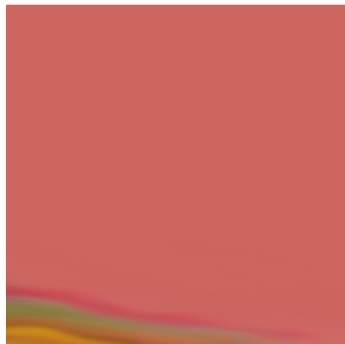
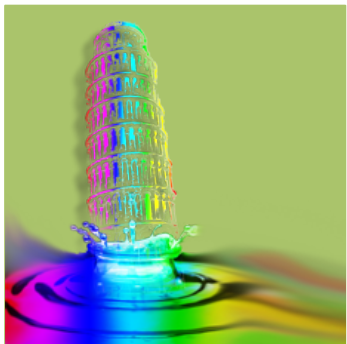
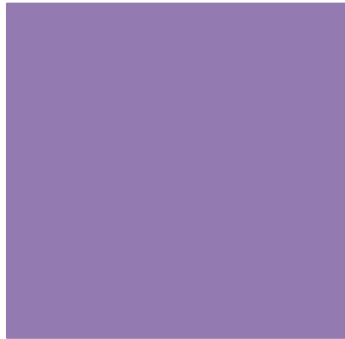


# Elementi Finiti: Analisi Strutturale

---



[carmelo.demaria@centropiaggio.unipi.it](mailto:carmelo.demaria@centropiaggio.unipi.it)



# Analisi agli elementi finiti



- Il FEM è un metodo numerico (pertanto approssimato) che permette la risoluzione di equazioni differenziali alle derivate parziali.
- Il metodo degli elementi finiti consiste nella *discretizzazione* di un assegnato dominio in **elementi** fra loro connessi in un numero **finito** di punti, vertici degli elementi chiamati **nodi**, in corrispondenza dei quali sono valutate le componenti della funzione incognita.
- Il valore della funzione all'interno del singolo elemento è ottenuto sulla base dei valori dei parametri nodali attraverso l'uso di opportune *funzioni di forma*.
- La scelta di tali funzioni, come pure del tipo di *mesh* con cui discretizzare il dominio è di importanza cruciale per una corretta convergenza della soluzione.



# Nota

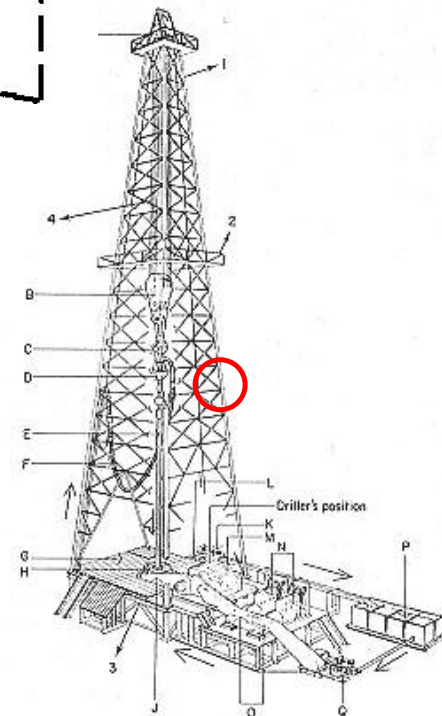
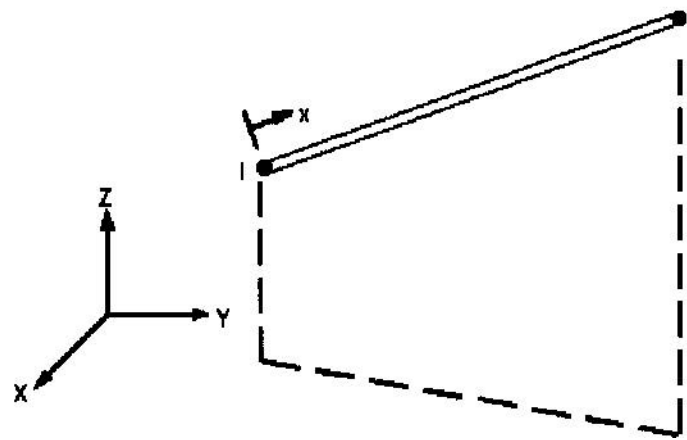


