

Figura 1: Sistema meccanico di una pressa in fase di compressione

Il sistema di Fig.1 rappresenta lo schema meccanico di una pressa nella fase di deformazione di un oggetto piano di altezza  $L$ . Il pezzo da deformare è posizionato sull'incudine ④ e durante la compressione è modellato come una molla di costante elastica  $k_s$  e lunghezza a riposo  $L$  in parallelo ad uno smorzatore con coefficiente di smorzamento  $b$  agenti fra l'incudine e lo stampo mobile ③, il quale ha massa  $M$ . Lo stampo ③ e la slitta ② sono collegati tramite un elemento elastico di costante elastica  $k$ . La traslazione della slitta avviene attuando la ruota scanalata ① con momento di inerzia  $J$  attorno all'asse di rotazione. La ruota ① presenta sulla parte frontale una scanalatura a spirale in cui si impegna un dentino ricavato nella slitta e visibile nello strappo in Fig.1. La geometria della spirale conferisce alla slitta la legge di moto:

$$\alpha(\theta) = n (1 - e^{-\theta})$$

dove  $\theta$  è la posizione della ruota e per  $\theta = 0$  lo stampo è completamente aperto.

Detta  $z$  la posizione della superficie di contatto dello stampo ③, si sceglie tale coordinata per far sì che la molla di costante elastica  $k$  sia a riposo per per  $\theta = 0$  e  $z = 0$ .

Sulla ruota è applicata una coppia motrice  $\tau$  con la quale si controlla la deformazione del pezzo da stampare e quindi la posizione della superficie inferiore dello stampo  $z$ , sul quale può agire una forza di attrito non nota a priori e modellata come un disturbo  $F$ . Le equazioni dinamiche del sistema sono:

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} &= \frac{\tau}{J} + \frac{k}{J} \frac{\partial \alpha(\theta)}{\partial \theta} (z - \alpha(\theta)) \\ \ddot{z} &= g - \frac{F}{M} - \frac{b}{M} \dot{z} - \frac{k_s}{M} (L - H + z) - \frac{k}{M} (z - \alpha(\theta)). \end{aligned}$$

### Esercizio A

**A.1** Si trovi lo stato di equilibrio del sistema considerando la pressa appena in contatto con il pezzo di altezza  $L$  appoggiato sul piano ( $\bar{z} = H - L$ ) in assenza di disturbo esterno  $F$ .

**A.2** Si riporti il sistema in forma di stato linearizzato attorno al punto di equilibrio trovato precedentemente.

**A.3** Considerando i seguenti valori numerici:

$$J = 5 \text{ Kg m}^2/\text{rad}; \quad M = 5 \text{ Kg}; \quad n = 0.35 \text{ m}; \quad k = 500 \text{ N/m}; \quad k_s = 10^3 \text{ N/m}; \quad L = 0.1 \text{ m}; \\ H = 0.2 \text{ m}; \quad b = 200 \text{ N s/m}; \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2$$

Supponendo di avere accesso all'uscita di misura  $y = z$ , si determini la funzione di trasferimento tra la coppia motrice  $\tau$  e l'uscita e quella fra il disturbo esterno  $F$  e l'uscita. Se ne discuta inoltre la stabilità.

**A.4** Si sintetizzi un controllore per la coppia  $\tau$  tale da:

- portare la superficie della pressa in contatto con il pezzo a 4 cm dal piano di lavoro ④ senza mai avvicinarsi ulteriormente, accettando a regime una tolleranza del 1% e raggiungendo il 95% del valore di regime entro un tempo non superiore a 3 secondi.
- reiettare un disturbo del tipo  $F = 0.01 + 0.02 \sin(2\pi 0.03t + \phi)$  affinché in uscita non si abbia un errore superiore a 0.8 mm.

Si riportino quindi:

- il diagramma di Bode della funzione di anello aperto con le relative specifiche da rispettare;
- il controllore progettato;
- il diagramma a blocchi del sistema con il controllore progettato;
- la risposta al gradino del sistema controllato con le caratteristiche significative.

