

**Esercizio 1.**

Supponiamo di voler approssimare la funzione di trasferimento di un sistema il cui modello non è noto. A tal fine si impongono al sistema vari segnali di ingresso e se ne osserva la risposta avendo atteso sufficientemente a lungo affinché si estinguano fenomeni transitori. La Fig. 1 riporta in rosso la risposta di regime ad un generico segnale di ingresso (in blu). In tabella 1 sono invece riportati i dati utili che consentono di caratterizzare i segnali di figura 1.

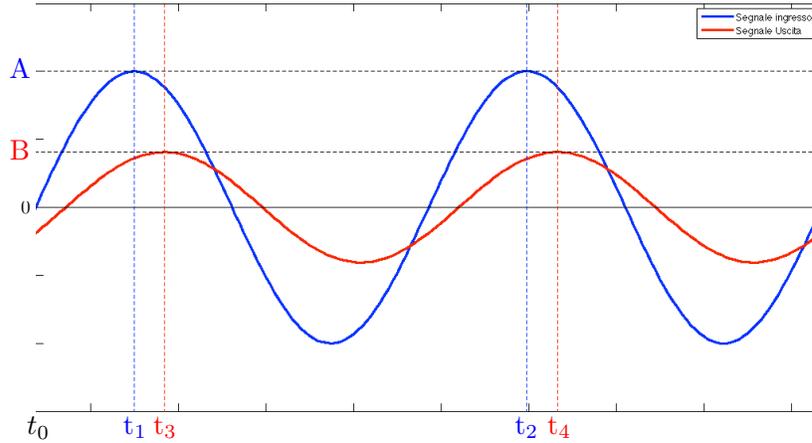


Figure 1: Risposta del sistema, il cui modello non è noto, ed il corrispondente segnale di ingresso.

Table 1: Dati Sperimentali Osservati

Ingresso	A	B	$t_1$	$t_2$	$t_3$	$t_4$
#1	10	0.56771	282.7433	408.407	281.9474	407.6111
#2	20	1.1526	259.1814	290.5973	258.3947	289.8106
#3	10	0.62215	254.469	267.0354	253.7282	266.2946
#4	30	2.2874	252.8982	259.1814	252.2726	258.5558
#5	40	4.6112	252.1128	255.2544	251.69	254.8316
#6	50	11.7397	251.6416	252.8982	251.4756	252.7322
#7	10	3.6105	251.4845	252.1128	251.4284	252.0567
#8	10	4.4466	251.406	251.7201	251.3964	251.7105
#9	10	4.0289	251.3499	251.4396	251.3572	251.4469
#10	20	4.3306	251.3353	251.3667	251.3407	251.3721
#11	10	0.94295	251.3306	251.3431	251.3334	251.3459
#12	30	1.4335	251.329	251.3353	251.3304	251.3367

Si determini un'approssimazione della funzione di trasferimento del sistema che le ha generate e se ne tracci il diagramma di Bode.

**Esercizio 2.**

Si consideri il sistema meccanico rappresentato in figura 2.

Esso è costituito da due carrelli entrambi di massa  $m$  connessi tra loro per mezzo di una sbarra rigida. Inoltre, i due carrelli sono collegati per mezzo di due molle di costante elastica  $K_1$  e  $K_2$  ad un'asta lunga  $2\ell$  incernierata nel punto  $O$  e si muovono nella direzione individuata dall'asse  $x$  con attrito dinamico caratterizzato da un coefficiente  $\beta$ .

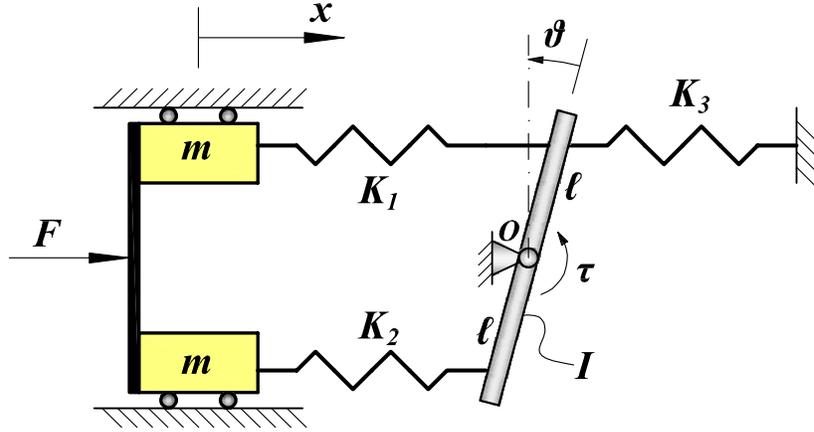


Figure 2: Schema meccanico del sistema.

