

Esame di Controlli Automatici – 01 luglio 2013

Esercizio A.

Si consideri il sistema rappresentato in figura 1.

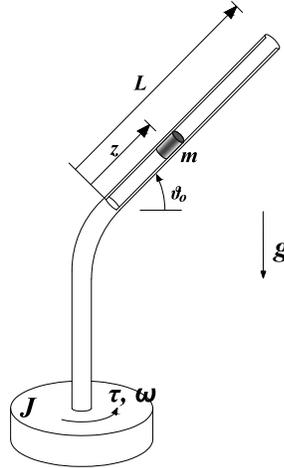


Figura 1: Sistema meccanico.

Esso è costituito da una struttura tubolare di massa trascurabile la cui parte superiore, di lunghezza  $L$ , è curvata e forma un angolo  $\theta_0$  rispetto all'orizzontale. All'interno della parte tubolare superiore scorre senza attrito una massa  $m$ . La struttura è fissata alla base ad un disco di inerzia  $J$  che ruota attorno ad un perno fissato a telaio. Interposto tra il perno e il disco c'è un attutore che può mettere in rotazione la struttura e far sì che la massa  $m$  scorra verso l'alto per effetto della forza centrifuga dovuta alla velocità di rotazione. Il sistema di equazioni differenziali che descrive la dinamica del sistema è

$$\begin{aligned} m\ddot{z} + mg \sin \theta_0 - m z \omega^2 \cos^2 \theta_0 &= 0 \\ (J + m z^2 \cos^2 \theta_0) \dot{\omega} + 2 m z \dot{z} \omega \cos^2 \theta_0 &= \tau \end{aligned}$$

dove  $z$  rappresenta la posizione del corpo di massa  $m$  lungo la parte di tubo inclinato di  $\theta_0$ ,  $g$  l'accelerazione di gravità,  $\omega$  la velocità angolare della struttura,  $J$  l'inerzia del disco e  $\tau$  la coppia esercitata dal motore.

**A.1)** Si determini in forma simbolica l'equilibrio del sistema.

**A.2)** Si linearizzi il sistema attorno all'equilibrio trovato al punto precedente. Si discuta inoltre la stabilità di tale equilibrio e se ne dia una interpretazione fisica.

Si considerino adesso i seguenti valori numerici:  $m = 1$  Kg;  $L = 1.1$  m;  $J = 1$  Kg m<sup>2</sup>;  $g = 9.81$  m/s<sup>2</sup>;  $\theta_0 = \pi/3$  rad;  $\bar{z} = 0.5$  m.

**A.3)** Supponiamo di voler controllare il sistema in anello aperto con una legge di controllo pre-pianificata "in avanti". Si calcoli quindi un ingresso  $\tilde{\tau}(t) = \tau(t) - \bar{\tau}(t)$  che, a partire dalla configurazione di equilibrio  $\bar{x} = [\bar{z}, \bar{\omega}]$ , porti la massa  $m$  all'estremità del tubo in un tempo  $T$ . Si scelga a tal fine un ingresso costante a tratti per  $N$  intervalli temporali di lunghezza  $T_s = T/N$ , e si usi un modello a tempo discreto del sistema linearizzato.

**A.3.1)** Si scelga il tempo di campionamento  $T_s$  e si ne giustifichi la scelta;

**A.3.2)** Si discuta il minimo valore di  $N$  che garantisce il raggiungimento ed il mantenimento della nuova configurazione per il sistema tempo discreto e si calcoli la corrispondente sequenza di controllo  $\tilde{\tau}$  (si discretizzi il sistema con la tecnica di "Eulero in avanti"). Si effettui poi una simulazione sia del sistema linearizzato tempo discreto che di quello tempo continuo con la sequenza di controllo appena progettata, in ambiente **Simulink**. Si analizzi inoltre l'andamento della posizione  $\tilde{z}$  della massa  $m$ , per entrambi i casi, giustificandone l'andamento in relazione alla sequenza di controllo applicata;

**A.3.3)** Si ripeta quanto svolto al punto precedente assicurando che anche il sistema linearizzato tempo continuo raggiunga esattamente e mantenga la configurazione desiderata. A tal fine, si discutano le eventuali varianti da adottare rispetto al caso precedente. Si effettui una simulazione sul sistema tempo continuo con la nuova sequenza di controllo appena progettata;