- Esistono altri strade che possono portare alla formulazione della “matrice fondamentale”
  - Metodi variazionali (principio dei lavori virtuali) (vedi dispensa)
  - Formulazione diretta (vedi dispensa)
  - Minimizzazione di un funzionale (energia potenziale totale)

+

# Elemento asta

- Travature reticolari  
piane e spaziali
- solo sforzo normale
- 2 nodi
- 2 o 3 g.d.l /nodo
- carichi applicabili  
solo nei nodi
- Car. geometriche: A

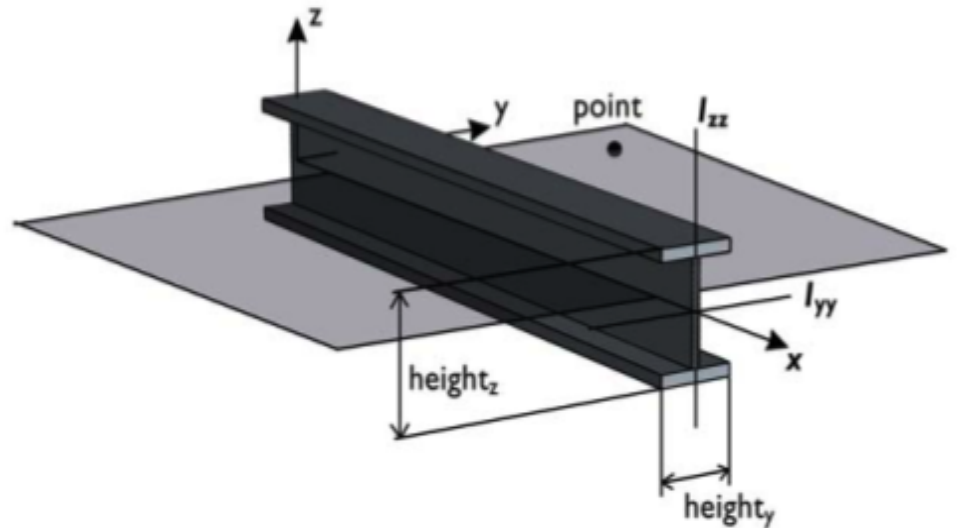




# Elemento trave



- Equazione della linea elastica
- 2 nodi
- 3 gdl/nodo
- Carichi concentrati e distribuiti
- Caratteristiche geometriche (sezione, momento d'inerzia, ...)

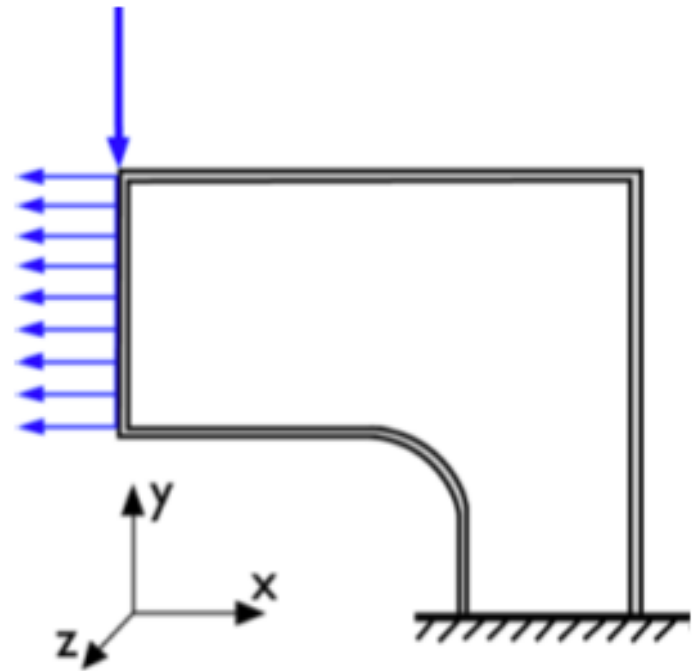




# Lastra (plane stress)



- **Stati piani di tensione:**
- sono caratterizzati dall'aver una delle componenti principali di tensione identicamente nulla
- si verificano tipicamente in corpi piani, di spessore piccolo rispetto alle altre dimensioni caratteristiche del problema, caricati nel loro piano medio.

