeq \frac{-\ln(\frac{2.5}{100}) - \frac{1}{2} \ln(1 - \delta^2)}{\delta \omega_T} \quad \implies \quad \omega_T > \frac{5.8146}{T_{a2.5}} = 0.11629 \text{ rad/s.}$$

Si richiede inoltre che a regime si raggiunga la posizione desiderata con un errore inferiore all'1%. Sfruttando il teorema del valore finale possiamo quindi trovare il guadagno di anello aperto minimo come segue:

$$\lim_{s \rightarrow 0} s E(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + C_2(s)G_2(s)} \frac{1}{s} < 0.01.$$

Invertendo tale relazione si può ottenere il vincolo sul guadagno statico d'anello:

$$C_2(0)G_2(0) \geq 99 \quad \text{ovvero} \quad \|C_2(0)G_2(0)\|_{\text{dB}} \geq 20 \log_{10}(99) \simeq 40 \text{ dB}$$

A.4.2 Si richiede che un disturbo di forza del tipo $F = -450 + 1200 \sin(0.5\pi t) + 300 \cos(0.9\pi t)$ non produca a regime uno spostamento del sommergibile superiore a 25 cm, ovvero 0.25 m.

Per prima cosa si può notare che la f.d.t. $G_{d2}(s)$ contiene uno zero nell'origine, per cui la componente costante del disturbo è già annullata a regime.

Per quanto riguarda la componente sinusoidale applichiamo invece il teorema della risposta armonica. La funzione di trasferimento fra la trasformata $D(j\omega)$ del disturbo e la trasformata $Y(j\omega)$ dell'uscita è data da

$$Y(j\omega) = \frac{G_{d2}(j\omega)}{1 + C_2(j\omega)G_2(j\omega)} D(j\omega) = \bar{G}(j\omega) D(j\omega), \quad (2)$$

dove

$$G_{d2}(j\omega) = \frac{G_d(j\omega)}{1 + C_1(j\omega)G_u(j\omega)} \quad (3)$$

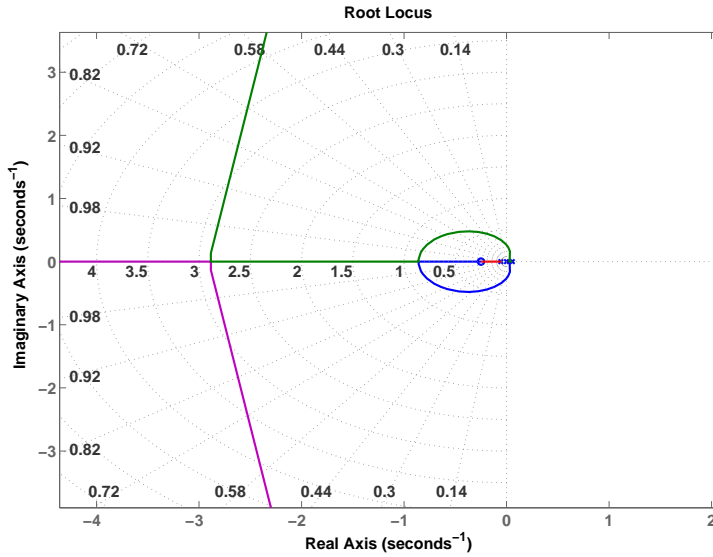


Figura 5: Luogo delle radici del sistema con controllore stabilizzante.

è la f.d.t. tra il disturbo e l'uscita dopo l'inserimento del controllore stabilizzante.

La componente dell'uscita dovuta ad un disturbo sinusoidale ad una frequenza generica ω_k sarà quindi del tipo

$$y(t) = |\bar{G}(j\omega_k)| |D(j\omega_k)| \sin(t + \angle \bar{G}(j\omega_k)). \quad (4)$$

Facendo riferimento al caso cautelativo in cui $\sin(\omega_k t + \angle \bar{G}(j\omega_k)) = 1$, e considerando di aumentare il modulo $|\bar{G}(j\omega)|$ con il suo valore massimo nel range di frequenze d'interesse, il modulo della componente sinusoidale del disturbo da considerare è pari a $1200 + 300 = 1500$ N.

Il controllo deve dunque essere scelto in modo tale che

$$|\bar{G}(j\omega)| = \frac{|G_{d2}(j\omega)|}{|1 + C_2(j\omega) G_2(j\omega)|} \leq \frac{0.25}{1500} \approx 1.67 \cdot 10^{-4} \quad \forall \omega \leq \omega_d, \quad (5)$$

dove ω_d viene scelta come la massima frequenza del disturbo, ovvero $0.9\pi \simeq 2.83$ rad/s.