L'asta di inerzia  $I$ , è libera di ruotare rispetto al punto  $O$  ed è connessa con una molla di costante elastica  $K_3$  ad un supporto fisso. Il sistema meccanico viene attuato tramite una coppia  $\tau$  applicata in corrispondenza del punto  $O$  dove l'asta è incernierata. Sul sistema agisce inoltre una forza  $F$  applicata ad entrambe le masse. Indicando con  $\theta$  l'angolo che l'asta forma con la verticale per il punto  $O$ , con  $x$  la posizione delle due masse rispetto all'equilibrio, la dinamica del sistema corrispondente a piccoli spostamenti angolari  $\theta$  è descritta da

$$2m\ddot{x} + K_1(x - \theta\ell) + K_2(x + \theta\ell) = F - \beta\dot{x}$$

$$I\ddot{\theta} - K_1\ell(x - \theta\ell) + K_2\ell(x + \theta\ell) + K_3\ell^2\theta = \tau.$$

Si considerino i seguenti valori numerici:  $m = 1$  Kg,  $I = 2$  kg m<sup>2</sup>,  $K_1 = 20$  N/m,  $K_2 = 30$  N/m,  $K_3 = 40$  N/m,  $\beta = 5$  Ns/m e  $\ell = 1$  m.

**A** Si determini la funzione di trasferimento tra l'ingresso  $\tau$  e l'uscita  $\theta$ , e quella tra la forza  $F$  e l'uscita  $\theta$ . Si analizzi la posizione assunta dagli zeri e il loro effetto sulla risposta a gradino.

**B** Si determini una legge di controllo per la coppia  $\tau$  che agisca in modo da garantire le seguenti specifiche:

**B.1** partendo da  $\theta = 0$ , il sistema deve portarsi a regime ad un valore  $\theta = \bar{\theta}$ , raggiungendo un valore compreso nell'intervallo  $\bar{\theta} \pm 2\%$  in un tempo non superiore a 5 s e senza mai eccedere un valore limite di  $1.1\bar{\theta}$ ;

**B.2** ipotizzando che la forza  $F$  applicata ad entrambe le masse sia

$$F = \bar{F}_d + F_d \sin(\omega_F t), \quad 0 \leq F_d \leq 10N, \quad \omega_F \leq 1 \text{ rad/s},$$

cioè somma di una componente costante di valore  $\bar{F}$  generico e una componente variabile sinusoidalmente, si garantisca che:

- lo scostamento indotto dalla componente costante  $\bar{F}$  della forza sull'angolo  $\theta$  rispetto al valore nominale  $\bar{\theta}$  sia completamente annullato;
- la variazione indotta dalla componente sinusoidale sull'angolo  $\theta$  sia inferiore a  $2 \cdot 10^{-3}$  rad;

**B.3** Si riporti esplicitamente il controllore ottenuto, il diagramma di Bode con le relative specifiche da rispettare e la risposta al gradino ottenuta con le caratteristiche significative.

## Soluzione

### Esercizio 1.

Vengono forniti ampiezza ed istanti di tempo di due picchi consecutivi del segnale di ingresso e del segnale di uscita di regime di un sistema che è asintoticamente stabile. Dalla figura 1 si vede inoltre che all'istante di tempo  $t_0$  il segnale di ingresso ha ampiezza nulla. Posto convenzionalmente  $t_0 = 0$  e utilizzando queste informazioni è quindi possibile caratterizzare le sinusoidi di ingresso e uscita come

$$\text{segnale di ingresso} \rightarrow A \sin(\omega_A t)$$

$$\text{segnale di uscita} \rightarrow B \sin(\omega_B t + \phi)$$

con

$$\begin{cases} \omega_A = \frac{2\pi}{t_2 - t_1} \\ \omega_B = \frac{2\pi}{t_4 - t_3} \\ \phi = \omega_A t_1 - \omega_B t_3 \end{cases}.$$