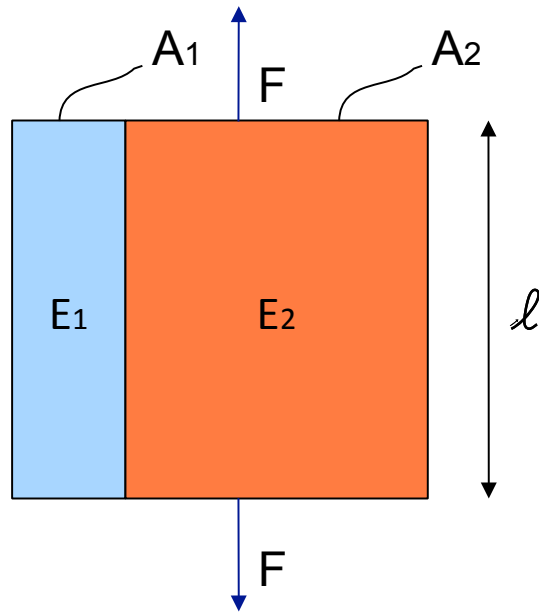


Possibilità di inserire lo spessore del corpo

+

# Modelli di omogenizzazione

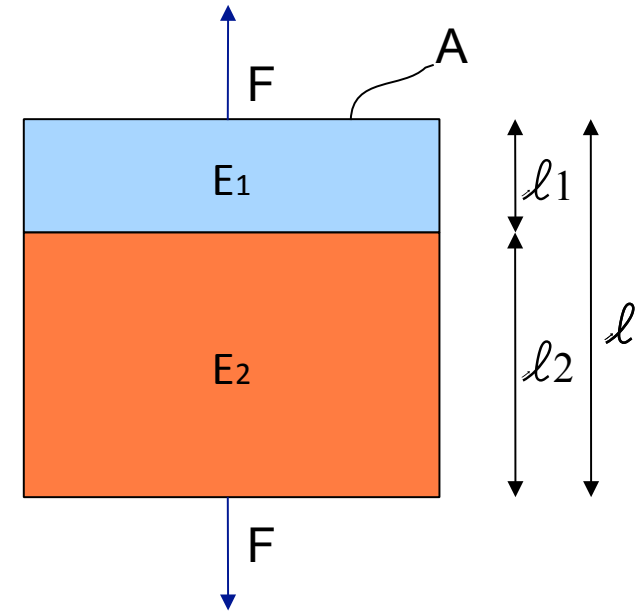
- Modello di Voigt



$$E = E_1 v_1 + E_2 (1 - v_1)$$

$$v_1 = \frac{A_1}{A_1 + A_2}$$

- Modello di Reuss



$$E = \frac{E_1 E_2}{E_1 (1 - f_1) + E_2 f_1}$$

$$f_1 = \frac{l_1}{l}$$



# Esercizio 1

- Valutare il modulo elastico complessivo dei seguenti corpi della precedente diapositiva con il modello analitico e con quello ad elementi finiti (utilizzare l'analisi plane stress).







# Nota esercizio 1

- I modelli di Reuss e Voigt non prendono in considerazione carichi di tipo trasversale. Per introdurre questo concetto è necessario porre il modulo di Poisson pari a 0, in modo tale che deformazioni normale provochino deformazioni (e quindi carichi) trasversali.
- Il carico da imporre nel modello di modello di Voigt (o di isodeformazione) è quello di uno spostamento in direzione normale in modo da avere una isodeformazione su entrambi blocchi.

