

Si consideri il sistema rappresentato in figura 1 costituito da una mongolfiera che, grazie alla spinta aerostatica dovuta al riscaldamento dell'aria all'interno del pallone ad opera di un bruciatore, può sollevarsi in verticale vincendo la resistenza dell'aria, la forza peso ed eventuali resistenze dovute a correnti d'aria.

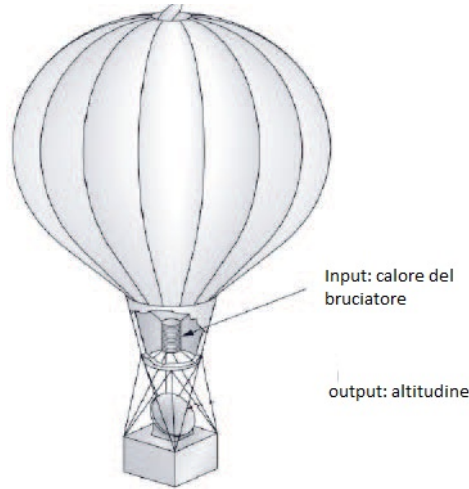


Figura 1: Mongolfiera.

Le equazioni che descrivono la dinamica del moto verticale della mongolfiera sono

$$\begin{cases} m\ddot{z} + b\dot{z} = -mg + f_w + Vg\rho_a \left(1 - \frac{\theta_a}{\theta}\right) \\ c\dot{\theta} + k(\theta - \theta_a) = q \end{cases} \quad (1)$$

dove z rappresenta la posizione del baricentro della mongolfiera, m la sua massa, b il coefficiente di attrito viscoso equivalente (utilizzato per modellare la resistenza dell'aria), g l'accelerazione di gravità, V il volume di aria contenuto nel pallone, f_w la forza esercitata da correnti d'aria, ρ_a la densità dell'aria alle condizioni ambientali di temperatura θ_a e pressione 1 atm; θ indica la temperatura dell'aria all'interno del pallone, c la capacità termica dell'aria nel pallone, k il coefficiente di scambio termico tra pallone e ambiente e q la potenza termica fornita dal bruciatore.

- A) Si determinino gli equilibri del sistema per $f_w = \bar{f}_w = 0$.
- B) Supponendo di disporre della misura dell'altitudine della mongolfiera ($y = z$), e di poter comandare la potenza termica del bruciatore ($u = q$), si determini una rappresentazione in forma di stato del sistema linearizzato intorno all'equilibrio calcolato al punto precedente.

Si considerino i seguenti valori numerici: $m = 500$ Kg; $b = 20$ Ns/m; $g = 9.81$ m/s²; $V = 2000$ m³; $\rho_a = 1.184$ Kg/m³; $\theta_a = 298$ K; $c = 718$ J/K; $k = 2.5$ W/K.

- C) Si determini per il sistema linearizzato la funzione di trasferimento tra l'ingresso u e l'uscita y e la funzione di trasferimento tra il disturbo $d = f_w$ e l'uscita y ;
- D) Si determini una legge di controllo per q che agisca in modo da garantire che:
- D.1) partendo dall'equilibrio, la mongolfiera si sposti di 1 m verso l'alto, raggiungendo esattamente questo valore senza mai superarlo più di 0.1 m, e raggiungendo una accuratezza del 2% entro un tempo non superiore a 60 s;
 - D.2) il sistema deve essere in grado di annullare completamente l'effetto sull'altitudine di un disturbo costante $d = \bar{d}$;
 - D.3) gli effetti di un disturbo periodico $d = \sin(\omega t)$ con $\omega \leq 10^{-2}$ rad/s devono produrre variazioni dell'altitudine non superiori al 10% del valore di regime.

Si disegni il diagramma a blocchi del sistema con il disturbo ed il controllore, si riporti esplicitamente il controllore ottenuto, il diagramma di Bode con le relative specifiche da rispettare e la risposta al gradino ottenuta con le caratteristiche significative.