In tabella 2 è riportato il risultato del calcolo effettuato per ogni ingresso. Allo scopo di approssimare la f.d.t. del

Table 2: Dati Sperimentali Osservati

Ingresso	$\frac{B}{A}$	$\omega_A$	$\omega_B$	$\phi$
#1	0.056771	0.05	0.05	0.039795
#2	0.057631	0.2	0.2	0.15734
#3	0.062215	0.5	0.5	0.37039
#4	0.076246	1	1	0.6256
#5	0.11528	2	2	0.84559
#6	0.23479	5	5	0.82989
#7	0.36105	10	10	0.56086
#8	0.44466	20	20	0.19317
#9	0.40289	70	70	-0.51164
#10	0.21653	200	200	-1.0839
#11	0.094295	500	500	-1.3656
#12	0.047783	1000	1000	-1.4674

sistema che ha generato le risposte per i segnali di ingresso dati, si può procedere riportando le informazioni di tabella 2 sul diagramma di bode in modo da individuarne il guadagno statico, la posizione di poli ed eventuali zeri. Si ricorda infatti che per il teorema della risposta armonica un sistema lineare e stazionario, sollecitato da un ingresso sinusoidale di pulsazione  $\omega$ ,  $A \sin(\omega t)$ , se asintoticamente stabile, presenta a regime una risposta sinusoidale avente la stessa frequenza dell'eccitazione con ampiezza pari al modulo della risposta in frequenza e differenza di fase pari alla fase della risposta in frequenza, ovvero

$$y(t) = |G(j\omega)|A \sin(\omega t + \angle G(j\omega)).$$

È quindi possibile ottenere una rappresentazione di tali dati sugli assi di un diagramma di Bode riportando il valore di ampiezza,  $|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log_{10} \frac{B}{A}$ , e fase  $\angle G(j\omega)_{deg}$  per ogni frequenza dei segnali di ingresso disponibili. In Fig. 3 è anche riportato l'andamento di una curva ottenuta con un fitting polinomiale generato con l'ausilio di Matlab per mezzo del comando "plot" che potrebbe approssimare tali dati.

Osservando l'andamento dei punti, si può concludere che

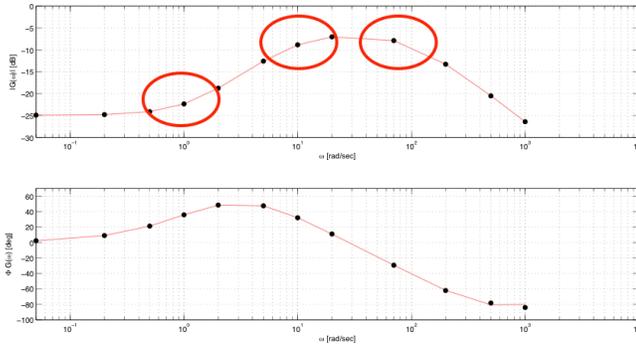


Figure 3: Diagramma di Bode Approssimato.

- 1) la f.d.t. è a fase minima poichè l'andamento delle fasi è compatibile con la formula di bode e la sua approssimazione (fase proporzionale alla pendenza lontano dalle singolarità);
- 2) non presenta integratori o derivatori (ha fase nulla per  $\omega \rightarrow 0$ );
- 3) ha un eccesso polo zero uguale a 1 ( $\phi \approx -90$  e ampiezza decrescente di 20 dB per decade per valori elevati di  $\omega$ ).

Possiamo inoltre congetturare la presenza di uno zero reale negativo intorno ad 1, e di due poli reali negativi, uno intorno a 10 e l'altro intorno a 100 (cerchi in rosso). Quindi una possibile approssimazione di  $G(s)$  può essere data da

$$G(s) = \frac{K}{10 \cdot 100} \frac{(s + 1)}{(0.1s + 1)(0.01s + 1)} = 50 \frac{(s + 1)}{(s + 10)(s + 100)},$$

dove l'approssimazione di  $K \approx \frac{1000B}{A} = 50$  è stata ottenuta considerando il valore  $B = 0.5$  per  $\omega = 0.05$ . In figura