**A.3.4)** Relativamente alla sequenza di controllo calcolata al punto precedente, si determini il costo del controllo  $\|\hat{\tau}\|_2^2 = \sum_{k=1}^N \hat{\tau}_k^2$  e si calcoli una nuova sequenza di controllo il cui costo sia ridotto di 100 volte. Si effettui una simulazione sul sistema tempo continuo con la nuova sequenza di controllo appena progettata;

**A.4)** Utilizzando la posizione  $z$  della massa  $m$  come uscita di misura, si progetti un controllore basato sul regolatore che, per mezzo della coppia  $\tau$  ed a partire dalle condizioni di equilibrio, permetta alla massa  $m$  di raggiungere esattamente l'estremità del tubo in un tempo pari a  $NT_s$  senza fuoriuscire dal tubo stesso (si considerino i valori  $N$  e  $T_s$  relativi al punto A.3.4).

**A.5)** Si effettuino, in ambiente Matlab/Simulink,

- la simulazione del sistema linearizzato controllato con il compensatore montato in catena di retroazione;
- la simulazione di cui al punto precedente iniettando in ingresso al sistema (quindi sommando al valore di coppia in ingresso al sistema) la sequenza di controllo pre-pianificata in avanti ottenuta al punto A.3.4 ed utilizzando come segnale di riferimento l'uscita corrispondente.

Si discutano i risultati ottenuti nelle due simulazioni.

## Esercizio B.

Si considerino i seguenti tre sistemi non lineari:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1^3 + x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1^3 - x_2^3. \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_1^3 + x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1^3 + x_2^3. \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1^3. \end{cases}$$

Si studi la stabilità nell'origine per i tre sistemi utilizzando il criterio indiretto di Lyapunov. Se necessario si utilizzi la funzione candidata di Lyapunov  $V(x_1, x_2) = x_1^4 + 2x_2^2$ .

## Soluzione

### Esercizio A

**A.1)** Essendo l'equilibrio caratterizzato da  $\ddot{z} = \dot{z} = 0$  e  $\dot{\omega} = 0$ , sostituendo nelle equazioni della dinamica del sistema non lineare, si ottiene

$$\begin{aligned}\bar{z} &= \frac{g \sin \theta_0}{\bar{\omega}^2 \cos^2 \theta_0} \\ \bar{\omega} &= \text{cost.} \\ \bar{\tau} &= 0\end{aligned}$$

Risolvendo la prima per  $\bar{\omega}$  e sostituendo il valore assegnato a  $\bar{z}$  si ottiene

$$\begin{aligned}\bar{z} &= \text{cost.} \\ \bar{\omega} &= \sqrt{\frac{g \sin \theta_0}{\bar{z} \cos^2 \theta_0}} \\ \bar{\tau} &= 0\end{aligned}$$

Sostituendo i parametri numerici si ha che la velocità di rotazione della struttura all'equilibrio e pari a  $\bar{\omega} \approx 8.24$  rad/s.

**A.2)** Indicando con  $\tilde{x} = [\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3]^T = [z - \bar{z}, \omega - \bar{\omega}, \dot{z}]^T$  le variabili di stato traslate nell'equilibrio calcolato al punto precedente, e con  $\tilde{u} = \tau - \bar{\tau}$  il controllo, anch'esso traslato nell'equilibrio, il sistema non lineare scritto in forma di stato e traslato nell'equilibrio calcolato al punto precedente è

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}}_1 &= \tilde{x}_3 \\ \dot{\tilde{x}}_2 &= \frac{\tilde{u} - 2m\tilde{x}_3(\tilde{x}_1 + \bar{s})(\tilde{x}_2 + \bar{\omega}) \cos^2 \theta_0}{J + m(\tilde{x}_1 + \bar{s})^2 \cos^2 \theta_0} \\ \dot{\tilde{x}}_3 &= -g \sin \theta_0 + (\tilde{x}_1 + \bar{s})(\tilde{x}_2 + \bar{\omega})^2 \cos^2 \theta_0.\end{aligned}$$

Linearizzando si ottiene un sistema nella consueta forma di stato,

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + B\tilde{u}$$

dove

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ b_{21} \\ 0 \end{bmatrix}$$

dove

$$a_{23} = -\frac{2m\bar{s}\bar{\omega} \cos^2 \theta_0}{J + m\bar{s}^2 \cos^2(\theta_0)}, \quad a_{31} = \bar{\omega}^2 \cos^2(\theta_0), \quad a_{32} = 2\bar{s}\bar{\omega} \cos^2 \theta_0, \quad b_{21} = \frac{1}{J + m\bar{s}^2 \cos^2(\theta_0)}$$