**A.5** Si riporti il codice MATLAB per simulare la dinamica discretizzata del controllore ottenuto.

### Esercizio B

**B.1** Considerando il seguente sistema  $G_1 = \frac{(s-1)}{(s+\beta^2)(\beta s+2)}$  si discuta della stabilità del sistema al variare del parametro  $\beta$  utilizzando il criterio di Routh.

**B.2** Per il valore  $\beta = -1$  si disegni il luogo delle radici riportando i calcoli necessari al disegno e si sintetizzi un controllore che stabilizzi il sistema, motivando le scelte di progetto effettuate.

### Esercizio C

Si consideri la risposta al gradino presentata in Figura 2 per due diverse scale temporali. Descrivere il modello del sistema più semplice che può presentare un andamento simile.

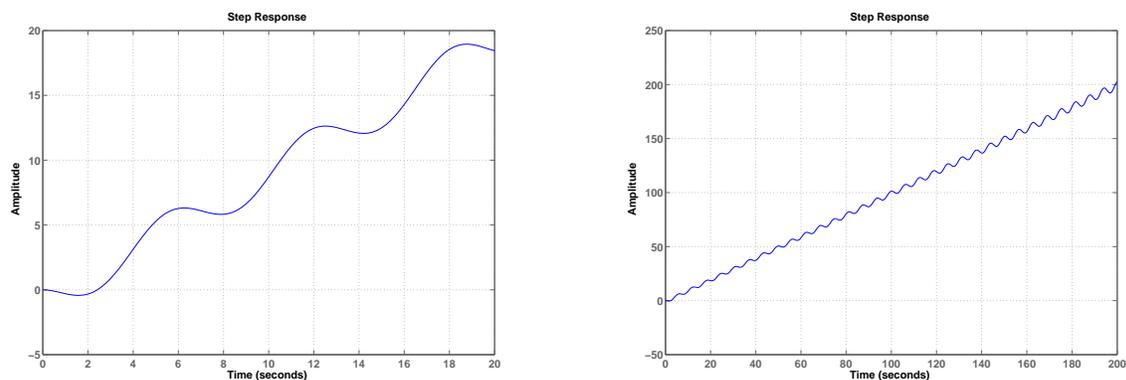


Figura 2: Risposta al gradino per due diverse scale temporali.

## Soluzione

**A.1** Indicando con  $x = [\theta \ z \ \dot{\theta} \ \dot{z}]^T$  il vettore di stato ed imponendo le condizioni di equilibrio,  $\dot{z} = 0$ ,  $\dot{\theta} = 0$  con  $F = 0$ ,  $z = \bar{z} = H - L$  e  $\theta = \bar{\theta}$  si ottiene

$$\begin{cases} 0 = \frac{\bar{\tau}}{J} + \frac{k}{J} \frac{\partial \alpha}{\partial \theta}(\bar{\theta}) (\bar{z} - \alpha(\bar{\theta})) \\ 0 = g - \frac{k_s}{M}(L - H + \bar{z}) - \frac{k}{M}(\bar{z} - \alpha(\bar{\theta})) = g - \frac{k}{M}(\bar{z} - \alpha(\bar{\theta})) \end{cases} \quad (1)$$

da cui si ottiene l'equilibrio

$$\begin{cases} \bar{\theta} = \alpha^{-1} \left( \bar{z} - \frac{Mg}{k} \right) \\ \bar{\tau} = k \frac{\partial \alpha}{\partial \theta}(\bar{\theta}) (\alpha(\bar{\theta}) - \bar{z}) = k \frac{\partial \alpha}{\partial \theta}(\bar{\theta}) \left( -\frac{Mg}{k} \right) = -Mg \frac{\partial \alpha}{\partial \theta}(\bar{\theta}) \end{cases} \quad (2)$$

dove

$$\alpha^{-1}(x) = -\ln \left( 1 - \frac{x}{n} \right) \quad \frac{\partial \alpha}{\partial \theta}(\bar{\theta}) = n e^{-\bar{\theta}} \quad (3)$$

**A.2** Indicando con  $\tilde{\xi} = [\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2, \tilde{\xi}_3, \tilde{\xi}_4]^T = [\theta - \bar{\theta}, z - \bar{z}, \dot{\theta}, \dot{z}]^T$ , il vettore delle variabili di stato traslate nell'equilibrio e con  $\tilde{u} = [\tilde{u}_1, \tilde{u}_2]^T = [\tau - \bar{\tau}, F]^T$  il vettore degli ingressi anch'essi traslati, il sistema non lineare scritto in forma di stato traslato attorno all'equilibrio è