E) Si descrivano le istruzioni di un programma per elaboratore digitale che simuli la dinamica libera del sistema nonlineare (1) partendo da condizioni di equilibrio con disturbo costante $d = d^*$.

F) Si consideri un sistema il cui polinomio caratteristico è dato da

$$\pi(s) = s^3 + b_1s^2 + b_2s + b_3,$$

dove i parametri b_i sono compresi nei seguenti intervalli:

- $1 \leq b_1 \leq 2$;
- $2 \leq b_2 \leq 4$;
- $1 \leq b_3 \leq 3$.

Si decida sulla stabilità del sistema in esame motivando la risposta.

G) Si consideri il diagramma a blocchi riportato in figura 2 e si valuti la funzione di trasferimento globale.

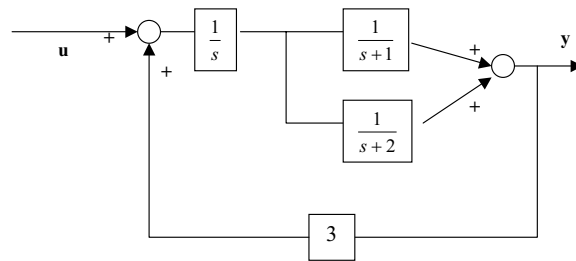


Figura 2: Diagramma a blocchi

Soluzione

A) Il sistema è descritto da tre variabili di stato z , \dot{z} e θ . Sostituendo $f_w = 0$ in (1) e imponendo $\dot{z} = \ddot{z} = \dot{\theta} = 0$, si ottengono i valori delle variabili di stato e del controllo all'equilibrio

$$\begin{aligned}\bar{\dot{z}} &= 0 \\ \bar{\theta} &= \frac{\theta_a}{1 - \frac{m}{V\rho_a}} \\ \bar{q} = \bar{u} &= k(\bar{\theta} - \theta_a).\end{aligned}$$

con $\bar{z} = \bar{x}_1 = \text{const.}$ qualsiasi.

B) Indicando con $x = [x_1, x_2, x_3]^T = [z, \dot{z}, \theta]^T$ le variabili di stato del sistema e con $u = q$ l'ingresso, e con $\tilde{x} = [\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3]^T = [z - \bar{z}, \dot{z}, \theta - \bar{\theta}]^T$ e con $\tilde{u} = q - \bar{q}$ lo stato e l'ingresso traslato, rispettivamente, il sistema nonlineare traslato nell'equilibrio è dato da:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_1 = \tilde{x}_2 \\ \dot{\tilde{x}}_2 = -\frac{b}{m}\tilde{x}_2 + \frac{Vg\rho_a}{m}\left(1 - \frac{\theta_a}{\tilde{x}_3 + \bar{\theta}}\right) - g + \frac{f_w}{m} \\ \dot{\tilde{x}}_3 = -\frac{k}{c}(\tilde{x}_3 + \bar{\theta} - \theta_a) + \frac{q}{c}. \end{cases} \quad (2)$$

Linearizzando attorno al punto di equilibrio delle nuove variabili di stato, ovvero l'origine, si ottiene

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + B_u\tilde{u} + B_d\tilde{d} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{b}{m} & \frac{g(V\rho_a - m)^2}{mV\rho_a\theta_a} \\ 0 & 0 & -\frac{k}{c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/c \end{bmatrix} \tilde{u} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \\ 0 \end{bmatrix} \tilde{d}.$$

Infine, l'uscita del sistema è l'altitudine della mongolfiera. Traslandola in corrispondenza della generica altitudine di equilibrio si ottiene $y = x_1 - \bar{z} = \tilde{x}_1$, ovvero

$$y = C\tilde{x} = [1 \quad 0 \quad 0] \tilde{x}.$$

C) Sostituendo i valori numerici assegnati, e considerando il punto di equilibrio dato si ottiene:

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + B_u\tilde{u} + B_d\tilde{d} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -0.04 & 0.097 \\ 0 & 0 & -0.0035 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.0014 \end{bmatrix} \tilde{u} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.002 \\ 0 \end{bmatrix} \tilde{d} \\ \tilde{y} = C\tilde{x} &= [1 \quad 0 \quad 0] \tilde{x}.\end{aligned}$$