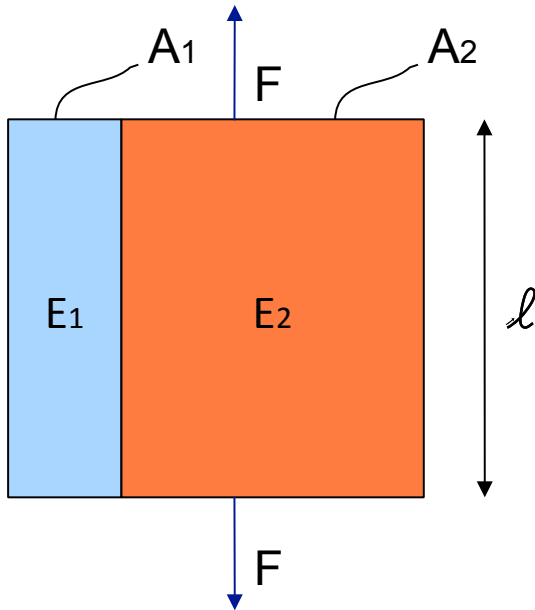


+

# Esempio soluzione esercizio 1 (1/4)



## Modello di Voigt



$$E = E_1 \nu_1 + E_2 (1 - \nu_1)$$

$$\nu_1 = \frac{A_1}{A_1 + A_2}$$

L	= 0.1 m
Spessore	= 0.1 m
$A_1$	= $0.03 * 0.1 \text{ m}^2 = 0.003 \text{ m}^2$
$A_2$	= $0.07 * 0.1 \text{ m}^2 = 0.007 \text{ m}^2$
$\nu_1$	= 0.3
$\nu_2$	= 0.7

Se  $E_1 = 10 \text{ E}_2 = 100 \text{ GPa}$   
 $E = 37 \text{ GPa}$

Per avere una deformazione del -10% lungo la direzione y devo applicare una forza pari a =

$$F = (E * \epsilon) * A = 73 \text{ GPa} * (-0.1) * 0.01 \text{ m}^2 = -3.7 * 10^7 \text{ N}$$



# Esempio soluzione esercizio 1 (2/4)

The screenshot displays the COMSOL Multiphysics interface for a Plane Stress (smps) model. A **Boundary Integration** dialog box is open, showing the following settings:

- Boundary selection:** Boundaries 1, 2, 3, 4, 5, 6, and 7 are listed. Boundaries 2 and 5 are selected.
- Expression to integrate:** Predefined quantities: Reaction force y-dir. Recover: . Expression: Rfy\_smps. Unit of integral: N.  Compute surface integral (for axisymmetric modes).
- Solution to use:** Solution at time: 0. Time: [empty]. Solution at angle (phase): 0 degrees. Frame: [empty].
- Buttons: Smoothing..., Advanced..., OK, Cancel, Apply, Help.

The background plot shows a rectangular domain with a grid. A red arrow points from the origin (0,0) to the right edge (0.1,0). A green arrow points from the origin (0,0) to the top edge (0,0.1). A cyan arrow points from the top edge (0,0.1) to the right edge (0.1,0.1). The bottom status bar shows the following text:

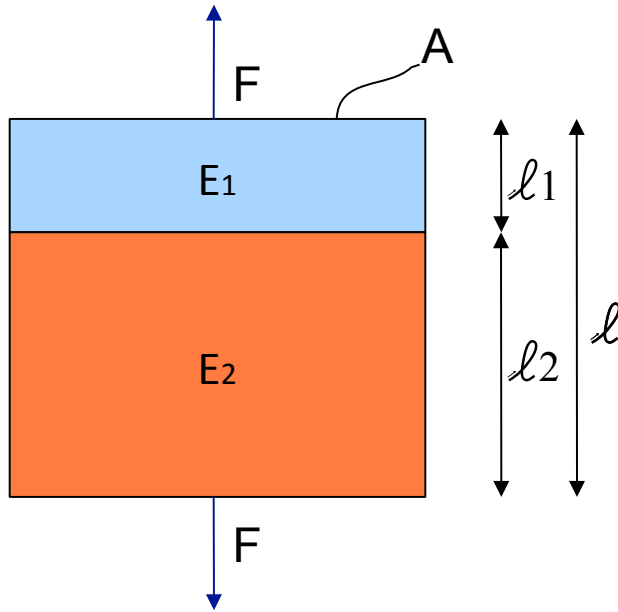
Saved COMSOL Model file: voigt.mph  
Value of sum: 4.468784e-18 [N], Expression: Reaction force x-dir.: RFX\_smps, Boundaries: 2, 5  
Value of sum: 3.7e7 [N], Expression: Reaction force y-dir.: Rfy\_smps, Boundaries: 2, 5

+

# Esempio soluzione esercizio 1 (3/4)



## Modello di Reuss



L	= 0.1 m
Spessore	= 0.1 m
$l_1$	= 0.03 m
$l_2$	= 0.07 m
$f_1$	= 0.3
$f_2$	= 0.7
A	= 0.1 * 0.1 m <sup>2</sup> = 0.01 m <sup>2</sup>