Il polinomio caratteristico della matrice dinamica è  $\lambda(\lambda^2 - a_1 - a_2 a_3)$  e quindi il sistema possiede un polo nell'origine e due poli reali simmetrici rispetto all'asse immaginario ed in modulo pari a  $\pm 3$  sostituendo i valori numerici forniti nel testo. Il sistema linearizzato risulta pertanto instabile. In effetti, a partire dalla configurazione di equilibrio, se si immagina di spostare la massa  $m$  di un valore  $\pm \delta z$  arbitrariamente piccolo, rispetto al valore  $\bar{z}$ , la componente di forza gravitazionale non potrà essere più equilibrata dalla forza centrifuga e la massa tenderà ad allontanarsi dall'equilibrio.

**A.3)** Supponendo di conoscere il modello del sistema, e che questo sia completamente raggiungibile, è possibile trovare una legge di controllo  $\tilde{\tau}(t)$ ,  $0 \leq t \leq T$  capace di portare il sistema da una qualsiasi condizione iniziale ad una finale in un tempo  $T$  arbitrariamente breve. Per calcolare i valori di questo controllo, è conveniente comunque approssimare il sistema tempo continuo con un modello tempo discreto. Come suggerito anche nel testo, si può procedere quindi restringendo la scelta dell'ingresso  $\tilde{\tau}(t)$  ad una funzione costante a tratti, su intervalli  $N$  di lunghezza  $T_s$ .

**A.3.1** Procediamo dunque a trovare un modello tempo discreto che approssimi il comportamento del vero sistema soggetto a questo tipo di ingresso. A tal fine è necessario scegliere il tempo di campionamento. Il sistema in questione possiede due poli reali in  $\pm 3$ : si può scegliere quindi un tempo di campionamento  $T_s = 0.03$ , ovvero dieci volte più piccola della costante di tempo associata ai due poli.

**A.3.2** Si procede quindi alla discretizzazione del sistema tempo continuo applicando la tecnica di “Eulero in avanti” come indicato nel testo. Le matrici del sistema discretizzato assumono in tal caso la seguente forma:

$$A_d = I + AT_s, \quad B_d = BT_s.$$

Una legge di controllo “pre-pianificata” in grado di far raggiungere e mantenere al sistema un arbitrario stato finale può essere trovata sul sistema tempo discreto se la completa raggiungibilità del sistema è conservata in questo passaggio (questa proprietà non è detto che si conservi, e deve quindi essere verificata), e se la sequenza è lunga almeno quanto la dimensione dello spazio di stato  $n = 3$  più uno, ovvero in totale  $N = 4$ . Ovviamente, se la richiesta fosse stata semplicemente quella di raggiungere un generico stato finale senza doverlo necessariamente mantenere per un tempo indefinito, allora il numero di passi minimo sarebbe stato inferiore e pari alla dimensione dello spazio di stato  $N = n$ .

La sequenza di ingresso è data da

$$\tilde{\tau}_{T \ N=4} = R_4^{-1}(\tilde{x}_f - A_d^N \tilde{x}_o),$$

dove  $\tilde{x}_o$  è lo stato iniziale, pari all’origine in tal caso, e  $\tilde{x}_f$  è lo stato finale da raggiungere e mantenere. Lo stato finale da raggiungere e mantenere per il sistema linearizzato tempo continuo è tale che  $\tilde{x}_1 = L - \bar{z}$ . Per tale condizione, la velocità angolare  $\tilde{x}_2 = -a_{31}\tilde{x}_1/a_{32}$ , come si può ricavare dalle equazioni del sistema linearizzato in forma di stato. Infine,  $\tilde{\tau} = 0$  in tali condizioni. Perciò, in definitiva  $\tilde{x}_f = [L - \bar{z}, -a_{31} * (L - \bar{z})/a_{32}, 0]$ .

