

**Esercizio 1.**

Si consideri il sistema rappresentato in figura 1 costituito da una massa rotante attorno ad un perno, dotato di elasticità ed attrito viscoso, scorrevole su di una guida lineare collegata al telaio tramite un sistema molla-smorzatore. La massa è messa in rotazione attraverso un attuatore che esercita una forza orizzontale ad una certa distanza dal perno.

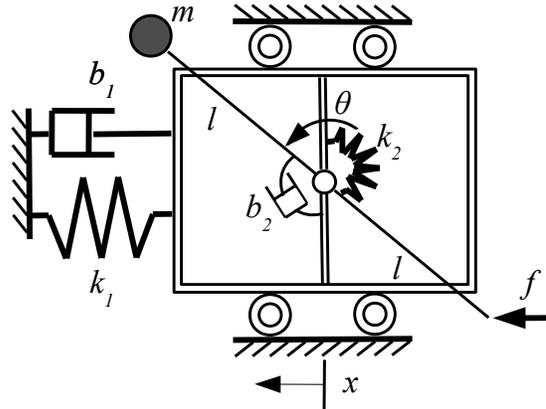


Figura 1: Schema del sistema meccanico.

Definendo un vettore degli stati nel modo seguente  $\xi = [\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4]^T = [x, \theta, \dot{x}, \dot{\theta}]^T$  le equazioni, linearizzate intorno all'equilibrio  $\xi = \dot{\xi} = 0$  e  $f = \dot{f} = 0$ , che descrivono la dinamica del sistema sono

$$\dot{\xi} = \begin{bmatrix} \xi_3 \\ \xi_4 \\ -\frac{b_1}{m}\xi_3 - \frac{k_1}{m}\xi_1 + \frac{f}{m} \\ -\frac{b_2}{ml^2}\xi_4 - \frac{k_2}{ml^2}\xi_2 - \frac{f}{ml} \end{bmatrix} \quad (1)$$

dove  $x$  rappresenta la posizione orizzontale del perno,  $\theta$  la posizione angolare della massa  $m_2$  attorno al perno,  $k_1$  e  $b_1$  la rigidità e il coefficiente di smorzamento che collegano la guida lineare e il telaio,  $k_2$  e  $b_2$  la rigidità e il coefficiente di smorzamento degli elementi posizionati tra la leva rotante e la guida lineare,  $l$  la lunghezza delle due metà della leva ed  $f$  la forza esercitata dall'attuatore.

Si considerino i seguenti valori numerici:  $m = 0.5$  Kg;  $l = 1.5$  m;  $b_1 = 5$  Ns/m;  $b_2 = 0.5$  N m s/rad;  $k_1 = 10$  N/m;  $k_2 = 3$  Nm/rad.

**A)** Si determini per il sistema linearizzato (1) la funzione di trasferimento tra l'ingresso  $u = f$  e l'uscita (linearizzata)  $y = \xi_1 + l\xi_2$ ;

**B)** Si determini una legge di controllo per  $u$  che agisca in modo da garantire che:

- B.1)** il sistema inseguia un riferimento unitario a gradino con un errore non superiore al 4%;
- B.2)** partendo dall'equilibrio, la massa si sposti di 1 m verso sinistra, senza mai superare tale valore raggiungendo una accuratezza del 2% entro un tempo non superiore a 40 s;
- B.3)** un rumore di misura del tipo  $\nu = \sin(\omega t)$  per  $\omega \geq 10$  rad/s non produca un'effetto sull'uscita maggiore dell' 5%.

Si riportino esplicitamente i diagrammi di Bode utilizzati per il progetto con le relative specifiche da rispettare, il controllore ottenuto motivandone il progetto, e la risposta al gradino ottenuta riportandone le caratteristiche più significative.