Poiché a bassa frequenza è ragionevole applicare l'approssimazione $|1 + C_2(j\omega) G_2(j\omega)| \approx |C_2(j\omega) G_2(j\omega)|$, il controllore deve soddisfare

$$|C_2(j\omega) G_2(j\omega)| \geq \frac{|G_{d2}(j\omega)|}{1.67 \cdot 10^{-4}}. \quad (6)$$

Notando infine che nel campo frequenziale d'interesse (vedi figura 6) si ha $|G_{d2}(j\omega)| < -71$ dB e $20 \log_{10}(1.67 \cdot 10^{-4}) \approx -75.5$ dB, il guadagno d'anello per soddisfare questa specifica deve essere superiore a $-71 - (-75.5) = 4.5$ dB per frequenze minori di 2.83 rad/s.

La figura 7 mostra il diagramma di Bode di $G_2(s)$ con le specifiche sul guadagno statico e sul guadagno in bassa frequenza che devono essere rispettate per l'errore a regime e l'attenuazione dei disturbi.

Il controllore può essere progettato aumentando per prima cosa il guadagno statico in modo da stare al di sopra della barriera di 40 dB. Per avere poi un taglio ad una frequenza in cui sia possibile rispettare il margine di fase, si inserisce una rete a ritardo complessa coniugata e, infine, per aumentare la fase attorno alla pulsazione di taglio che ci permetta di stare al di sopra delle specifiche sul guadagno in bassa frequenza, si inserisce una rete ad anticipo reale.

Un controllore che permette al sistema di rispettare tutte le specifiche, compresa la causalità, è il seguente:

$$C_2(s) = \frac{59.843 (s + 0.2382)^2 (s + 4.873)}{(s + 0.03993)^2 (s + 99.69)}.$$

In figura 8 si vede come le specifiche siano ampiamente rispettate sul diagramma di Bode, mentre in figura 9 è riportata la risposta al gradino del sistema in ciclo chiuso. Come si può osservare le specifiche

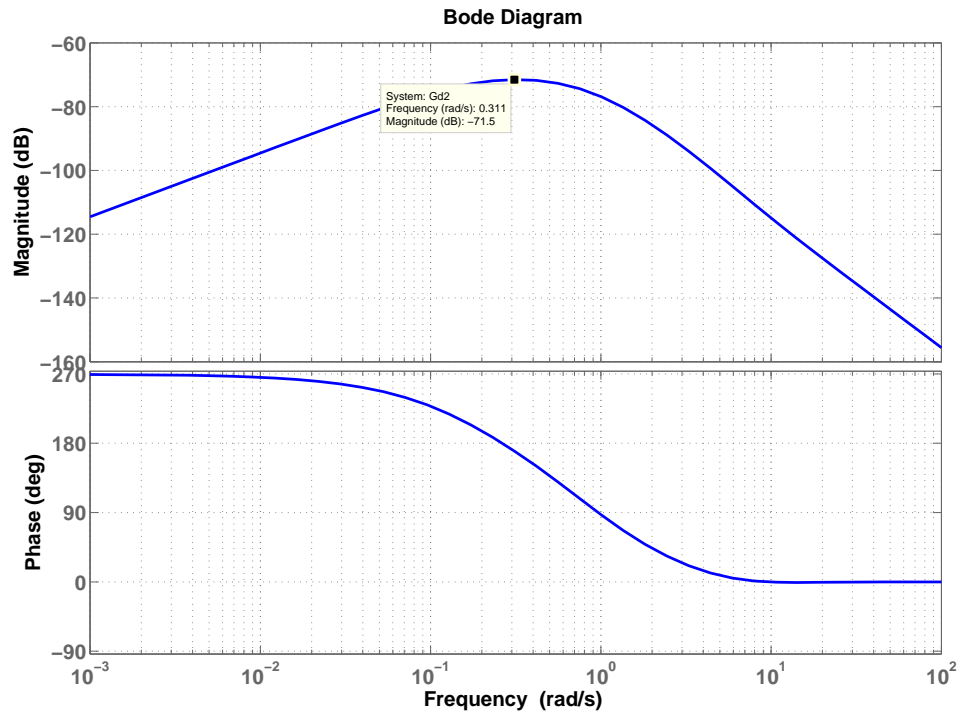


Figura 6: Diagramma di Bode della f.d.t. $G_{d2}(s)$.