Il codice matlab utilizzato per generare la sequenza è il seguente:

```

Ts = 0.03; % Tempo di campionamento.
N = 4; % Numero di passi.

% Condizioni iniziali.
Xo = [0 0 0]';
% Condizioni finali.
Xf = [L-bar_z -a_{31}*(L-bar_z)/a_{32} 0]';

% Orizzonte temporale.
T = Ts*N;

% Eulero in avanti.
Ad = eye(3)+A*Ts;
Bd = Ts*B(:,2);

% Matrice Raggiungibilita in N passi.
R_N = Bd;
for k = 2:N
    R_N = [R_N Ad*R_N(:,k-1)];
end

RR = [zeros(size(Bd)), R_N(:,1:N-1); R_N];

% Sequenza ottima.
u_N = pinv(RR)*[(Xf-Ad^N*Xo); (Xf-Ad^N*Xo)];

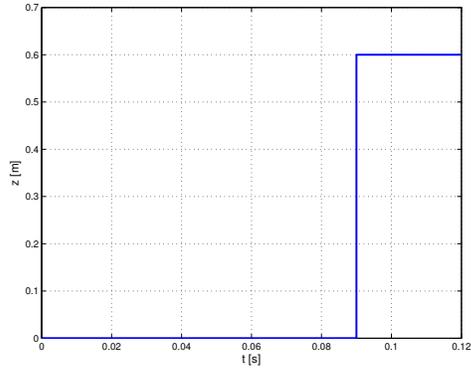
% Sequenza per blocco 'From Workspace' di Simulink
usimulink = [Ts*(0:length(u_N)-1)' flipud(u_N)];

```

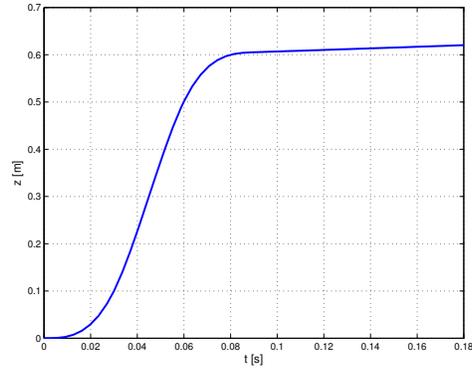
In figura 2 sono riportate le uscite del sistema tempo discreto e tempo continuo ottenute con gli schemi di controllo riportati in figura 3 applicando la sequenza di controllo calcolata precedentemente.

Si noti come la posizione della massa  $m$  di figura 2(a) rimane identicamente nullo fino al terzo passo, dopodichè raggiunge il valore finale. In effetti il sistema ha un eccesso poli-zeri pari a tre.

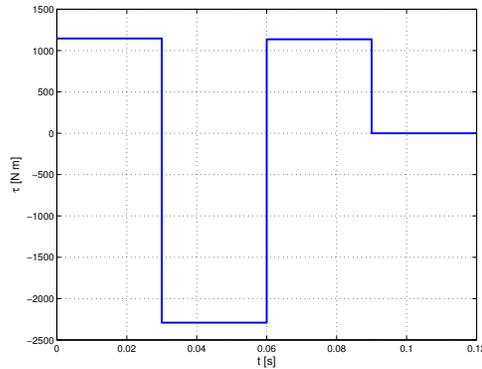
Infine, in figura 5(a) il valore finale desiderato per la massa  $m$  non viene raggiunto esattamente per il sistema tempo continuo all’istante  $T = N * T_s$ . Questo errore, dovuto al metodo di discretizzazione utilizzato, comporta un non mantenimento della posizione desiderata per la massa  $m$  per il sistema tempo continuo. Infatti, per tempi sufficientemente lunghi la massa tende ad allontanarsi da tale valore.



(a) Posizione della massa  $m$ , ovvero di  $\tilde{x}_1$ , per il sistema lineare tempo discreto con la sequenza di controllo calcolata al punto A.3.2.



(b) Posizione della massa  $m$ , ovvero di  $\tilde{x}_1$ , per il sistema lineare tempo continuo con la sequenza di controllo calcolata al punto A.3.2.



(c) Sequenza di controllo ottima pre-pianificata in avanti.

Figura 2: Risultati di simulazioni in ambiente Simulink ottenuti con gli schemi di figura 3.

**A.3.3** Al fine di garantire che anche il sistema tempo continuo mantenga la configurazione desiderata, è necessario adottare metodi di discretizzazione più precisi di quello detto “Eulero in avanti”, ed in particolare, per ingressi costanti a tratti (detti Zero Order Hold o ZOH), è possibile avere una formula di discretizzazione che produce valori esatti ad ogni multiplo del tempo di campionamento, e quindi anche al tempo  $T$  per il quale il sistema raggiunge la configurazione desiderata.

Le matrici del sistema discretizzato possono essere facilmente calcolate utilizzando la formula

$$\exp\left(\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix} T_s\right) = \begin{bmatrix} A_d & B_d \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

dove  $A_d$  e  $B_d$  sono, in tal caso, le matrici del sistema discretizzato con la tecnica ZOH. Calcolando nuovamente la sequenza di controllo e applicandola al sistema tempo continuo, si ottiene quanto riportato in figura 5.