### Esercizio 2.

Si consideri il sistema rappresentato in figura 2 costituito da un pendolo di massa  $m$  e di lunghezza  $l$  collegato all'asse di rotazione attraverso una sistema molla-smorzatore di rigidezza  $k$  e coefficiente di smorzamento  $b$ . L'equazione che descrive la dinamica del sistema è:

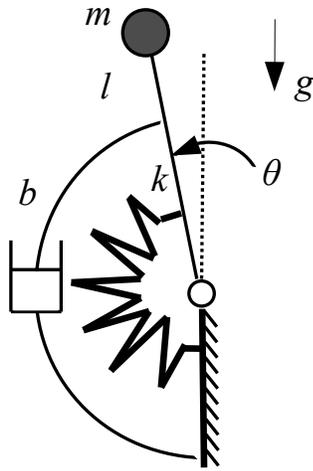


Figura 2: Schema del pendolo inverso.

$$ml^2\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + k\theta = mgl \sin(\theta), \quad (2)$$

dove  $\theta$  rappresenta la posizione angolare del pendolo e  $g$  l'accelerazione di gravità.

C) Si considerino i seguenti valori:  $\frac{2}{\pi}mgl \leq k \leq 2mgl$ ;  $0 \leq b \leq b_{max}$ .

C.1) Si dica quanti equilibri ha il sistema per i parametri appartenenti agli intervalli sopra indicati, motivando la risposta.

C.2) Si discuta la stabilità del sistema in un intorno dell'equilibrio  $\theta = 0$  per i parametri appartenenti agli intervalli sopra indicati, motivando la risposta.

### Esercizio 3.

Dato un sistema caratterizzato dalla funzione di trasferimento in ciclo aperto

$$G(s) = \frac{5s + a}{10s^2 + 50s + 1000},$$

D.1) Studiare la sensitività del sistema a piccole variazioni del parametro  $a$ .

D.2) Ipotizzando un valore nominale del parametro  $a = 3$ , si progetti un controllore tale che la sensitività del sistema controllato in ciclo chiuso rispetto a piccole variazioni del parametro  $a$  sia inferiore a  $-20$  dB.

## Soluzione

### Esercizio 1.

A) Il sistema (1) è lineare, quindi può essere direttamente posto nella forma

$$\dot{\xi} = A\xi + Bu$$

dove

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_1}{m} & 0 & -\frac{b_1}{m} & 0 \\ 0 & -\frac{k_2}{ml^2} & 0 & -\frac{b_2}{ml^2} \end{bmatrix}$$
$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{m} & -\frac{1}{ml} \end{bmatrix}^T$$
$$C = [1 \quad l \quad 0 \quad 0]$$

Sostituendo i valori numerici assegnati, e considerando il punto di equilibrio dato si ottiene:

$$\dot{\xi} = A\xi + Bu = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -20 & 0 & -10 & 0 \\ 0 & -2.67 & 0 & -0.44 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ -1.33 \end{bmatrix} u$$

$$\tilde{y} = C\xi = [1 \quad 1.5 \quad 0 \quad 0] \xi.$$

La funzione di trasferimento, espressa in forma simbolica, tra l'ingresso  $u$  e l'uscita  $y$  è

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{k_2 + b_2s - k_1l^2 - b_1l^2s}{(ml^2s^2 + b_2s + k_2)(ms^2 + b_1s + k_1)},$$

mentre quella numerica risulta

$$G(s) = \frac{-19.11(s + 1.814)}{(s + 2.764)(s + 7.236)(s^2 + 0.44s + 2.667)}. \quad (3)$$

La funzione di trasferimento presenta quindi due poli reali negativi ( $p_{1,2} = -\frac{b_1}{2m} \pm \sqrt{\frac{b_1^2}{4m^2} - \frac{k_1}{m}}$ ,  $p_1 \approx -2.764$ ,  $p_2 \approx -7.236$ ), due poli complessi e coniugati ( $p_{3,4} = -\frac{b_2}{2ml^2} \pm \sqrt{\frac{b_2^2}{4m^2l^4} - \frac{k_2}{ml^2}} \approx -0.22 \pm 1.62i$ ) ed uno zero reale negativo ( $z = \frac{k_2 - k_1l^2}{b_2 - b_1l^2} \approx -1.814$ ). Si può perciò concludere sulla asintotica stabilità del sistema in esame.