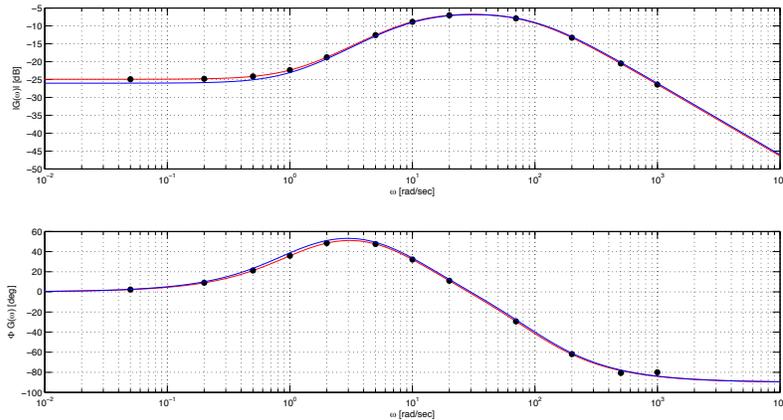


Figure 4: Diagramma di Bode di  $G(s)$ .

4 è riportato il diagramma di Bode di  $G(s)$  (in rosso) insieme con i punti ricavati dalle informazioni in tabella 1 e sovrapposto a quello della funzione reale  $G_r(S) = 48 \frac{(s+1.1)}{(s+9.8)(s+95)}$  (in blu).

### Esercizio 2.

**A** Detto  $q = [x, \theta, \dot{x}, \dot{\theta}]^T$  il vettore delle variabili di stato, assumendo come vettore degli ingressi  $u = [u_1 \ u_2] = [\tau, F]^T$ ,

il sistema scritto in forma di stato assume la seguente forma:

$$\dot{q} = Aq + B_1 u_1 + B_2 u_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{K_1+K_2}{2m} & -\frac{\ell(K_2-K_1)}{2m} & -\frac{\beta}{2m} & 0 \\ -\frac{\ell(K_2-K_1)}{I} & -\frac{\ell^2(K_1+K_2+K_3)}{I} & 0 & 0 \end{bmatrix} q + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{I} \end{bmatrix} u_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2m} \\ 0 \end{bmatrix} u_2$$

$$y = Cq = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} q$$

Sostituendo i valori numerici assegnati si ottiene:

$$\dot{q} = Aq + B_1 u_1 + B_2 u_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -25 & -5 & -2 & 0 \\ -5 & -45 & 0 & 0 \end{bmatrix} q + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.5 \end{bmatrix} u_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.5 \\ 0 \end{bmatrix} u_2$$

$$y = Cq = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} q$$

La funzione di trasferimento tra l'ingresso  $\tau$  e l'uscita  $\theta$  diviene complessivamente

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B_1 = \frac{0.5(s^2 + 2.5s + 25)}{(s^2 + 2.414s + 24.05)(s^2 + 0.08605s + 45.75)}$$

che presenta due coppie di poli complessi coniugati a parte reale negativa precisamente in  $\lambda_{1,2} = -1.2070 \pm 4.7527i$  e  $\lambda_{1,2} = -0.0430 \pm 6.7635i$ . Il sistema risulta quindi essere stabile. La f.d.t. presenta inoltre una coppia di zeri a parte reale negativa che introducono un ritardo.

La f.d.t. tra la forza  $F$  e l'uscita risulta invece

$$G_F(s) = C(sI - A)^{-1}B_2 = \frac{-2.5}{(s^2 + 2.414s + 24.05)(s^2 + 0.08605s + 45.75)}$$

**B** Il sistema è stabile. Pertanto il progetto di un controllore che permetta al sistema complessivo di rispettare le specifiche può essere affrontato direttamente sui diagrammi di Bode. Faremo riferimento allo schema a blocchi di fig. 5 e al progetto di un controllore del tipo

$$C(s) = \frac{K_c}{s^t} C_0(s), \text{ con } C_0(0) = 1.$$

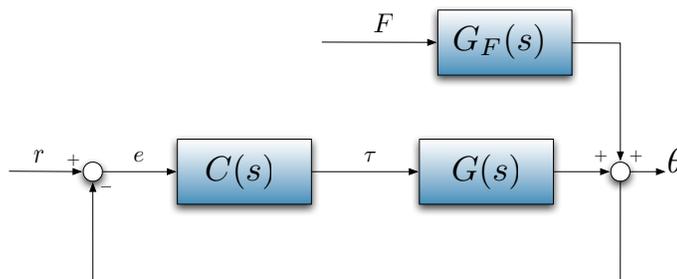


Figure 5: Schema a blocchi complessivo.