**A.3.4** Il costo del controllo relativo al punto precedente è pari a  $\|\tilde{\tau}\| = 7.9 \cdot 10^6$ . Per ottenere una riduzione di 100 volte, si può agire allungando il tempo finale  $T$ , ovvero aumentando il numero di passi  $N$ . Ad esempio, scegliendo  $N = 8$ , si ottiene un costo pari a  $6.37 \cdot 10^4$ . In figura ?? sono riportati sia l’andamento della massa  $m$  che i valori di controllo relativi.

Si noti che in tal caso anche l’uscita del sistema tempo continuo mantiene il valore desiderato per un tempo indefinito.

**A.4)** Ai fini del progetto del compensatore basato su regolatore, è necessario in maniera preliminare analizzare le proprietà di raggiungibilità e osservabilità del sistema con ingresso  $\tilde{\tau}$  e uscita di misura

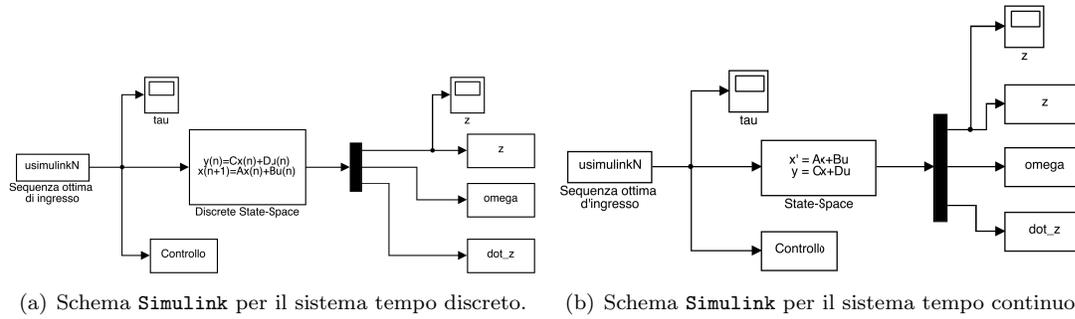
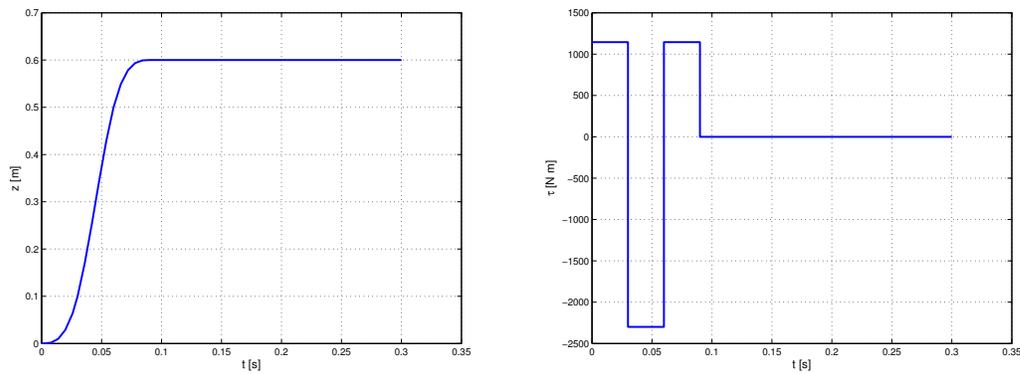


Figura 3: Schemi **Simulink** adottati per la simulazione del sistema tempo discreto e tempo continuo con la sequenza di controllo calcolata al punto A.3.2.



(a) Posizione della massa  $m$ , ovvero di  $\tilde{x}_1$ , per il sistema lineare tempo continuo con la sequenza di controllo calcolata al punto A.3.3. (b) Sequenza di controllo ottima pre-pianificata in avanti.

Figura 4: Risultati di simulazioni in ambiente **Simulink** ottenuti con gli schemi di figura 3.

$\tilde{x}_1$ . Sostituendo i valori numerici nelle matrici del sistema linearizzato approssimato si conclude sia sulla completa raggiungibilità che sulla completa osservabilità del sistema.

Affinchè il sistema possa raggiungere il valore desiderato esattamente è necessario l'inserimento di un polo nell'origine in catena diretta. Poichè il sistema ne possiede già uno, non sarà necessario inserirlo nel compensatore. Si richiede inoltre che il sistema abbia un tempo di assestamento non superiore a  $N * T_s$ , ovvero, per la scelta fatta sul  $N$  e  $T_s$  al punto precedente,  $T_a < 8 \cdot 0.03 = 0.24$  s. Per garantire quest'ultima specifica si decide di allocare i poli del sistema controllato in  $p = [-25 \quad -50 \quad -60]$ , ottenendo così un comportamento ad un polo dominante.