B) Siccome il sistema in anello aperto è asintoticamente stabile si può procedere direttamente con il progetto di un controllore del tipo

$$C(s) = \frac{K_c}{s^t} C_0(s), \text{ con } C_0(0) \geq 1.$$

in grado di soddisfare sia le specifiche statiche che quelle dinamiche.

**B.1)** Al fine di soddisfare la specifica, è necessario imporre che  $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t)$  sia inferiore al valore desiderato. Considerando che la funzione di trasferimento tra riferimento ed errore risulta

$$e(s) = \frac{1}{1 + C(s)G(s)} r(s),$$

per il teorema del valore finale questo è equivalente ad imporre

$$\lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + C(s)G(s)} \frac{1}{s} \leq \bar{e}$$

dove  $\bar{e} = 0.04$  è il massimo errore tollerato. Siccome le specifiche statiche non impongono la presenza di alcun polo nell'origine si sceglie un controllore di tipo zero ( $t = 0$ ). Supponendo  $C_0(s) = 1$  si può scrivere cautelativamente

$$|K_c G(0)| > \frac{1}{\bar{e}} \approx 27 \text{ dB}$$

Essendo  $G(0) = 0.65$  la specifica può essere soddisfatta richiedendo che  $K_c \geq 38$ . Questa specifica può essere visualizzata sul diagramma di Bode del modulo di  $C(s)G(s)$  (vedi figura 3) come un lower bound a bassissime frequenze.

**B.2)** Per rispettare la seconda specifica si tenta di far sì che il sistema controllato in ciclo chiuso presenti un comportamento del tipo ad un polo dominante. Per questo sistema è possibile valutare la pulsazione di taglio con la seguente formula approssimata

$$\omega_T \approx \frac{4}{T_a} \Rightarrow \omega_T \approx 10^{-1} \text{ rad/s.}$$

Per rispettare tale specifica il diagramma di Bode del modulo di  $C(j\omega)G(j\omega)$  (riportato in figura 3) dovrebbe idealmente tagliare con pendenza -1 per frequenze superiori a  $\omega_T$  con margine di fase uguale a  $\pi/2$ .

**B.3)** L'effetto del disturbo di misura  $\nu$  sulla uscita è dato dalla

$$y(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)} \nu(s).$$

Per rispettare questa specifica è possibile imporre che per frequenze superiori a  $\bar{\omega} = 1 \text{ rad/s}$  sia rispettata la condizione

$$N \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)} \leq Y \quad (4)$$

dove  $N = 1$  rappresenta l'ampiezza del disturbo, e  $Y = 0.05$  l'errore ammissibile in uscita. Assumendo che, nel campo di frequenze considerato si abbia  $|C(j\omega)G(j\omega)| \ll 1$ , la (4) può essere semplificata in

$$C(s)G(s) \leq Y/N \approx -26 \text{ dB} \quad (5)$$

Per rispettare tale specifica il diagramma di Bode del modulo di  $C(j\omega)G(j\omega)$  (riportato in figura 3) deve avere valore inferiore a circa  $-26 \text{ dB}$  per frequenze superiori a  $10 \text{ rad/s}$ .

### Progetto del controllore.

Al fine di rispettare le specifiche, è necessario che il diagramma delle ampiezze inizi a decrescere sensibilmente per frequenze inferiori a quelle corrispondenti alla pulsazione di taglio. Per far questo, è possibile inserire un polo reale in bassa frequenza ( $p_c = -0.005$ ). Con un opportuno valore del guadagno del controllore, tale scelta garantisce un attraversamento oltre la pulsazione di taglio con una pendenza pari a -1. Tuttavia, il margine di fase risulta ancora non adeguato. Per sistemarlo è sufficiente inserire uno zero reale in prossimità della frequenza di taglio ( $z_c = -1.7$ ). Il controllore risulta quindi

$$C(s) = K_c C_0(s) = -55 \frac{1 + 0.69s}{1 + 200s}.$$

che rappresenta di fatto una rete attenuatrice.