La funzione di trasferimento simbolica tra l'ingresso \tilde{u} e l'uscita y diviene complessivamente

$$G_u(s) = C(sI - A)^{-1}B_u = \frac{g(V\rho_a - m)^2}{V\rho_a\theta_a s(b + ms)(k + cs)}, \quad (3)$$

e sostituendo i valori numerici si ottiene

$$G_u(s) = 1.3512 \cdot 10^{-4} \frac{1}{s(s + 0.04)(s + 0.003482)}. \quad (4)$$

La funzione di trasferimento presenta quindi un polo nell'origine e due poli reali negativi ($p_2 = -\frac{b}{m} \approx 0.04$, $p_3 = -\frac{k}{c} \approx 0.0035$), quindi il sistema è stabile in anello aperto.

La funzione di trasferimento simbolica tra il disturbo d (il diagramma a blocchi e riportato in figura 3) e l'uscita y è poi data da

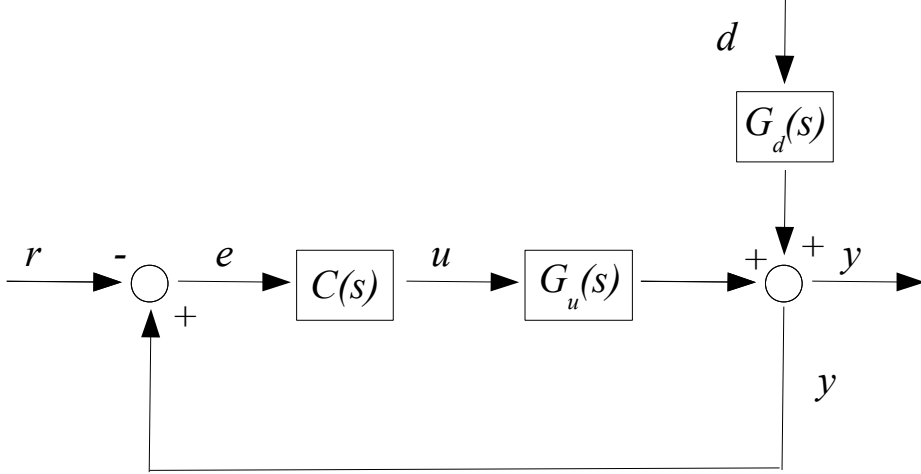


Figura 3: Diagramma a blocchi del sistema.

$$G_d(s) = C(sI - A)^{-1}B_d = \frac{1}{s(b + ms)}, \quad (5)$$

che per i parametri dati vale

$$G_d(s) = \frac{1}{s(500s + 20)} = 2 \cdot 10^{-3} \frac{1}{s(s + 0.04)}. \quad (6)$$

- D) Siccome il sistema in anello aperto risulta essere stabile si può procedere direttamente con il progetto di un controllore del tipo

$$C(s) = \frac{K_c}{s^t} C_0(s), \text{ con } C_0(0) \geq 1.$$

in grado di soddisfare sia le specifiche statiche che quelle dinamiche.

Dalla specifica D.2 si ricava che il controllore, avendo la f.d.t. $G_d(s)$ un polo nell'origine, deve essere di tipo 1 ($t = 1$). Se infatti si considera la f.d.t. in anello chiuso tra il disturbo e l'errore, si ha

$$e(s) = -G_d(s) \frac{1}{1 + \frac{K_c}{s^t} C_0(s) G_u(s)} d(s) = -\frac{s^t(k + cs)}{s^{t+1}(b + ms)(k + cs) + K_c K_u C_0(s)} d(s)$$

da cui la necessità, affinché $\lim_{s \rightarrow 0} s e(s) = 0$ per $d(s) = 1/s$, di avere $t = 1$.