Se  $E_1 = 10$   $E_2 = 100$  GPa  
 $E = 13.7$  GPa

Applicando una forza pressione in direzione y di 1 kPa ottengo uno spostamento totale di

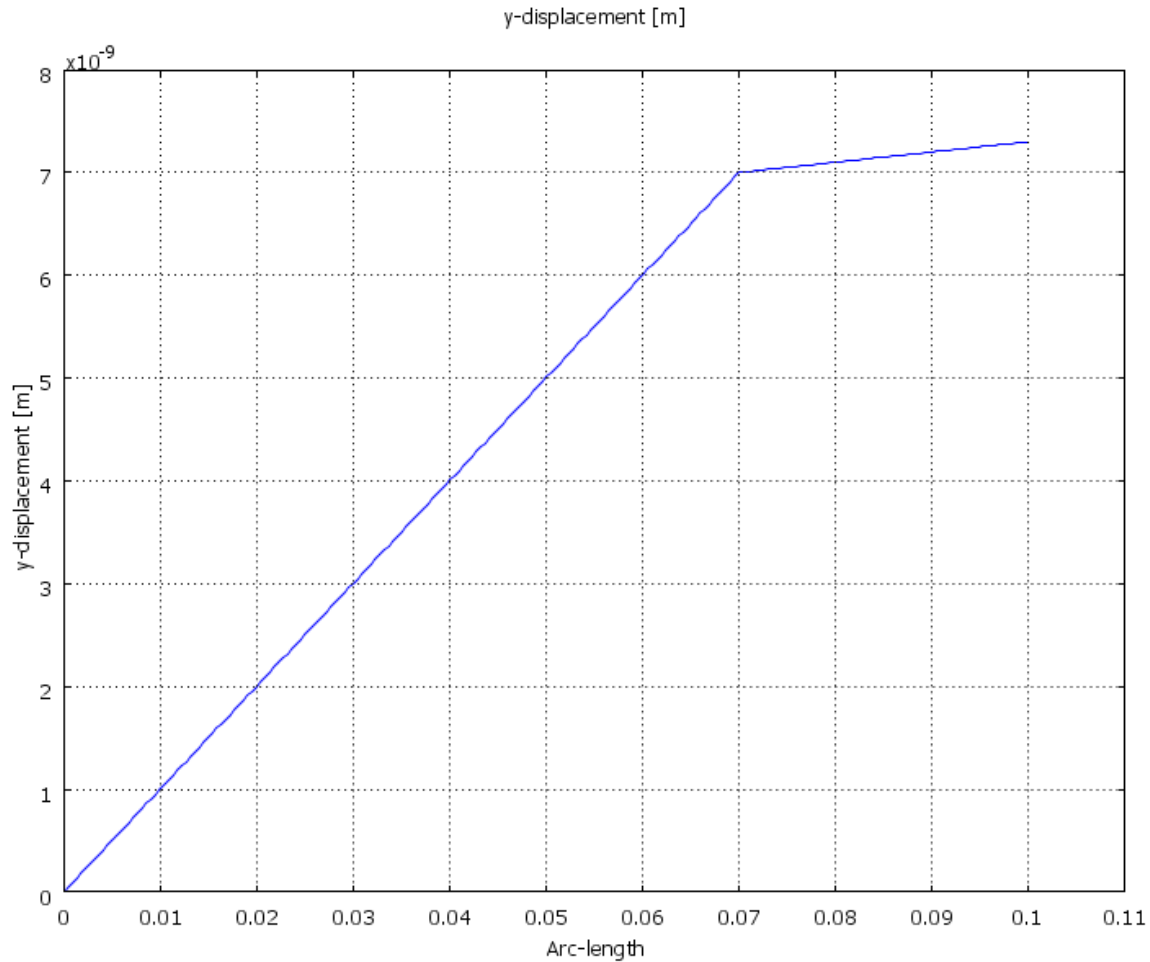
$$\Delta y = 0.1 \text{ m} * (-1 \text{ kPa} / 13.7 \text{ GPa}) = 7.3 * 10^{-9} \text{ m}$$