La risposta a gradino del sistema in retroazione è riportata in figura 4. Si noti inoltre che il controllore richiede un valore massimo di forza pari a  $1.5 \text{ N}$ .

**B bis)** Eseguendo i calcoli con la versione 2010a di MATLAB è stata determinata la seguente funzione di trasferimento

$$G_a(s) = 0.0005 \frac{(s - 38220)(s + 1.814)}{(s + 7.236)(s + 2.764)(s^2 + 0.444s + 2.666)},$$

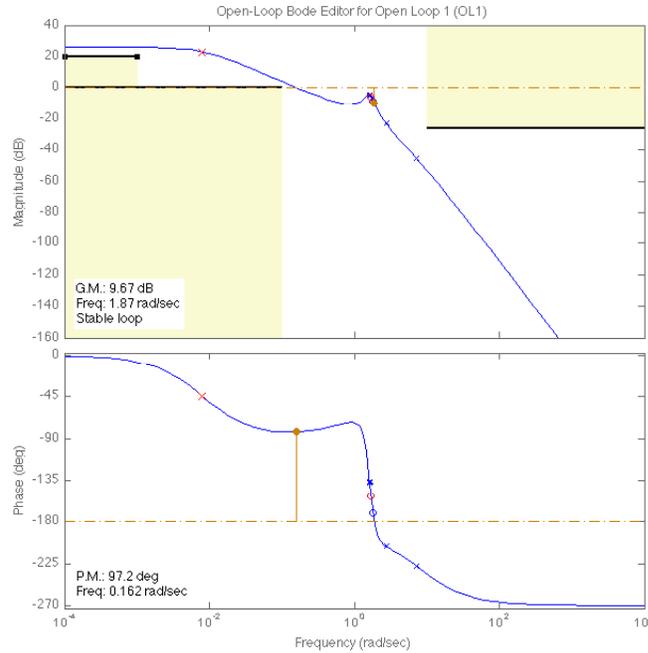


Figura 3: Diagramma di Bode del modulo e della fase di  $C(s)G(s)$  con le relative specifiche.

che differisce rispetto alla (3) per la presenza di uno zero reale positivo ad alta frequenza. Gli effetti di questa discrepanza (visibili in una leggera differenza nei diagrammi di Bode di  $G(s)$  e  $G_a(s)$ , riportati in figura 5 e figura 6, ad alte frequenze) sono trascurabili ai fini di quanto richiesto nella soluzione del compito. A tale proposito si riportano i diagrammi di Bode di  $CG_a(s)$  e la risposta al gradino nelle figure 7 e 8, rispettivamente. L'errore è probabilmente dovuto ad un bug delle funzioni  $inv()$  e  $ss()$  della versione 2010a di MATLAB utilizzate per calcolare la funzione di trasferimento. In appendice è riportato il calcolo esplicito simbolico della funzione di trasferimento eseguito con una metodologia applicabile con profitto nel caso di matrici non completamente piene, frequente quando si utilizza la forma di stato per descrivere la dinamica di un sistema.

## Esercizio 2.

- C) Si procede per prima cosa alla determinazione degli equilibri, per poi affrontare il secondo punto studiando il linearizzato attorno all'equilibrio indicato nel testo.

C.1) Sostituendo nella dinamica del sistema (2) le condizioni  $\ddot{\theta} = \dot{\theta} = 0$  si ottiene

$$\frac{k}{mgl}\theta = \sin(\theta). \quad (6)$$

La (6) è un'equazione nonlineare che ammette la soluzione  $\theta = 0 \forall k$ . Per  $k \geq mgl$  la soluzione è unica (la dimostrazione può essere effettuata, ad esempio, per via grafica, vedi Figg. 10 e 9), mentre per  $\frac{2}{\pi}mgl \leq k < mgl$  ammette tre soluzioni (sempre, ad esempio, per via grafica è possibile escludere l'esistenza di un numero maggiore di soluzioni, vedi figura 11); in questo caso le soluzioni diverse da quella del caso precedente non sono determinabili in modo esplicito.