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\xi}}_1 = \tilde{\xi}_3 \\ \dot{\tilde{\xi}}_2 = \tilde{\xi}_4 \\ \dot{\tilde{\xi}}_3 = \frac{\bar{\tau} + u_1}{J} + \frac{k}{J} (\bar{z} + \tilde{\xi}_2 - \alpha(\bar{\theta} + \tilde{\xi}_1)) \frac{\partial \alpha}{\partial \theta}(\bar{\theta} + \tilde{\xi}_1) \\ \dot{\tilde{\xi}}_4 = g - \frac{u_2}{M} - \frac{b}{M} \tilde{\xi}_4 - \frac{k_s}{M}(L - H + \bar{z} + \tilde{\xi}_2) - \frac{k}{M}(\bar{z} + \tilde{\xi}_2 - \alpha(\bar{\theta} + \tilde{\xi}_1)) \end{cases} \quad (4)$$

Linearizzando il sistema attorno all'origine, essendo questo l'equilibrio delle nuove variabili  $\tilde{\xi}$  e  $\tilde{u}$ , si ottiene il sistema linearizzato approssimato nella consueta forma di stato

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \quad (5)$$

dove,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k \left( \left( \frac{\partial \alpha}{\partial \theta}(\bar{\theta}) \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \theta^2}(\bar{\theta}) \right) (\alpha(\bar{\theta}) - \bar{z}) \right)}{J} & \frac{k}{J} \left( \frac{\partial \alpha}{\partial \theta}(\bar{\theta}) \right) & 0 & 0 \\ \frac{k}{M} \left( \frac{\partial \alpha}{\partial \theta}(\bar{\theta}) \right) & -\frac{k + k_s}{M} & 0 & -\frac{b}{M} \end{bmatrix}, \quad (6)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{J} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{M} \end{bmatrix},$$

$$C = [0 \ 1 \ 0 \ 0],$$

$$D = [0 \ 0],$$

e

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial \theta^2}(\bar{\theta}) = -n e^{-\bar{\theta}}. \quad (7)$$

**A.3** Sostituendo i valori numerici riportati si ottengono le seguenti matrici:

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -15.53 & 34.81 & 0 & 0 \\ 34.81 & -300 & 0 & -40 \end{bmatrix}, \\
 B &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0.2 & 0 \\ 0 & -0.2 \end{bmatrix}, \\
 C &= [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0], \\
 D &= [0 \quad 0].
 \end{aligned} \tag{8}$$

La funzione di trasferimento tra la coppia applicata  $\tau$  e l'uscita  $y = z$  è:

$$G_u = \frac{6.962}{(s + 30.07)(s + 9.437)(s^2 + 0.4978s + 12.15)}$$

mentre la funzione di trasferimento tra il disturbo e l'uscita risulta:

$$G_d = \frac{-0.2(s^2 + 15.53)}{(s + 30.07)(s + 9.437)(s^2 + 0.4978s + 12.15)}$$

I poli delle due funzioni di trasferimento sono a parte reale negativa, quindi queste risultano asintoticamente stabili.

In figura 3 è riportato il diagramma a blocchi rappresentante il sistema con due ingressi (di controllo  $\tau$  e di disturbo  $F$ ) e l'uscita di misura  $y = z$ .

Figura 3: Diagramma a blocchi del sistema.

**A.4** Poiché il sistema risulta già stabile è possibile progettare un controllore per soddisfare le specifiche. Tale controllore sarà del tipo

$$C(s) = \frac{K}{s^t} C_0(s), \text{ con } C_0(0) \geq 1.$$

**A.4.1** Si richiede che la posizione finale venga raggiunta senza essere mai superata, per cui è conveniente procedere al progetto di un controllore tale da approssimare il sistema in anello chiuso ad un sistema del primo ordine. Considerando questo possiamo già dire che il sistema deve avere un margine di fase  $\phi \simeq 90^\circ$  e tagliare ad una pulsazione  $\omega_T$  con una pendenza di  $-20$  dB/dec. A regime inoltre si accetta un errore costante per cui è sufficiente un controllore di tipo 0. Con la specifica sul tempo di assestamento al 5% si identifica la pulsazione di taglio  $\omega_T$  per i sistemi del primo ordine:

$$\omega_T > \frac{3}{T_a} = 1 \text{ rad/s}$$

Si richiede che il sistema abbia a regime un errore inferiore all'1% per un ingresso a gradino. Sfruttando il teorema del valore finale possiamo quindi trovare il guadagno di anello aperto minimo come segue:

$$\lim_{s \rightarrow 0} s E(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + C(s)G_u(s)} \frac{1}{s}.$$

Essendo che a bassa frequenza  $C(s)G_u(s) \gg 1$  per cui possiamo semplificare ottenendo:

$$|C(s)G_u(s)| \geq 20 \log(1/0.01) = 40 \text{ dB}$$

**A.4.2** Si consideri adesso il disturbo in uscita  $F = 0.01 + 0.02 \sin(2\pi 0.03 t + \phi)$ . Tale disturbo presenta una componente costante e una sinusoidale. Nella specifica si chiede che l'influenza del disturbo sull'uscita sia inferiore a 0.8 mm. Si applica quindi il teorema della risposta armonica. La funzione

di trasferimento fra la trasformata  $D(j\omega)$  del disturbo  $F$  e la trasformata dell'uscita  $Y(j\omega)$  è data da

$$Y(j\omega) = \frac{G_d(j\omega)}{1 + C(j\omega)G(j\omega)} D(j\omega) = \bar{G}(j\omega) D(j\omega). \quad (9)$$

La componente dell'uscita dovuta ad un disturbo sinusoidale ad una frequenza generica  $\omega_k$  sarà quindi del tipo

$$y(t) = |\bar{G}(j\omega_k)| |D(j\omega_k)| \sin(t + \angle \bar{G}(j\omega_k)). \quad (10)$$

Facendo riferimento al caso cautelativo in cui  $\sin(\omega_k t + \angle \bar{G}(j\omega_k)) = 1$ , e considerando di maggiorare il modulo  $|\bar{G}(j\omega)|$  con il suo valore massimo nel range di frequenze d'interesse, il modulo del disturbo da considerare è pari a  $0.01 + 0.02 = 0.03$  N.

Il controllo deve dunque essere scelto in modo tale che

$$|\bar{G}(j\omega)| = \frac{|G_d(j\omega)|}{|1 + C(j\omega)G(j\omega)|} \leq \frac{0.0008}{0.03} \approx 0.0267 \quad \forall \omega \leq \omega_d, \quad (11)$$

dove  $\omega_d$  viene scelta come la massima frequenza del disturbo, ovvero  $2\pi \cdot 0.03 \simeq 0.189$  rad/s.

Poiché a bassa frequenza è ragionevole applicare l'approssimazione  $|1 + C(j\omega)G(j\omega)| \approx |C(j\omega)G(j\omega)|$ , il controllore deve soddisfare

$$|C(j\omega)G(j\omega)| \geq \frac{|G_d(j\omega)|}{0.0267}. \quad (12)$$

Notando infine che nel campo frequenziale d'interesse (vedi figura 4) si ha  $|G_d(j\omega)| < -60.5$  dB e  $20 \log_{10}(0.0267) \approx -31.48$  dB, il guadagno d'anello per soddisfare questa specifica deve essere superiore a  $-60.5 - (-31.48) = -29.02$  dB per frequenze minori di 0.189 rad/s.