Il guadagno K_c e $C_0(s)$ non sono vincolati dalle specifiche statiche. Le specifiche richiedono una sovraelongazione massima $S = 10\%$ ed un tempo di assestamento $T_a = 60$ s al 2% del valore di regime. Si può pertanto procedere al soddisfacimento di tali specifiche tentando di progettare un controllore tale che il sistema in anello chiuso risultante sia approssimabile con un sistema a due poli dominanti. Per tale tipo di sistema le specifiche sulla sovraelongazione massima e tempo di assestamento possono essere tradotte sui diagrammi di Bode con le specifiche su margine di fase M_ϕ e pulsazione di taglio ω_T date da

$$S = e^{\left(-\frac{\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}\right)} \Rightarrow \delta \approx 0.59 \Rightarrow M_\phi \approx 100\delta \approx 59^\circ$$

$$\omega_T = \frac{4}{\delta T_a} \Rightarrow \omega_T \approx 10^{-1} \text{ rad/s}$$

Per quanto riguarda la componente sinusoidale del disturbo d , supponendo che il sistema controllato in ciclo chiuso sia asintoticamente stabile, è possibile applicare il teorema della risposta armonica. La funzione di trasferimento tra il disturbo d e l'uscita del sistema controllato in retroazione (facendo riferimento al diagramma a blocchi di figura 3) può essere calcolata nel modo seguente

$$Y = \frac{G_d(s)}{1 + C(s)G_u(s)} d(s) = \bar{G}(s)d(s), \quad (7)$$

e, il teorema della risposta armonica, si ha che

$$y(t) = |\bar{G}| \sin(\omega t + \angle \bar{G}). \quad (8)$$

Considerando cautelativamente $\sin(\omega t + \angle \bar{G}) = 1$, la specifica richiede che, per pulsazioni $\omega \leq 10^{-2}$ rad/s, si abbia $|y(t)| < 5$ mm, e può essere soddisfatta ponendo

$$|\bar{G}| = \frac{|G_d|}{|1 + G_u C|} \leq 0.1. \quad (9)$$

Calcolando i reciproci di entrambi i membri e trascurando 1 poichè normalmente a basse frequenze $|G_u C| \gg 1$ si ha

$$|G_u(s)C(s)| \geq \frac{1}{0.1}|G_d(s)|, \quad s = j\omega, \quad \omega \leq 10^{-2} \text{ rad/s}. \quad (10)$$

Quindi, considerando che la pulsazione di taglio 0.037 rad/s del disturbo è maggiore di 10^{-2} rad/s, nel campo di frequenze di interesse si può approssimare $|G_d(j\omega)|$ (i diagrammi di bode di $G_d(s)$ sono riportati in figura 4) con una semiretta di pendenza -20 dB/dec che interseca l'asse delle ascisse alla frequenza di taglio. Questa deve essere traslata di un valore pari a $-20 \log_{10}(0.1) = 20$ dB.

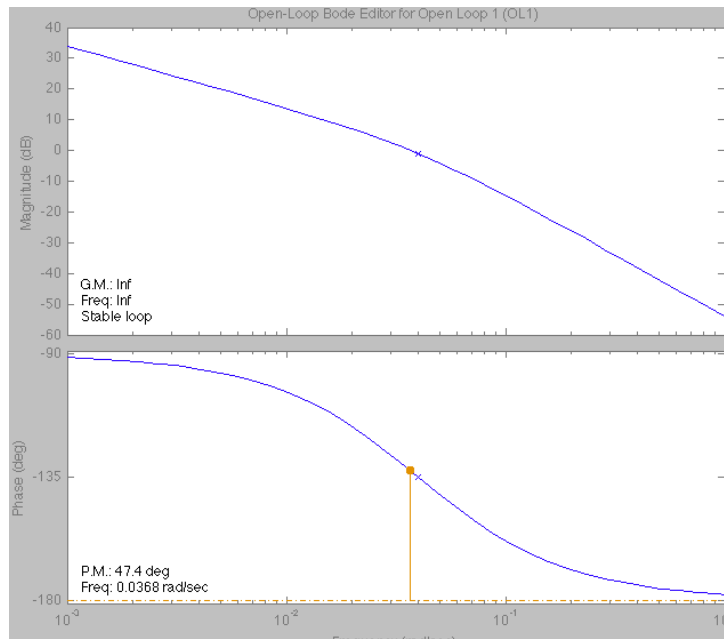


Figura 4: Diagrammi di Bode di $G_d(s)$

Progetto del controllore.