**B.1** Iniziamo con la scelta del tipo  $t$  e della costante di guadagno  $K_c$  del controllore basandoci sulle specifiche statiche. La prima specifica chiede errore nullo a regime per l'inseguimento a segnali costanti  $\theta(t) = \bar{\theta}$ . Poichè  $G(s)$  non ne possiede, è necessario porre  $t = 1$  nel controllore. La costante  $K_c$  non è fissata dalle specifiche statiche (lo potrebbe essere se ad esempio fosse richiesto un errore di inseguimento limitato ad un riferimento a rampa lineare). Il valore di  $K_c$  sarà quindi determinato successivamente per rispettare le altre specifiche.

Nella seconda parte della specifica è richiesto un tempo di assestamento al 2% del valore di regime, inferiore a 5s, permettendo una sovraelongazione che al massimo sia pari al 10% del valore costante  $\bar{\theta}$  assegnato. Tentiamo di esaudire le specifiche sul tempo di assestamento e sulla sovraelongazione percentuale  $S\%$  progettando un controllore che permetta di approssimare il sistema in anello chiuso con un modello a due poli dominanti le cui caratteristiche frequenziali siano

$$S = e\left(-\frac{\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}\right) \Rightarrow \delta = 0.59 \Rightarrow M_\phi \approx 60 \text{ deg}$$

$$\omega_T = \frac{4}{\delta T_a} \Rightarrow \omega_T \approx 1.33 \text{ rad/s}$$

Il diagramma di Bode con i vincoli sulla pulsazione di taglio  $\omega_T$  sono riportati in figura 6.

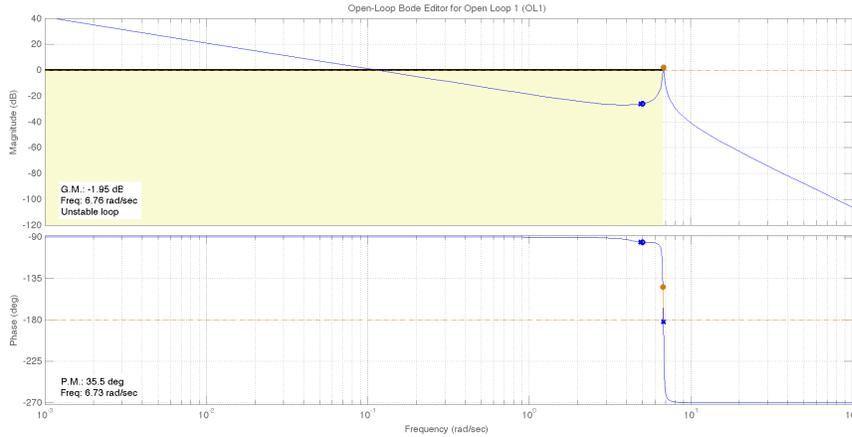


Figure 6: Diagramma di Bode della f.d.t.  $\frac{K_c}{s}G(s)$  con specifica sulla banda passante.

**B.2** Facendo riferimento allo schema a blocchi di fig. 5, affinché l'effetto della componente costante  $\bar{F}_d$  della forza agente sulle due masse sull'uscita sia completamente annullato è necessario che nella f.d.t. in anello aperto sia presente un polo nell'origine. Questa specifica è perciò automaticamente soddisfatta dal momento che la specifica statica richiede un errore a regime nullo (il controllore scelto è di tipo "1").

Consideriamo adesso la componente sinusoidale della forza. Partendo dal presupposto che il sistema controllato a ciclo chiuso sarà asintoticamente stabile in seguito al progetto del controllore  $C(s)$ , è possibile applicare il teorema della risposta armonica. La funzione di trasferimento tra la forza  $F$  e l'uscita  $\theta$  del sistema è data da

$$Y(j\omega) = \frac{G_F}{1 + C(j\omega)G(j\omega)} \tilde{F}(j\omega) = \bar{G}(j\omega) \tilde{F}(j\omega)$$

Applicando, quindi, il teorema della risposta armonica

$$y(t) = |\bar{G}(j\omega)| F_d \sin(\omega_F t + \angle \bar{G}(j\omega)),$$

questa specifica è equivalente a richiedere che, per pulsazioni  $\omega \leq 1 \text{ rad/s}$ , si abbia  $|y(t)| < 2 \text{ mm}$ .