Il comando `place` di **Matlab** fornisce automaticamente la matrice di retroazione:

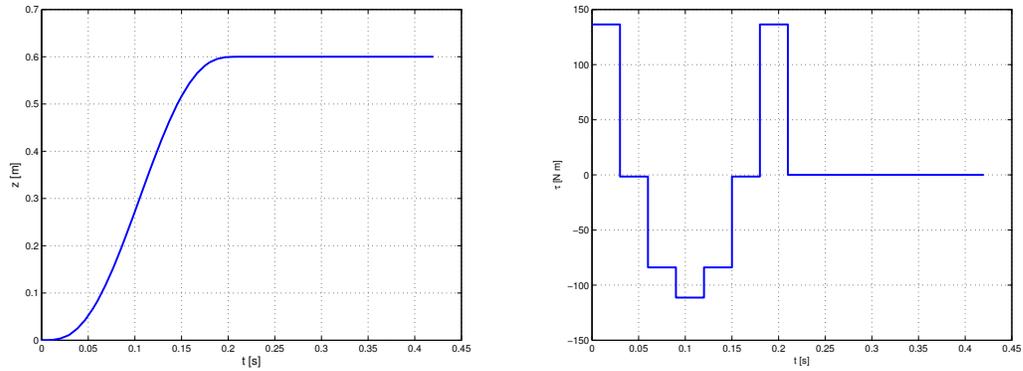
$$K = 10^3 [3.98 \quad 0.014 \quad 0.3] .$$

Poichè non si ha accesso a tutte le variabili di stato ma il sistema risulta completamente osservabile, si può realizzare un osservatore di Luenberger per ricostruire lo stato. La matrice  $L$  di iniezione delle uscite è calcolata in modo che la matrice dinamica dello stimatore  $A - LC$ , abbia autovalori in  $q = 3p$ . Impiegando il comando **Matlab**,  $L = \text{transpose}(\text{place}(A', C', q))$  si ottiene:

$$L = 10^5 [0.004 \quad 9.81 \quad 0.52]^T .$$

Il compensatore basato sul regolatore appena progettato ha dinamica  $K(sI - A + BK + LC)^{-1}L$ , e si costruisce con il comando `rsys = ss(A-B*K-L*C,L,K,0)` ovvero, a meno di un segno, con `rsys = reg(Sys,K,L)`, ove `Sys = ss(A,B,C,0)`.

**A.5)** In figura 6 è riportato lo schema **Simulink** utilizzato per la simulazione mentre in figura 7 è riportato l'andamento del controllo  $\tilde{\tau}$  e della posizione  $\tilde{x}_1$  della massa rispetto alla configurazione di equilibrio.



(a) Posizione della massa  $m$ , ovvero di  $\tilde{x}_1$ , per il sistema lineare tempo continuo con la sequenza di controllo avanti calcolata al punto A.3.4. (b) Sequenza di controllo ottima pre-pianificata in

Figura 5: Risultati di simulazioni in ambiente Simulink ottenuti con gli schemi di figura 3.

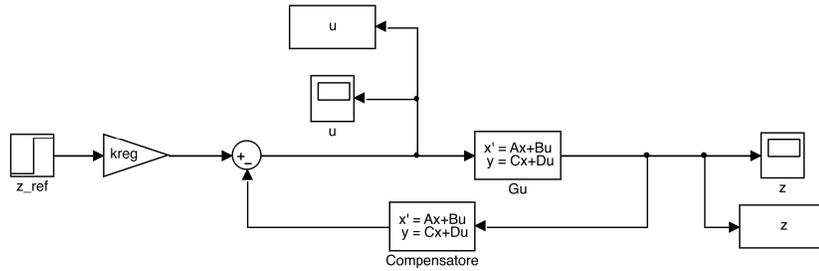
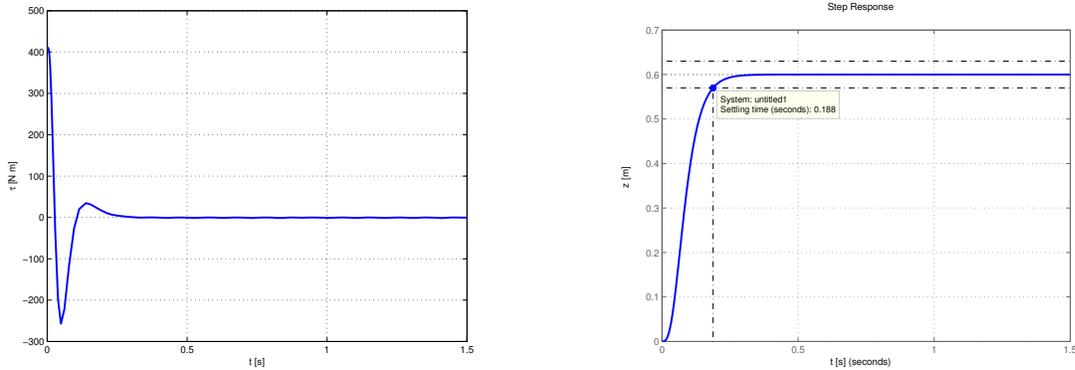