Per soddisfare le specifiche precedenti, visualizzate sul diagramma di Bode di $C(s)G_u(s)$ in figura 5, si può progettare un controllore dinamico $C(s)$ che consiste di due azioni anticipatrici a poli coincidenti ed uno zero, del tipo

$$C(s) = \frac{K_c}{s} C_0(s) = \frac{K'_c (s + 0.008)^2 (s + 0.08)}{s (s + 1.8)^2} = \frac{0.01 (120s + 1)^2 (20s + 1)}{s (0.56s + 1)^2}$$

Si noti che, per la presenza del polo nell'origine del controllore, è possibile utilizzare in $C_0(s)$ tre zeri e due poli, senza che il controllore complessivo $C(s)$ risulti non fisicamente realizzabile. Il posizionamento degli zeri delle reti ad anticipo ed il valore di K'_c , determinati per tentativi, portano ad un $M_\phi = \pi/3$ e $\omega_T = 0.4$ rad/s.

La risposta a gradino del sistema in retroazione è riportata in figura 6.

Si noti che il controllore richiede un valore massimo della potenza termica di 2.5 kW.

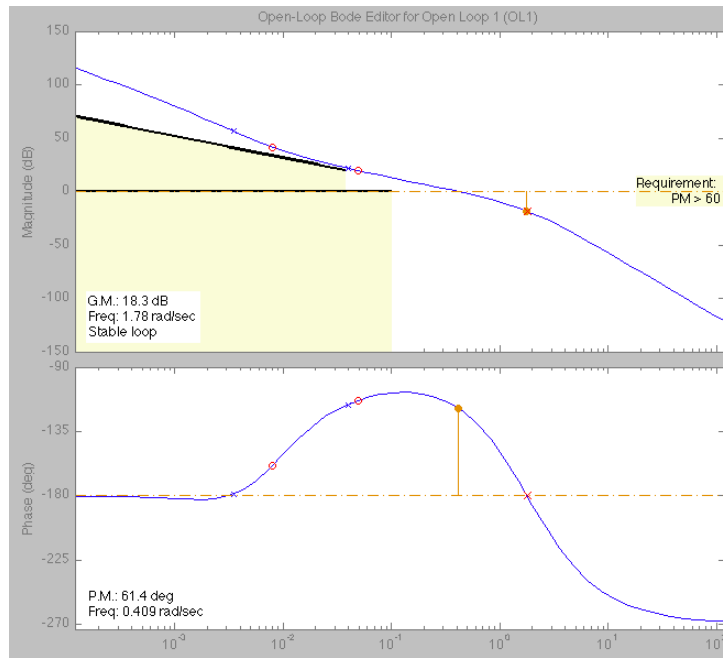


Figura 5: Diagrammi di Bode di $C(s)G_u(s)$ con relative specifiche

- E) Si consideri il sistema in forma di stato nonlineare riportato in (2). Utilizzando il metodo di Eulero in avanti $\dot{x} \approx (x(k+1) - x(k))/T$ (dove T rappresenta il tempo di campionamento) si può scrivere il seguente sistema (in cui si è posto $u = 0$)

$$x(k+1) = f(x(k)) = \begin{bmatrix} Tx_2(k) + x_1(k) \\ T \left(-b/mx_2(k) - g + d^*/m + V\rho_a g/m \left(1 - \frac{\theta_a}{x_3(k)} \right) \right) + x_2(k) \\ -Tk/c(x_3(k) - \theta_a) + x_3(k) \end{bmatrix}, \quad (11)$$

che sarà utilizzato come legge di aggiornamento degli stati.