C.2) Considerando un vettore di stato  $x = [\theta \dot{\theta}]^T$  si può scrivere la dinamica del sistema linearizzato intorno all'equilibrio  $x = \bar{x} = 0$  in forma di stato nel modo seguente

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{mgl - k}{ml^2} & -\frac{b}{ml^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Il polinomio caratteristico del sistema linearizzato è

$$\lambda(\lambda + \frac{b}{ml^2}) - \frac{mgl - k}{ml^2}$$

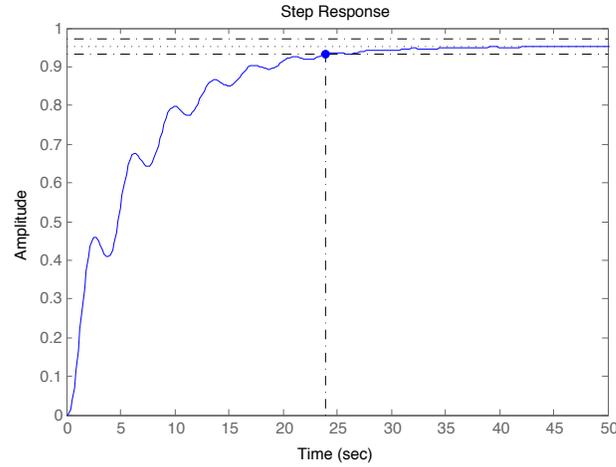


Figura 4: Risposta del sistema retroazionato ad un ingresso a gradino con tempo di assestamento al 2%

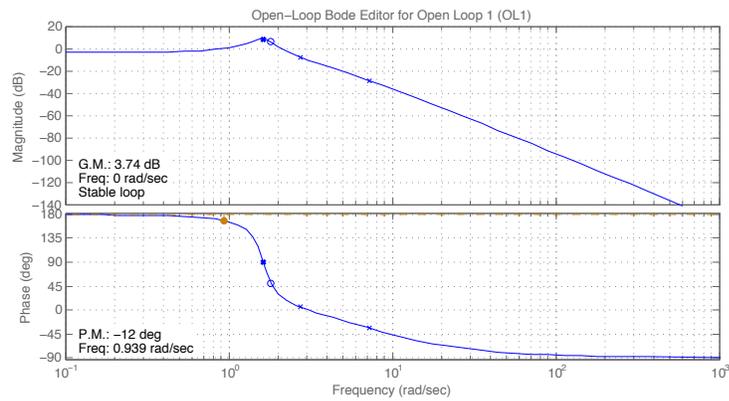


Figura 5: Digrammi di Bode del modulo e della fase di  $G(s)$

Gli autovalori del sistema (7) sono

$$\lambda_{1,2} = -\frac{b}{2ml^2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4m^2l^4} + \frac{mgl - k}{ml^2}}. \quad (8)$$

Si distinguono quattro casi:

- se  $k < mgl$  il radicando della (8) è positivo, quindi gli autovalori sono entrambi reali. In caso di autovalori reali è facile verificare che il segno dell'autovalore maggiore è dato dal segno di  $mgl - k$ , che in questo caso è positivo, quindi il sistema risulta instabile per qualsiasi  $b$ ;
- se  $k = mgl$  si evince dalla (7) che il sistema può avere uno o due autovalori nulli, se  $b = 0$  oppure  $b > 0$  rispettivamente. In entrambi i casi la molteplicità algebrica e geometrica risultano uguali quindi il sistema è marginalmente stabile;
- se  $k > mgl$  e  $b = 0$ , dalla (8) si evince che gli autovalori sono immaginari puri, quindi il sistema è marginalmente stabile;
- se  $k > mgl$  e  $b > 0$ , è facile vedere dalla (8) che gli autovalori, al variare di  $b$  possono essere reali negativi o complessi coniugati a parte reale negativa, in entrambi i casi il sistema risulta essere asintoticamente stabile.