Figura 6: Schema Simulink del sistema tempo continuo chiuso in retroazione con il compensatore basato su regolatore al quale viene applicato come riferimento un gradino di ampiezza 0.6 m.



(a) Andamento del segnale di controllo  $\tilde{\tau}$  in ingresso al sistema.

(b) Andamento dell'uscita  $\tilde{x}_1$  relativa alla posizione della massa  $m$  rispetto alla posizione di equilibrio.

Figura 7: Andamento del controllo  $\tilde{\tau}$  e dell'uscita  $\tilde{x}_1$  ottenute con lo schema simulink di figura 6

Lo schema Simulink per la simulazione del sistema linearizzato con il compensatore basato sul regolatore e feedforward della sequenza di controllo pre-pianificata in avanti é riportato in figura ???. Il riferimento adottato in questo schema è l'uscita corrispondente alla sequenza ottima in feedforward ottenuta con lo schema di figura 3(b).

In figura 9 è riportato l'andamento della coppia controllo e della corrispondente uscita relativa al sistema controllato secondo lo schem Simulink di figura 8.

L'utilizzo della sequenza ottima come ingresso in feedforward e dell'uscita corrispondente come

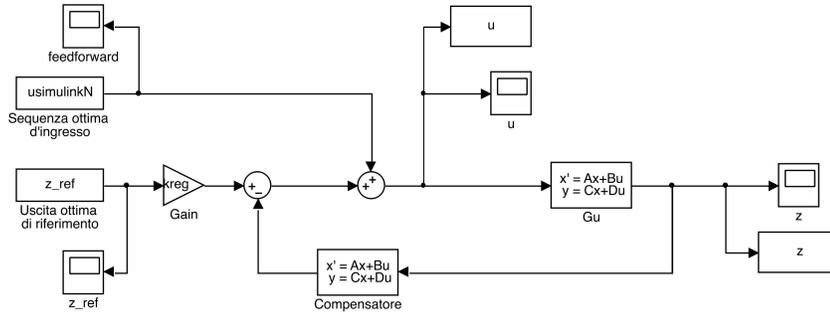
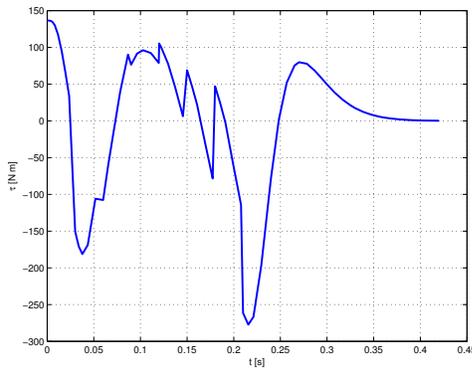
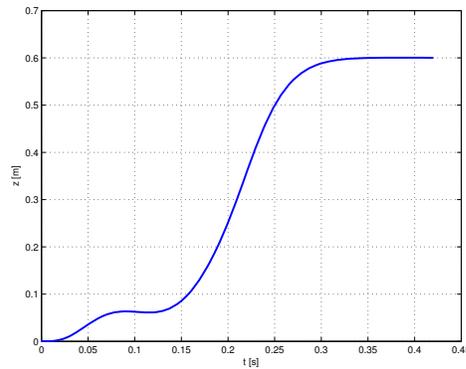


Figura 8: Schema Simulink del sistema tempo continuo chiuso in retroazione con il compensatore basato su regolatore. Si noti come in ingresso al sistema venga sommata la sequenza ottima ottenuta al punto A.3.4 e come riferimento la corrispondente uscita ottenuta con lo schema di figura 3(b).