Facendo riferimento al caso peggiore, si consideri la valutazione cautelativa  $\sin(\omega_F t + \angle \bar{G}(j\omega)) = 1$  e  $F_d = 10 \text{ N}$  e, dal diagramma di Bode di  $G_F$  (figura 7) si prenda l'amplificazione massima nel range frequenziale considerato (pari al guadagno statico di  $G_F$  equivalente a 0.0023 cioè -52.3 dB, rilevabile sui diagrammi di Bode o calcolabile esplicitamente imponendo  $s = 0$  nella f.d.t. di  $G_F(s)$ ). In questo caso la specifica richiede,

$$\left| \frac{10 \cdot G_F(j\omega)}{1 + C(j\omega)G(j\omega)} \right|_{dB} < -54 \text{ dB}.$$

Approssimando la  $G_F(j\omega)$  a numeratore della relazione a primo membro con il valore che essa assume nel range di frequenze considerato, cioè con il suo guadagno statico, otteniamo

$$\left| \frac{0.0023 \cdot 10}{1 + C(j\omega)G(j\omega)} \right|_{dB} < -54dB.$$

Perciò, per basse frequenze si cerca un guadagno elevato di  $C(s)G(s)$  e quindi un controllore  $C(s)$  tale per cui

$$\left| \frac{C(j\omega)G(j\omega)}{0.0023 \cdot 10} \right|_{dB} > 54dB,$$

o, equivalentemente

$$|C(s)G(s)| > 20dB,$$

per pulsazioni inferiori a 1 rad/s. Il vincolo relativo a questa specifica è riportato esplicitamente nella fig. 8.

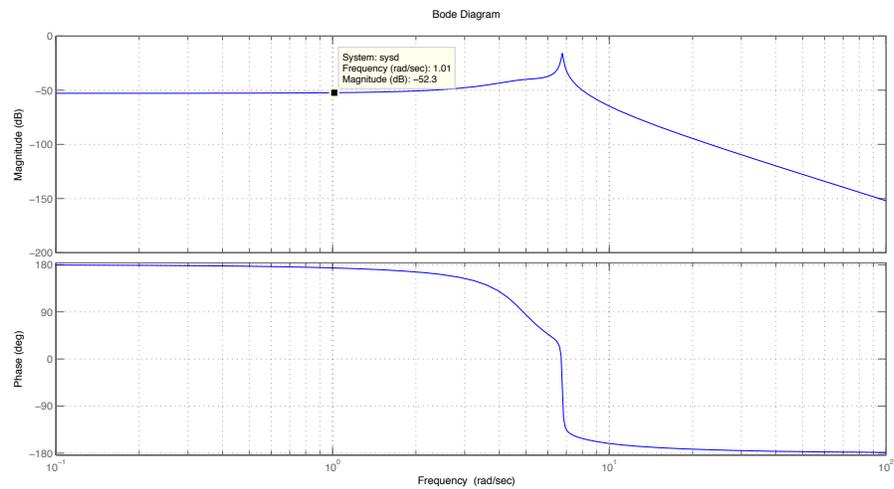


Figure 7: Diagramma di Bode della f.d.t.  $\bar{G}_F(s)$ .