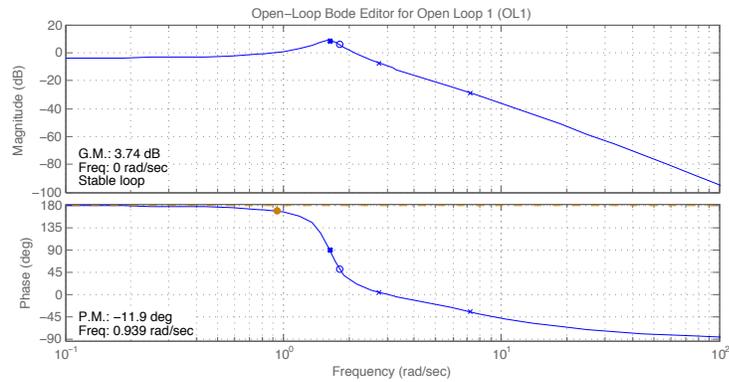


Figura 6: Digrammi di Bode del modulo e della fase di  $G_a(s)$

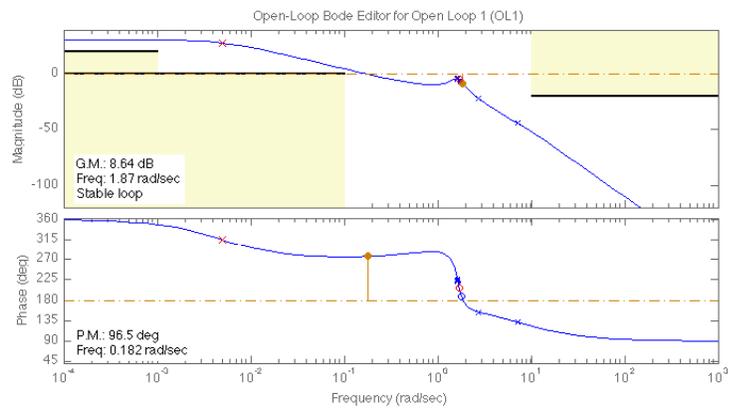


Figura 7: Digrammi di Bode del modulo e della fase di  $C(s)G_a(s)$  in cui sono visualizzate anche le specifiche del compito

### Esercizio 3.

D) La sensitività del sistema in anello aperto risulta

$$S_o(s) = \frac{\hat{a}}{5s + 3}.$$

In presenza di un regolatore in retroazione (negativa), con funzione di trasferimento  $C(s)$ , la sensitività totale in anello chiuso del sistema diventa

$$S_T(s) = S_c(s)S_o(s) = \frac{S_o(s)}{1 + C(s)G(s)}.$$

dove  $S_c(s)$  rappresenta la sensitività di anello. Ipotizzando un controllore costante  $C(s) = k$ , con il valore nominale di  $a = 3$ , si ottiene

$$S_c(s) = \frac{30s^2 + 150s + 3000}{(5s + 3)(10s^2 + (50 + 5k)s + (1000 + 3k))} < -20dB .$$

che è verificata per  $k > 3000$ . Il valore di  $k$  è determinato per  $S_c(s)|_{s \rightarrow 0}$ , che costituisce il caso peggiore, in quanto a questo valore di frequenze è massima la sensitività in anello aperto, come si può ad esempio vedere dal diagramma di Bode del modulo di  $S_o(s)$  riportato in figura 12. Si può verificare che per qualsiasi valore di  $k$  nell'intervallo selezionato i poli della f.d.t. in ciclo chiuso sono a parte reale negativa.