$$E = \frac{E_1 E_2}{E_1 (1 - f_1) + E_2 f_1}$$

$$f_1 = \frac{l_1}{l}$$



# Esempio soluzione esercizio 1 (4/4)



Spostamento dell'intera struttura valutato lungo la direzione y



# Considerazioni di simmetria (1/5)



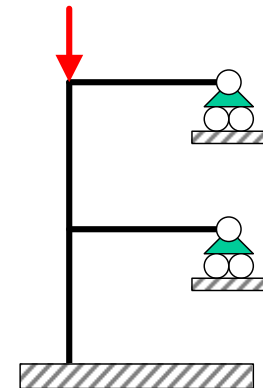
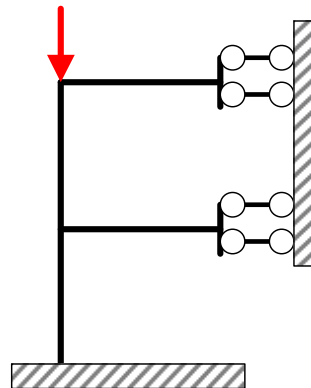
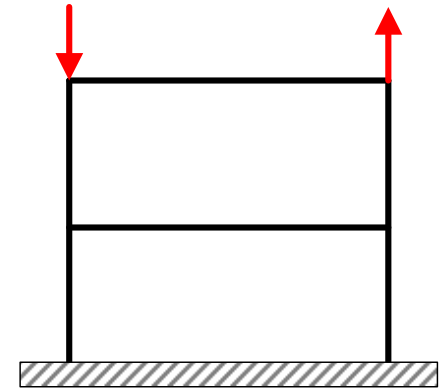
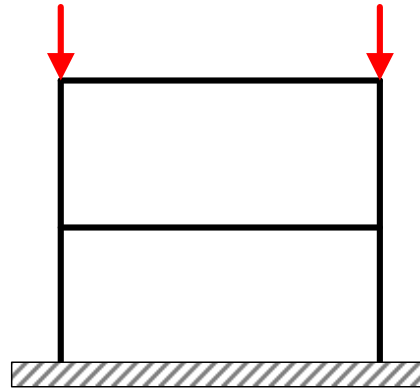
- L'uso di considerazioni di simmetria consente di ridurre le dimensioni del modello. I più comuni tipi di simmetria sono:
  - Simmetria speculare o di riflessione
  - Simmetria polare o di rotazione



# Considerazioni di simmetria (2/5)



- Sfruttando la simmetria è possibile includere nel modello solo una parte della struttura, sostituendo la parte mancante con opportuni vincoli posti sul piano di divisione