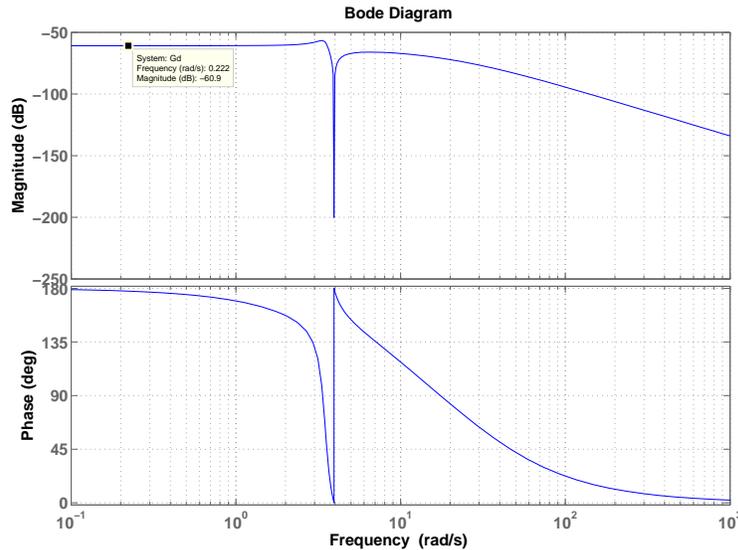


Figura 4: Diagramma di Bode della f.d.t.  $G_d(s)$ .

La figura 5 mostra il diagramma di Bode di  $G(s)$  con le specifiche sulla banda passante e sul guadagno che devono essere rispettate.

Il controllore può essere progettato aumentando per prima cosa il guadagno statico fino a stare, per basse frequenze, al di sopra del valore di 40 dB. Per rispettare le richieste sul taglio si inserisce una rete a ritardo, diminuendo così la banda del sistema, mentre per la fase si inseriscono due zeri complessi coniugati vicino ai poli del sistema da controllare. Un ulteriore polo in alta frequenza è aggiunto per la causalità.

Un controllore che permette al sistema di rispettare tutte le specifiche, compresa la causalità, è il seguente:

$$C(s) = 12483.9745 \frac{s^2 + 0.3898s + 12.42}{(s + 304.9)(s + 0.009393)}$$

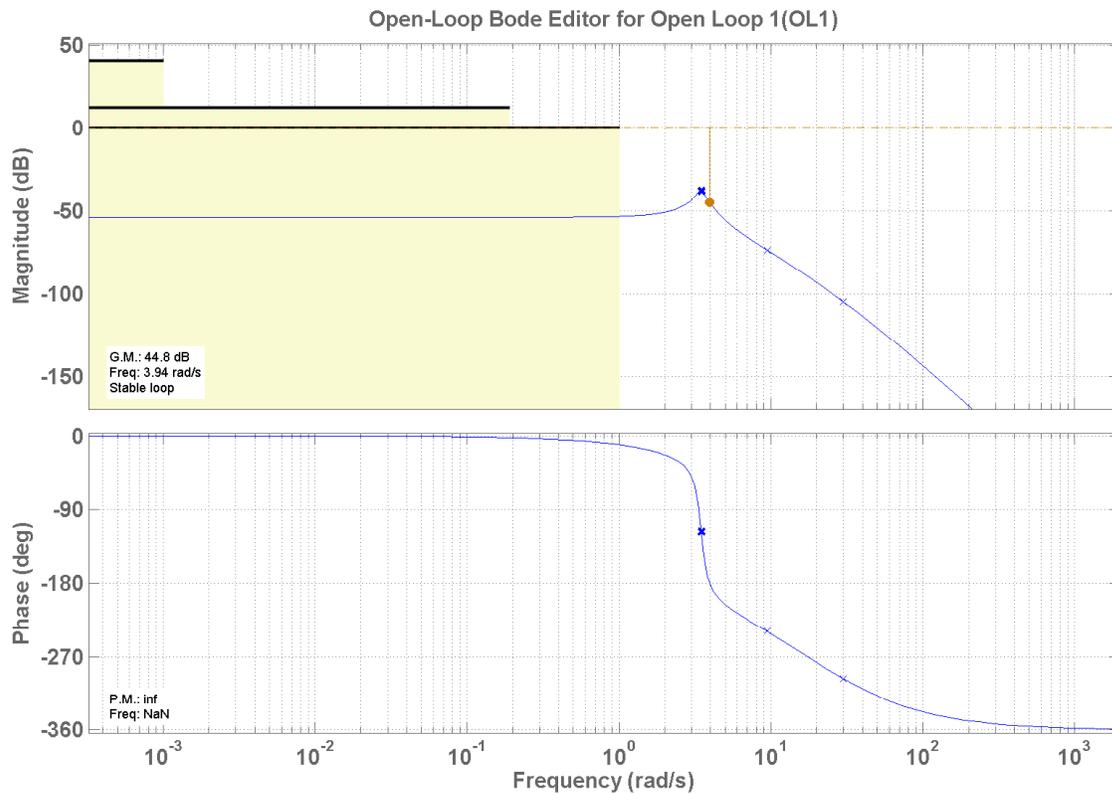


Figura 5: Diagramma di Bode della f.d.t.  $G_u(s)$ .