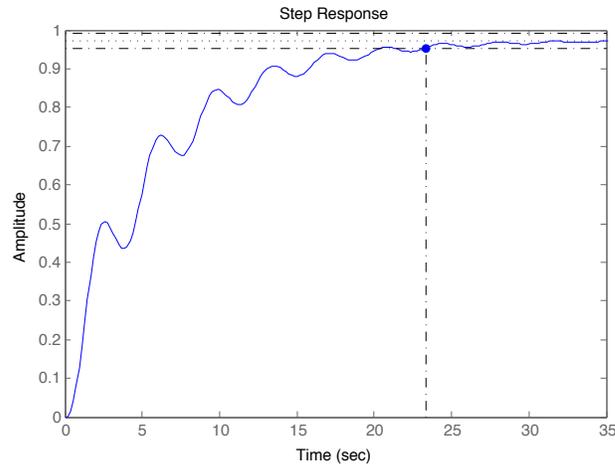


Figura 8: Risposta del sistema (f.d.t.  $G_a(s)$ ) retroazionato ad un ingresso a gradino con tempo di assestamento al 2%

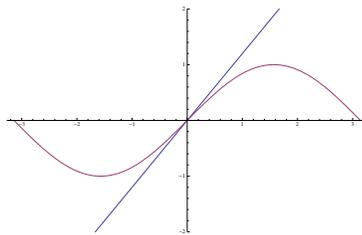


Figura 9: Grafico di  $\frac{k}{mgl}\theta$  e  $\sin(\theta)$  per  $k = 1.2mgl$ , questa condizione è valida per  $k > mgl$ .

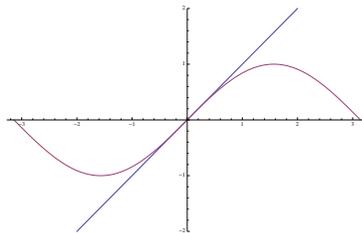


Figura 10: Grafico di  $\frac{k}{mgl}\theta$  e  $\sin(\theta)$  per  $k = mgl$ .

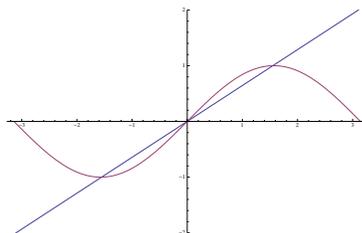


Figura 11: Grafico di  $\frac{k}{mgl}\theta$  e  $\sin(\theta)$  per  $k \approx \frac{2}{\pi}mgl$ , questa condizione è valida per  $k < mgl$  nell'intervallo considerato.

### Derivazione simbolica della funzione di trasferimento $G(s)$

La funzione di trasferimento è data da

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B.$$

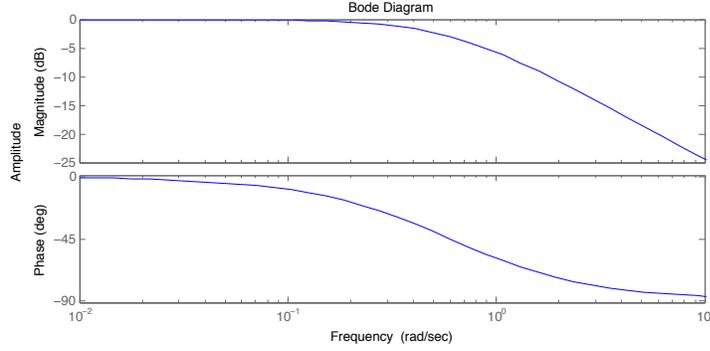


Figura 12: Digramma di Bode del modulo di  $S_o(s)$

Valutiamo dapprima l'elemento  $(sI - A)^{-1}$ , ricordando che

$$(sI - A) = \begin{bmatrix} s & 0 & -1 & 0 \\ 0 & s & 0 & -1 \\ -a_1 & 0 & s - a_2 & 0 \\ 0 & -a_3 & 0 & s - a_4 \end{bmatrix}$$

e che, per definizione, l'inversa  $X = (sI - A)^{-1}$  è una matrice quadrata di dimensione 4 che verifichi la relazione