Il sistema 11 può essere simulato con il seguente programma

```
%costanti
T=0.001; %scelta del tempo T
m = , b = , g = , d* = , V = , rhoa = , thetaa = , c = , k = ; %parametri del sistema
%condizioni iniziali
x = [x_1_0, x_2_0, x_3_0]

% ciclo indefinito fino ad interruzione
while(condizione_arresto == 'false')

%salvataggio stati
write x

y= x_1; %l'uscita è la prima componente del vettore degli stati

% Scrivi il valore di uscita y sulla porta "output"
write(y,output);

% Aggiorna lo stato
x=f(x);

end
```

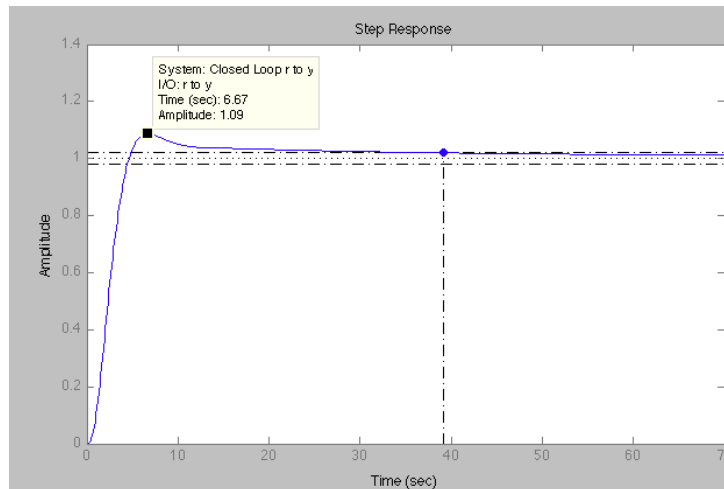


Figura 6: Risposta del sistema retroazionato ad un ingresso a gradino con sovraelongazione inferiore al 10% e tempo di assestamento al 2% inferiore a 40 s.

F) La tabella di Routh generica per il polinomio in questione è

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & b_2 \\ s^2 & b_1 & b_3 \\ s & b_2 - \frac{b_3}{b_1} & \\ s^0 & b_3 & \end{array}$$

Si può tentare di risolvere il problema utilizzando esclusivamente il criterio di Routh studiando il segno dei coefficienti della prima colonna della tabella. Tuttavia questo approccio risulta difficile poichè per dimostrare la stabilità, è necessario provare che, nello spazio dei parametri b_1, b_2, b_3 , l'insieme dato dagli intervalli di ammissibilità sia incluso nell'insieme dato dalle condizioni date dal criterio di Routh (tutti gli elementi della prima colonna positivi, dato che il primo è positivo). Per provare l'instabilità invece è necessario provare che esiste un punto nell'insieme dato dagli intervalli di ammissibilità che non verifica le condizioni del criterio.

Invece, per il criterio di Kharitonov si può concludere sulla stabilità di un sistema LTITC SISO con incertezza sui parametri studiando la stabilità, ad esempio utilizzando il criterio di Routh, dei 4 polinomi angolari che nel caso in esame sono

$$\begin{aligned} s^3 + 2s^2 + 2s + 1 &= 0 \\ s^3 + s^2 + 4s + 3 &= 0 \\ s^3 + s^2 + 2s + 3 &= 0 \\ s^3 + 2s^2 + 4s + 1 &= 0. \end{aligned}$$

Siccome b_1 e b_3 sono positivi, si considera il terzo coefficiente della prima colonna della tabella di Routh. Esso risulta negativo per il terzo polinomio angolare, quindi si può concludere che il sistema non è asintoticamente stabile per tutti i valori dei parametri negli intervalli in esame.

G) La funzione di trasferimento della connessione in parallelo è

$$G_p(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+2} = \frac{2s+3}{(s+1)(s+2)}.$$

A questo punto si consideri la funzione di trasferimento ottenuta dalla serie tra $1/s$ e $G_p(s)$ che risulta essere

$$G_s(s) = \frac{2s+3}{s(s+1)(s+2)}.$$

Infine, dopo aver sviluppato l'anello in retroazione si ottiene

$$G_r(s) = \frac{G_s(s)}{1 - 3G_s(s)} = (2s + 3)/(s^3 + 3s^2 - 4s - 9).$$