In figura 6 si vede come le specifiche siano rispettate sul diagramma di Bode, mentre in figura 7 è riportata la risposta al gradino del sistema in ciclo chiuso. Come si può osservare le specifiche risultano rispettate. La f.d.t. del sistema in anello chiuso complessiva è la seguente:

$$G_c = 86913.4301 \frac{s^2 + 0.3898s + 12.42}{(s + 304.9)(s + 30.56)(s + 7.71)(s + 1.263)(s^2 + 0.4816s + 12.01)}. \quad (13)$$

**A.5** Il codice di una Matlab function che, inserita in Simulink, simuli la dinamica discretizzata del controllore è riportato di seguito. La scelta del tempo di campionamento  $T = 1/300$  è fatta considerando il controllore sintetizzato che ha il polo più veloce in  $s = -304.9$  e che il tempo di campionamento, che deve essere almeno il doppio più veloce del modo più veloce del controllore, è scelto per buona norma (sempre verificando che il controllore discretizzato ottenuto rimanga stabile) essere  $5 \div 10$  volte più veloce del modo più veloce del controllore.

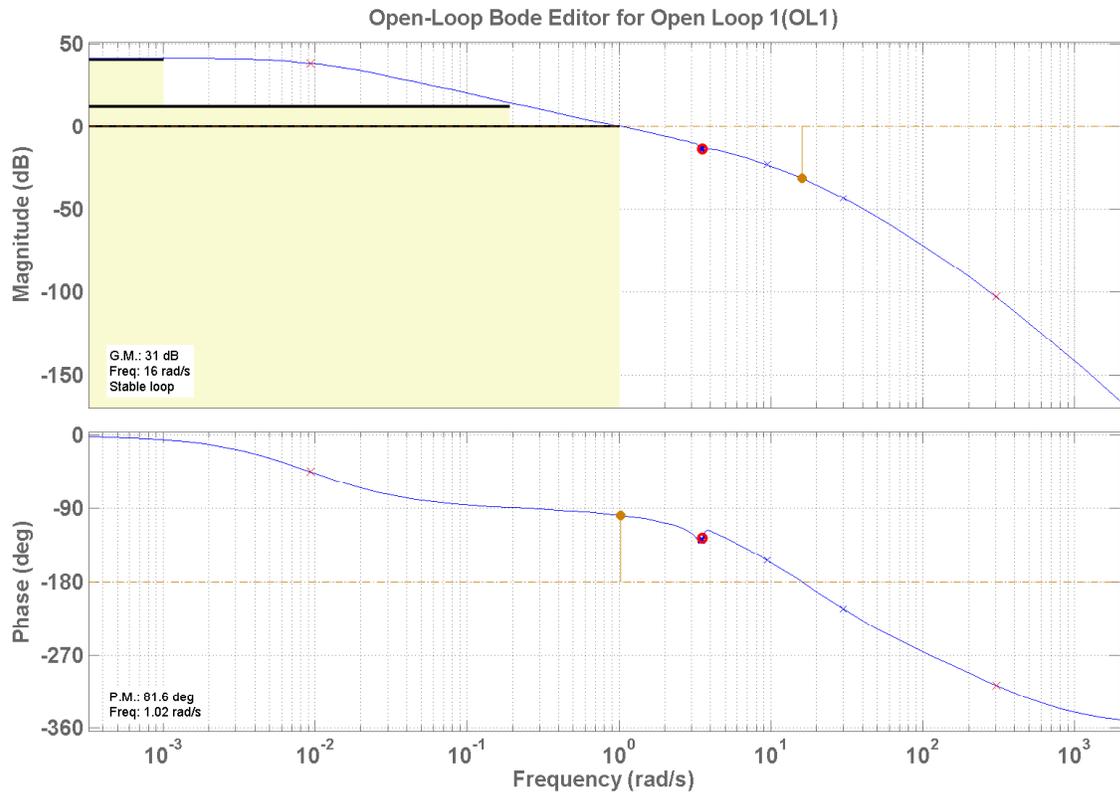


Figura 6: Diagramma di Bode della f.d.t.  $C(s)G_u(s)$ .