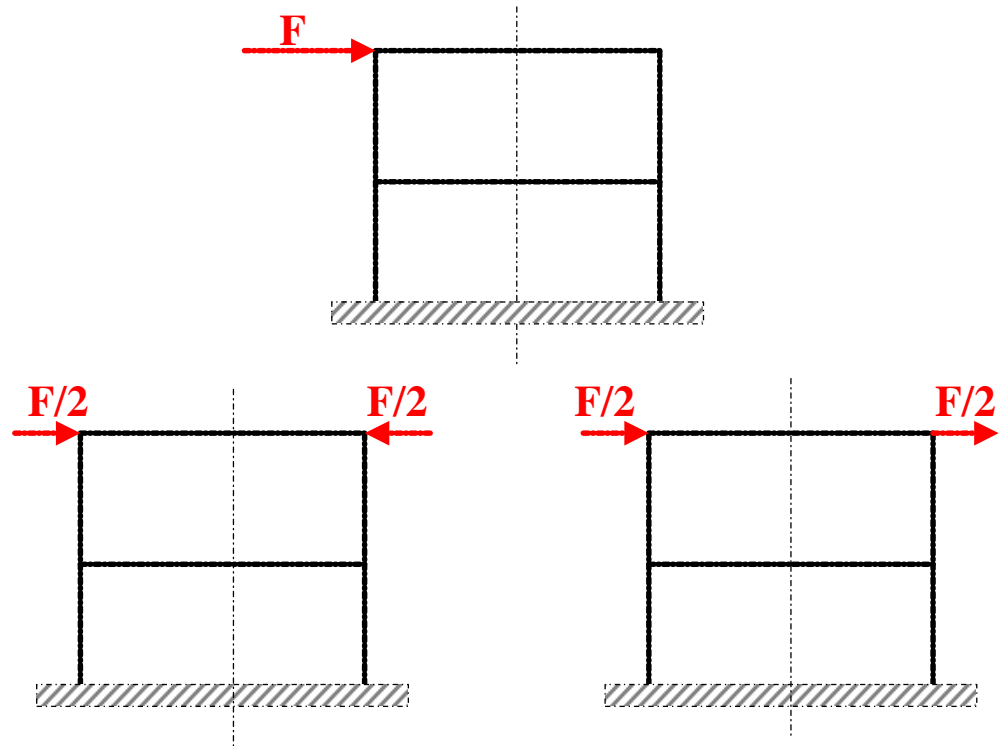




# Considerazioni di simmetria (3/5)



- I carichi non devono necessariamente essere simmetrici, dato che una condizione di carico qualsiasi può essere scissa in una componente simmetrica ed in una antisimmetrica.



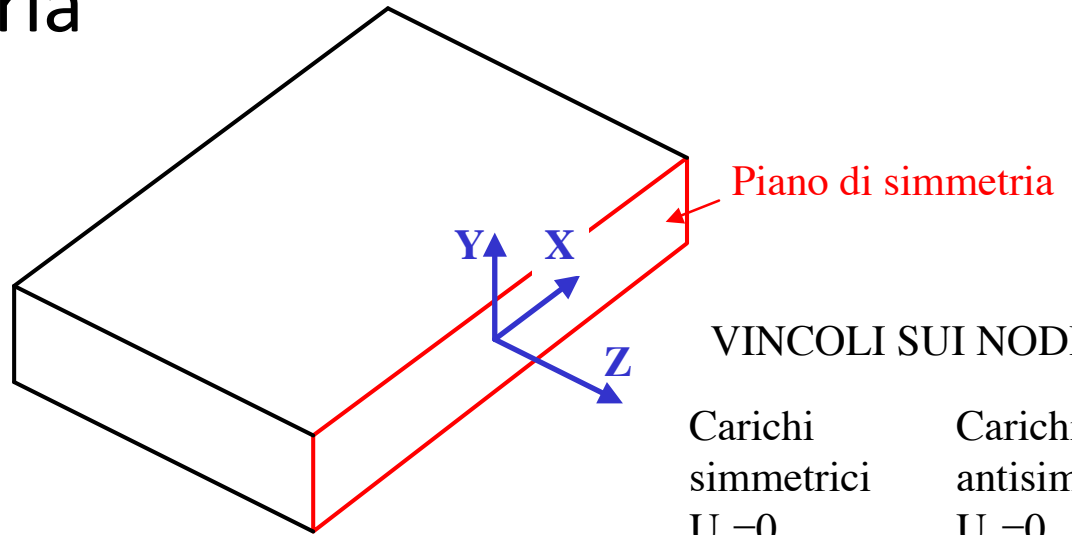


+

# Considerazioni di simmetria (4/5)



- **Simmetria di riflessione**
- La struttura viene tagliata in corrispondenza del piano di simmetria



VINCOLI SUI NODI

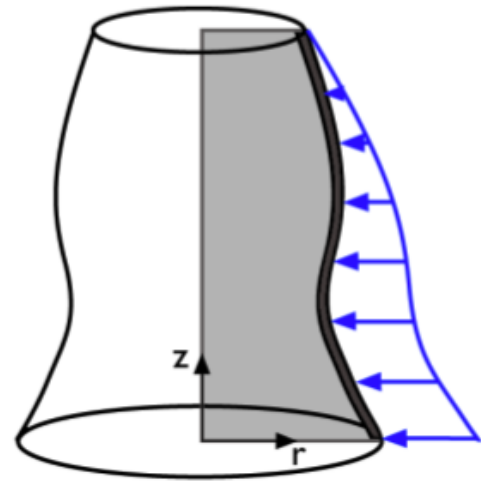
Carichi simmetrici	Carichi antisimm.
$U_z=0$	$U_y=0$
$ROT_x=0$	$U_x=0$
$ROT_y=0$	$ROT_z=0$