(a) Andamento del segnale di controllo  $\tilde{\tau}$  in ingresso al sistema.



(b) Andamento dell'uscita  $\tilde{x}_1$  relativa alla posizione della massa  $m$  rispetto alla posizione di equilibrio.

Figura 9: Andamento del controllo  $\tilde{\tau}$  e dell'uscita  $\tilde{x}_1$  ottenute con lo schema simulink di figura 8

riferimento hanno abbassato i valori di controllo e allo stesso tempo anche il suo costo. D'altra parte, il riferimento meno ripido comporta un ritardo che si traduce in un tempo di assestamento un pò più lungo ma comunque inferiore a 0.3 s.

### Esercizio B.

Il linearizzato nell'origine dei tre sistemi nonlineari hanno matrice dinamica

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

pertanto nulla si può concludere circa la stabilità del sistema non lineare.

Si consideri quindi la candidata di Lyapunov e la si derivi rispetto al tempo:

$$\dot{V}(x_1, x_2) = 4x_1^3\dot{x}_1 + 4x_2\dot{x}_2 < 0 \quad \forall x \in \mathcal{R}^2.$$

Per il primo sistema si ottiene

$$\dot{V}_1(x_1, x_2) = -4x_1^6 - 4x_2^4,$$

per cui si conclude sulla globale asintotica stabilità dell'origine.

Per il secondo sistema si ottiene

$$V_2(x_1, x_2) = 4x_1^6 + 4x_2^4 > 0 \quad \forall x \in \mathcal{R}^2,$$

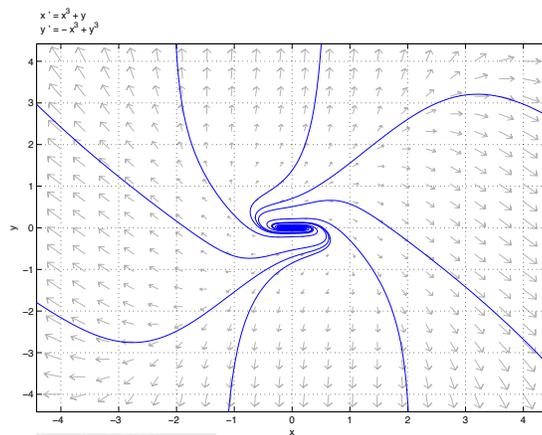
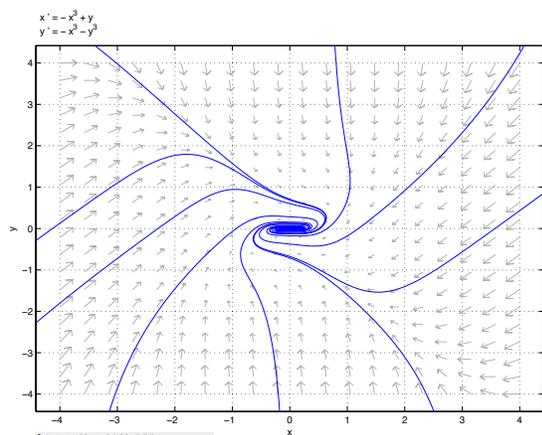
concludendo per la instabilità dell'origine.

Infine, per il terzo sistema,

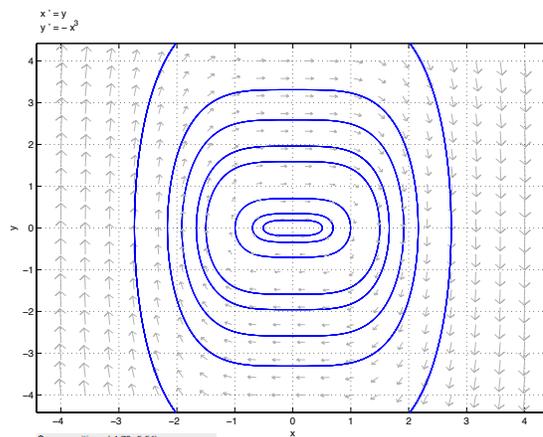
$$V_3(x_1, x_2) = 0 \quad \forall x \in \mathcal{R}^2,$$

e quindi l'origine è semplicemente stabile.

In figura 10 sono riportate le traiettorie per i tre sistemi non lineari.



(a) Traiettorie per il primo la cui origine è asintoticamente stabile. (b) Traiettorie per il secondo la cui origine è instabile.



(c) Traiettorie per il primo la cui origine è semplicemente stabile.

Figura 10: Traiettorie dei tre sistemi non lineari