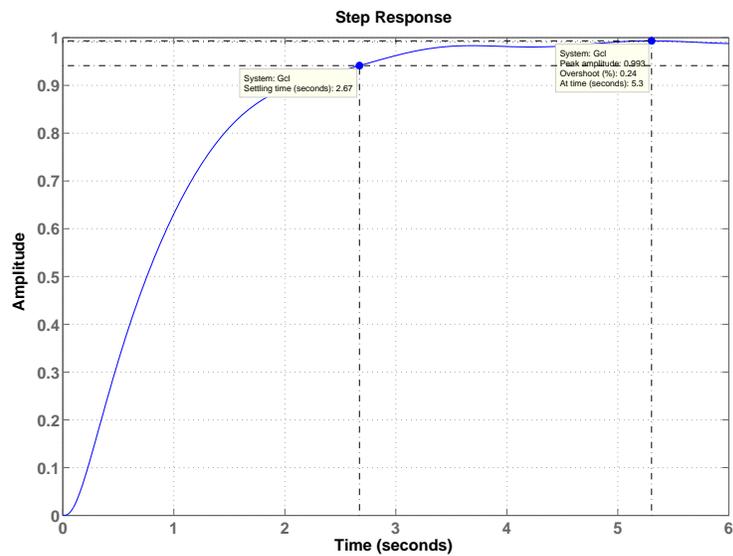


Figura 7: Risposta per ingresso a gradino del sistema controllato.

```

function out = Controller(in)
% function out = Controller(in)
%
% in(1):    reference signal r
% in(2):    plant output y
% out:      control signal to be given as input to the plant

% states of the controller
global stateC1
if isempty(stateC1)
    stateC1 = [0; 0];
end

% assign reference and output measurement
r = in(1);
y = in(2);

% compute the error
e1 = r - y;

% discretization time
T = 1/300;

% controller tf
s = tf('s');
C1tf = 12484*(s^2 + 0.3898*s + 12.42)/((s+304.9)*(s+0.009393));
[A1,B1,C1,D1] = tf2ss(C1tf.num{1},C1tf.den{1});

% discretizing using forward Euler
A1d = eye(size(A1)) + A1*T;
B1d = B1*T;
C1d = C1;
D1d = D1;

% compute the controller output and update the state
out = C1d*stateC1 + D1d*e1;
stateC1 = A1d*stateC1 + B1d*e1;

```

### Esercizio B

**B.1** Considerando il sistema  $G_1 = \frac{(s-1)}{(s+\beta^2)(\beta s+2)}$  ed applicando il criterio di Routh si ottiene che per garantire la stabilità del sistema si deve avere  $\beta > 0$ .

$$\begin{array}{l|ll} s^2 & \beta & 2\beta^2 \\ s^1 & \beta^3 + 2 & 0 \\ s^0 & 2\beta^2 & 0 \end{array}$$

I valori di  $\beta$  per cui si ha una variazione del numero di permanenze di segno sono 0 e  $\beta = -\sqrt[3]{2}$ .

Nel caso in cui  $\beta = 0$  il sistema presenta un solo polo (nell'origine) e risulta marginalmente stabile.

Per  $-\sqrt[3]{2} < \beta < 0$  e  $\beta < -\sqrt[3]{2}$  il sistema è caratterizzato da un polo stabile ed un polo instabile.

Se  $\beta = -\sqrt[3]{2}$  il sistema è caratterizzato da un polo stabile ed un polo instabile.

**B.2** Considerando  $\beta = -1$  il sistema risulta:

$$G = -\frac{s-1}{s^2-s-2}$$

Il luogo delle radici del sistema con semplice retroazione unitaria e applicando un controllore  $C(s)$  opportuno che stabilizzi il sistema è riportato di seguito in figura 8.