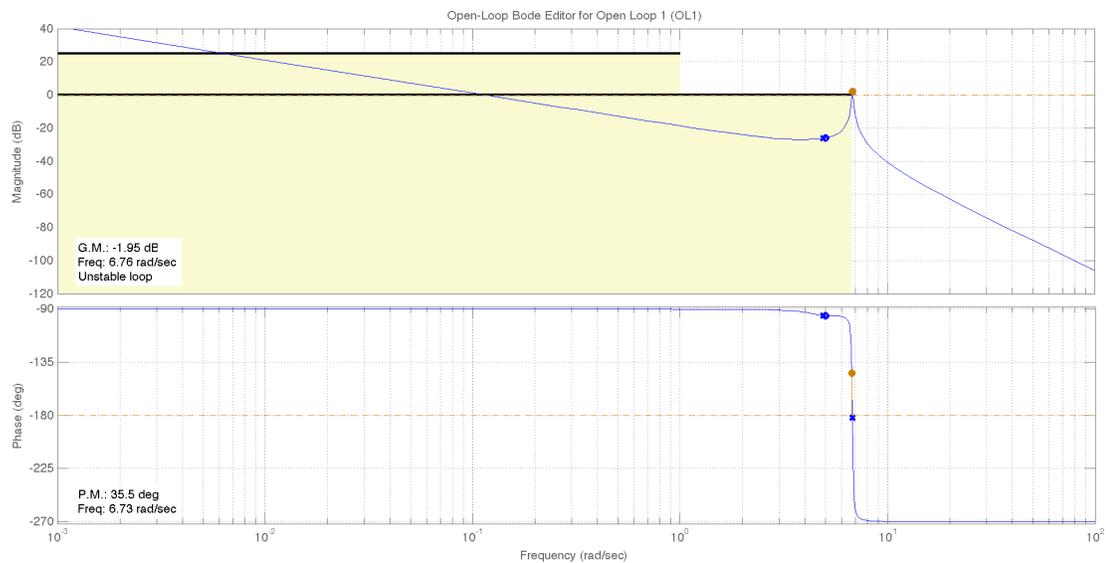


Figure 8: Diagramma di Bode della f.d.t.  $\frac{K_c}{s}G(s)$  con le specifiche di progetto.

## Progetto del controllore

Una possibile soluzione per il controllore  $C(s)$  in grado di rispettare tutte le specifiche proposte è la seguente

$$C(s) = 10754 \frac{(s^2 + 4s + 53)}{s(s + 150)}.$$

Il diagramma di Bode della funzione di trasferimento in anello aperto è riportato in fig. 9. Il controllore proposto

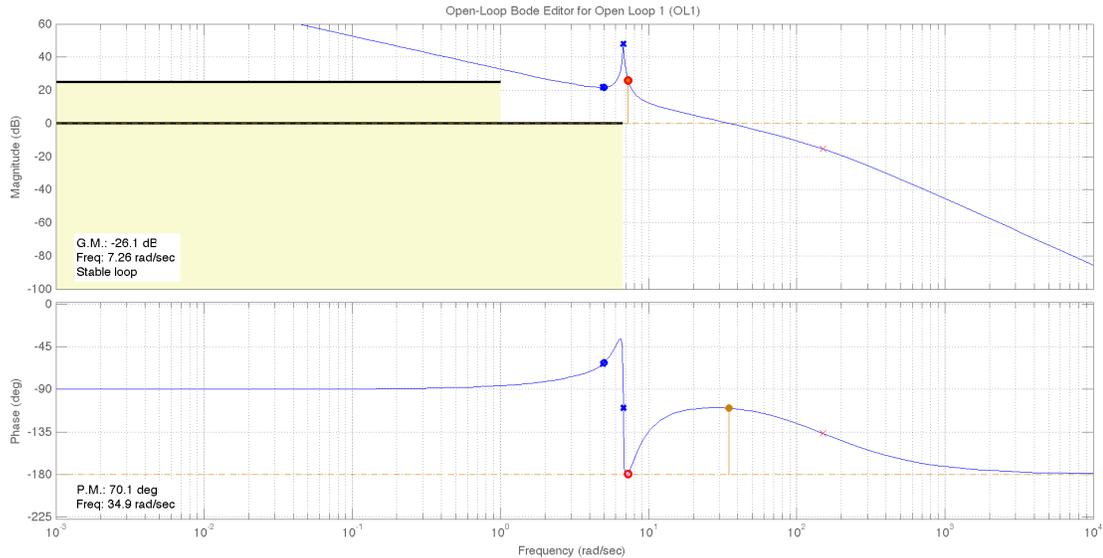


Figure 9: Diagramma di Bode risultante dal progetto della f.d.t. d'anello  $C(s)G(s)$ .