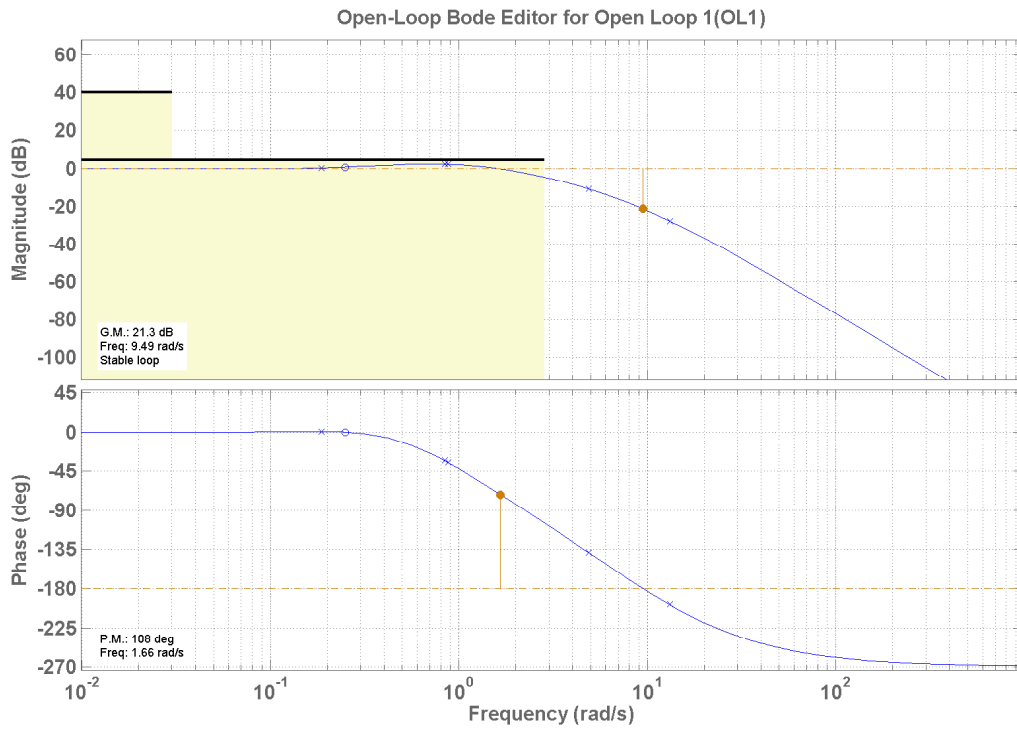


Figura 7: Diagrammi di Bode della f.d.t. $G_2(s)$ con le specifiche da rispettare.

risultano rispettate. La f.d.t. del sistema in anello chiuso complessiva è la seguente:

$$G_{cl} = \frac{8510.6 (s + 4.873) (s + 0.25)^2 (s + 0.2382)^2}{(s + 100.7) (s + 4.871) (s + 0.421) (s + 0.1915) (s^2 + 0.3471s + 0.03837) (s^2 + 13.27s + 97.9)} \cdot (7)$$