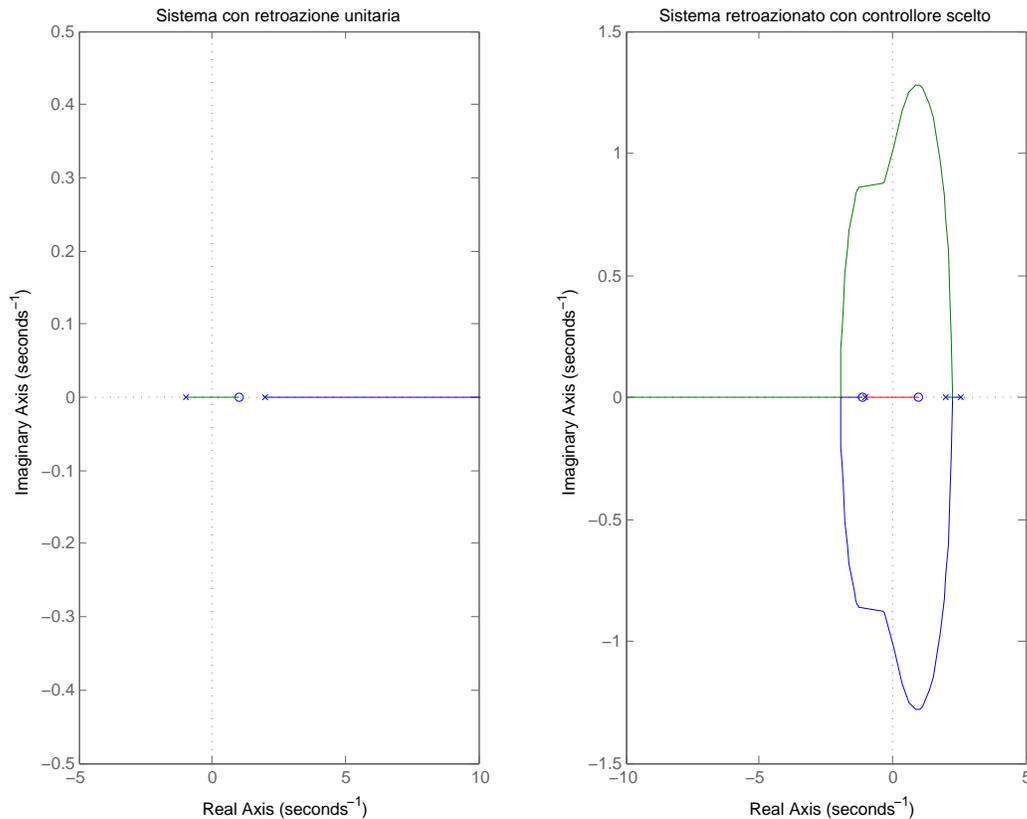


Figura 8: Luogo delle radici del sistema  $G$ , a sinistra nel caso di retroazione unitaria, a destra nel caso di utilizzare il controllore  $C$

Per stabilizzare il sistema si è sintetizzato un controllore  $C = -4.4468 \frac{s+1.106}{s-2.562}$  così da utilizzare il luogo delle radici diretto. Si è posto un polo a parte reale positiva ed uno zero a parte negativa, in tal modo con un adeguato guadagno il sistema in retroazione risulta asintoticamente stabile.

### Esercizio C

Le caratteristiche notevoli della risposta sono le seguenti:

- La risposta del sistema è del tipo “a rampa”, da ciò si evince che il sistema presenta un polo nell’origine.
- Il guadagno in velocità del sistema è positivo, per cui il segno deve essere scelto in accordo.
- La natura oscillatoria della risposta indica un modo sinusoidale dato da due poli complessi coniugati. Questi ultimi saranno a parte reale positiva visto che l’ampiezza dell’oscillazione aumenta nel tempo.
- La risposta iniziale è orizzontale (risposta e sua derivata nulla all’istante iniziale) e quindi la differenza poli-zeri sarà almeno due per il teorema del valore iniziale.
- Il segno iniziale della risposta indica la presenza di un numero dispari di singolarità a parte reale positiva che, dati i due poli, indica probabilmente uno zero a fase non minima.

Una possibile funzione di trasferimento è riportata di seguito:

$$G(s) = -\frac{s-1}{s(s^2-0.01s+1)}$$