# Considerazioni di simmetria (5/5)



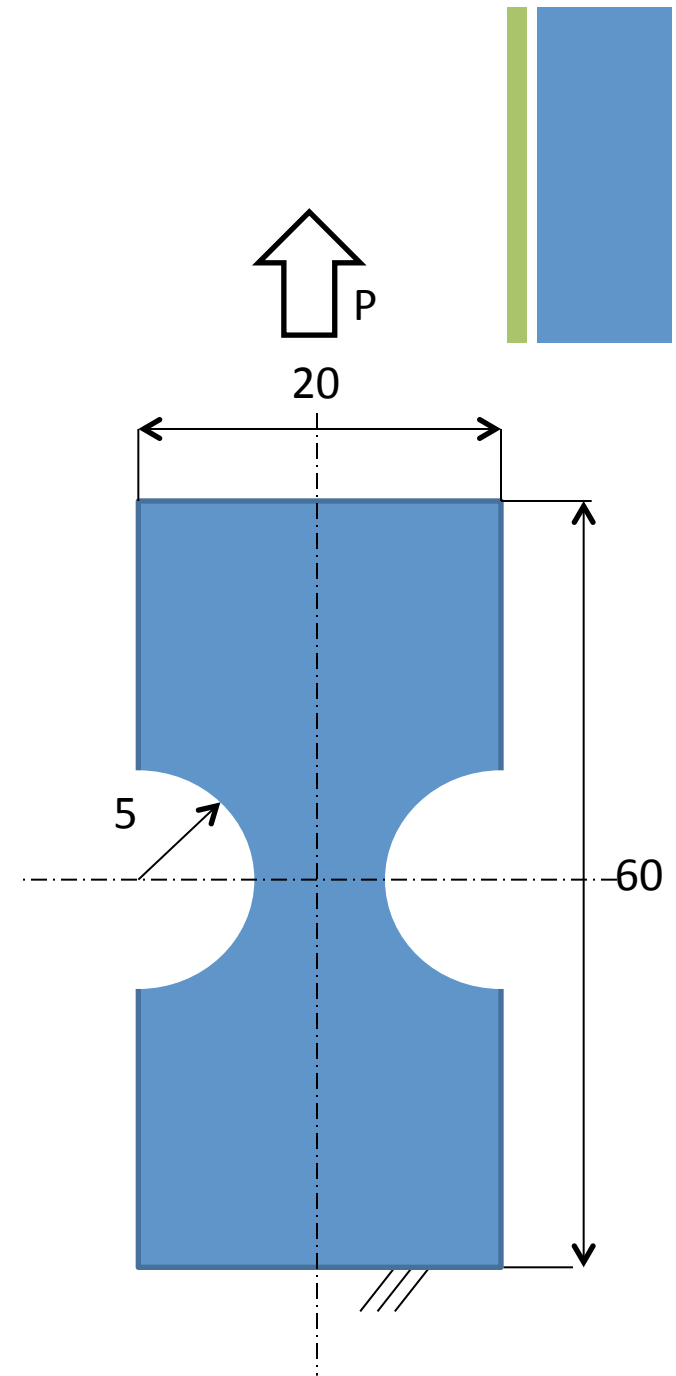
- **Corpi assial-simmetrici**
- Geometria assial-simmetrica (rotazione di una sezione attorno ad un asse fisso)
- Carichi a simmetria cilindrica
- Fissato un sistema di riferimento cilindrico “ $r, \theta, z$ ”, per simmetria lo stato di tensione/deformazione risulta indipendente da  $\theta$  e le componenti di spostamento in direzione circonferenziale ( $\theta$ ) risultano nulle: il problema può di conseguenza essere studiato come piano.



+

## Esercizio 2

- Lastra intagliata in trazione
  - Schematizzare la lastra di figura sfruttando i piani di simmetria
  - Misure in mm
  - Spessore: 5 mm
  - Modulo Elastico  $10^9$  Pa
  - $P = 3000$  Pa





# Link utili



- [http://www.uniroma2.it/didattica/Calc\\_Aut\\_Sis\\_Mec/deposito/08-Elementi-Formulazione-Generale\\_V1.pdf](http://www.uniroma2.it/didattica/Calc_Aut_Sis_Mec/deposito/08-Elementi-Formulazione-Generale_V1.pdf)
- <http://www.aero.polimi.it/~ls075775/bacheca/032FormulazioneFEM.pdf>