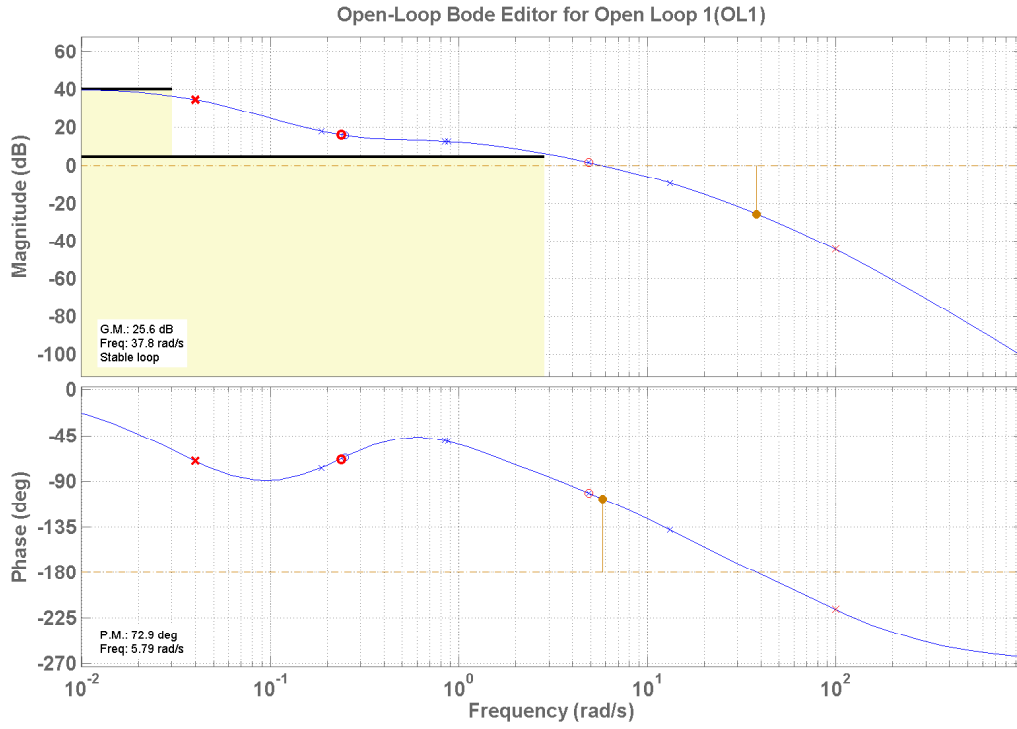


Figura 8: Diagrammi di Bode della f.d.t. $C_2(s)G_2(s)$.

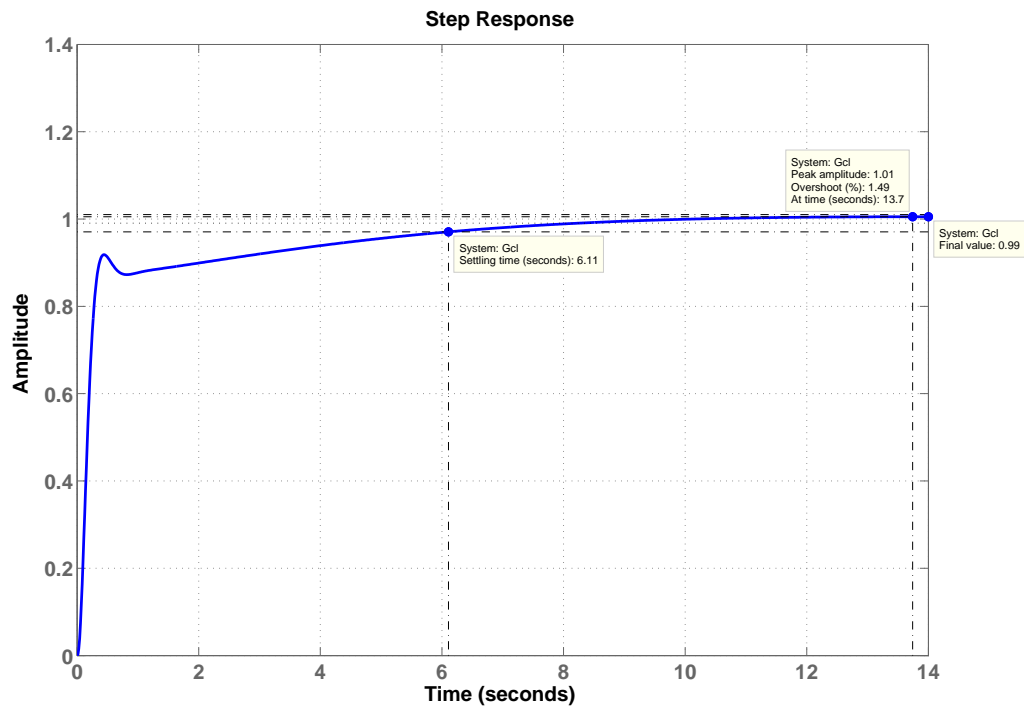


Figura 9: Risposta per ingresso a gradino del sistema controllato.

B I poli della f.d.t. del sistema serie sono l'unione dei poli dei G_1 e G_2 , quindi se anche uno solo dei due sistemi è instabile, tale rimane la serie. Si noti che una eventuale cancellazione polo/zero tra due sistemi diversi non può essere considerata stabilizzante. Da un punto di vista pratico, la cancellazione non sarà infatti mai perfetta, ed anche una piccolissima differenza tra la posizione del polo e dello zero porterebbe alla permanenza di un modo divergente nella antitrasformata che, per quanto associato ad un residuo molto piccolo, per tempi sufficientemente lunghi porta il sistema in divergenza. Da un punto di vista teorico, anche una cancellazione esatta non può essere considerata stabilizzante, perché il modo corrispondente rimane nel sistema, pur non essendo visibile nel rapporto ingresso-uscita per una perdita di controllabilità o di osservabilità (concetti che saranno visti in corsi più avanzati). In modo del tutto analogo si ottiene che la f.d.t. del sistema parallelo di due sistemi instabili rimane instabile. Ovviamente, questo non è il caso per una retroazione di sistemi instabili: all'opposto, si verificano spesso casi di sistemi instabili che possono essere stabilizzati solamente da controllori anch'essi instabili.