$$(sI - A)X = I. \quad (9)$$

Uno dei metodi per calcolare gli elementi di  $X$  (denotati con  $X_{i,j}$ ) è quello di risolvere il sistema lineare (9). Prima di eseguire i calcoli si fa notare che

$$X_{1,2} = X_{1,4} = X_{2,1} = X_{2,3} = X_{3,2} = X_{3,4} = X_{4,1} = X_{4,3} = 0$$

I calcoli saranno eseguiti per una coppia a titolo di esempio: moltiplicando la prima riga di  $(sI - A)$  per la seconda colonna di  $X$  e uguagliando al corrispondente elemento di  $I$  ( $I_{1,2} = 0$ ) si ottiene

$$sX_{1,2} - X_{3,2} = 0, \quad (10)$$

e moltiplicando la terza riga di  $(sI - A)$  per la seconda colonna di  $X$  e uguagliando al corrispondente elemento di  $I$  ( $I_{3,2} = 0$ ) si ottiene

$$-a_1X_{1,2} + (s - a_2)X_{3,2} = 0. \quad (11)$$

Le due equazioni (10) e (11) costituiscono un sistema lineare omogeneo, che, quindi, ammette solamente la soluzione banale  $X_{1,2} = X_{3,2} = 0$ . Da questa considerazione discende che la matrice  $X$  avrà una struttura del tipo

$$X = \begin{bmatrix} X_{1,1} & 0 & X_{1,3} & 0 \\ 0 & X_{2,2} & 0 & X_{2,4} \\ X_{3,1} & 0 & X_{3,3} & 0 \\ 0 & X_{4,2} & 0 & X_{4,4} \end{bmatrix}.$$

Eseguito a questo punto la moltiplicazione matriciale  $CXB$  (considerando che  $C = [C_1 \ C_2 \ 0 \ 0]$  e che  $B = [0 \ 0 \ B_1 \ B_2]$ ) si trova che

$$G(s) = C_1B_1X_{1,3} + C_2B_2X_{2,4},$$

che, sostituendo  $C_1 = 1$ ,  $B_1 = 1/m$ ,  $C_2 = l$ ,  $B_2 = -1/ml$  con i dati del problema, diventa

$$G(s) = \frac{X_{1,3} - X_{2,4}}{m} \quad (12)$$

Ora valutiamo  $X_{1,3}$  e  $X_{2,4}$ , il primo è dato dal sistema di equazioni che si ottengono dalla moltiplicazione della prima e terza riga di  $sI - A$  per la terza colonna di  $X$

$$\begin{aligned} sX_{1,3} - X_{3,3} &= 0 \\ -a_1X_{1,3} + (s - a_2)X_{3,3} &= 1 \end{aligned}$$

che forniscono

$$x_{1,3} = \frac{1}{s^2 - a_2s - a_1}, \quad (13)$$

mentre per valutare  $X_{2,4}$  si consideri il sistema di equazioni fornito dalla moltiplicazione della seconda e quarta riga di  $sI - A$  per la quarta colonna di  $X$

$$\begin{aligned} sX_{2,4} - X_{4,4} &= 0 \\ -a_3X_{2,4} + (s - a_4)X_{4,4} &= 1 \end{aligned}$$

che danno

$$X_{2,4} = \frac{1}{s^2 - a_4s - a_3}. \quad (14)$$

Sostituendo la (13) e la (14) nella (12) si ottiene

$$G(s) = \frac{1}{m} \left( \frac{1}{s^2 - a_2s - a_1} - \frac{1}{s^2 - a_4s - a_3} \right). \quad (15)$$

Dalla (15), sviluppando i calcoli, si evince che  $G(s)$  ha un solo zero che risulta

$$z = \frac{a_3 - a_1}{a_2 - a_4} = \frac{k_1l^2 - k_2}{b_2 - b_1l^2}, \quad (16)$$

che, dopo aver sostituito i valori dati nel testo, risulta essere negativo.