è costituito da coppia di zeri complessi coniugati, necessari per dare un incremento di fase ed alzare il diagramma di Bode rispettando così la specifica sulla pulsazione di taglio e sul margine di fase, e per attirare i rami dei poli complessi che altrimenti andrebbero nel semipiano positivo). Il polo in alta frequenza (tale da non alterare eccessivamente il diagramma delle ampiezze nell'intorno del taglio), è stato inserito per ottenere la causalità del controllore mentre il polo nell'origine permette di rispettare la specifica sull'errore nullo a regime. La funzione di trasferimento del sistema controllato risulta infine

$$G_{cl}(s) = 5377.358 \frac{(s^2 + 2.5s + 25)(s^2 + 4s + 53)}{(s + 96.56)(s + 49.34)(s^2 + 2.475s + 24.96)(s^2 + 4.124s + 59.92)},$$

il cui diagramma di bode è riportato in fig. 10. In fig. 11 è invece riportata la risposta ad un ingresso a gradino unitario del sistema controllato.

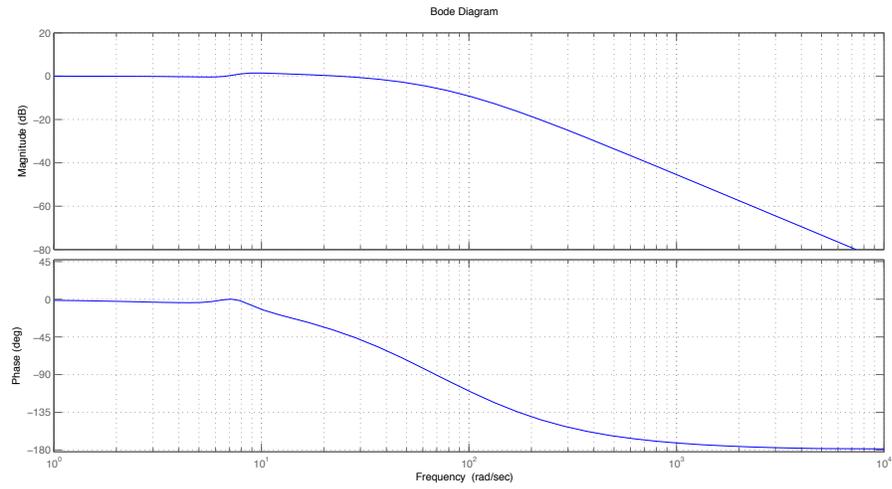


Figure 10: Diagramma di Bode del sistema controllato.

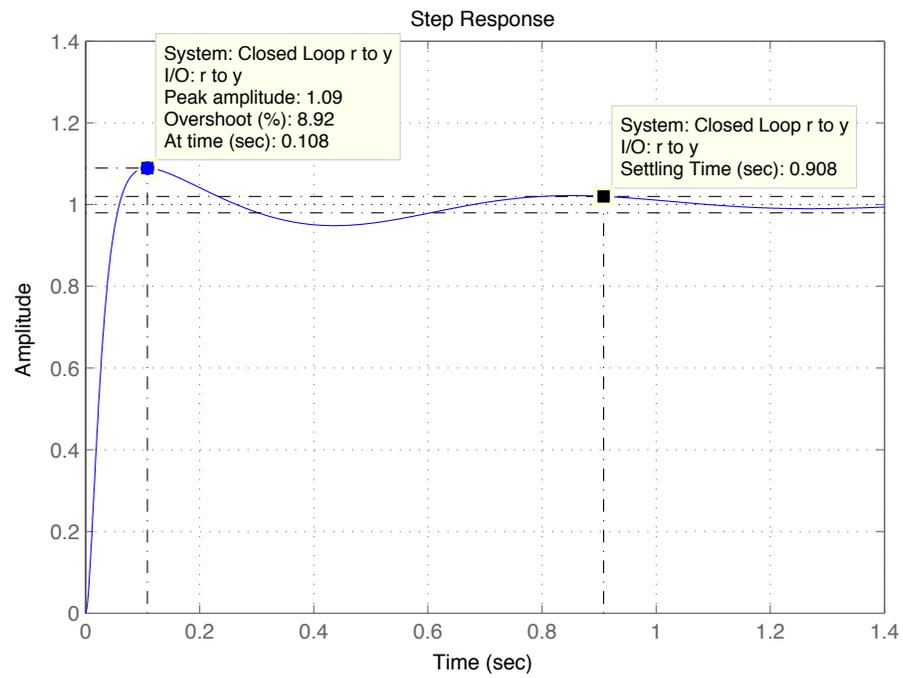


Figure 11: Risposta al gradino del sistema controllato.