

Si consideri il modello dinamico del sistema meccanico riportato in figura 1.

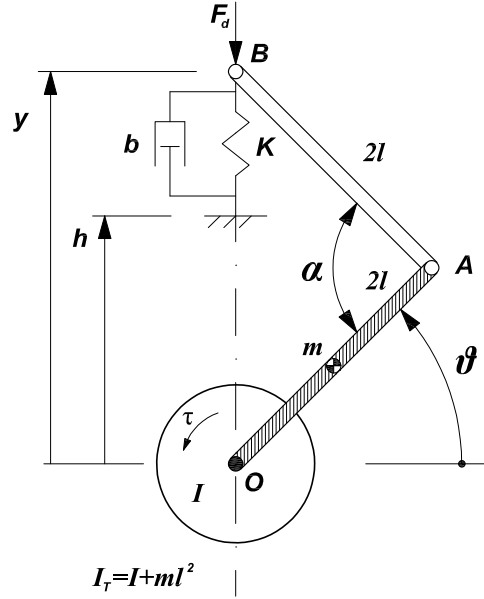


Figure 1: Sistema meccanico di un manovellismo attuato per mezzo di un motore.

Il manovellismo è composto da una puleggia di inerzia I e due aste di lunghezza 2ℓ . La seconda estremità B dell'asta AB , è collegata per mezzo di una molla di costante elastica K e uno smorzatore lineare di coefficiente b , ad una struttura fissa posta ad altezza h sulla verticale passante per il centro di rotazione della puleggia. Il punto B può muoversi solo lungo la verticale passante per O . Infine, la puleggia, e quindi l'asta OA rigidamente ancorata all'asse di rotazione O , è mossa per mezzo di un motore controllabile direttamente in coppia τ (vedi figura 1).

La dinamica del sistema è descritta dall'equazione

$$I_T \ddot{\theta} + 16b\ell^2 \cos^2 \theta \dot{\theta} + 8K\ell^2 \sin(2\theta) - \ell(4Kh - mg) \cos \theta = -\tau - 4F_d \ell \cos \theta,$$

dove F_d è una forza di disturbo, $I_T = I + m\ell^2$ è l'inerzia complessiva puleggia-asta OA , e g è l'accelerazione di gravità.

- A** Si determinino gli equilibri del sistema corrispondenti ad ingresso $\tau = 0$ e $F_d = 0$, e si riportino tutte le possibili configurazioni delle aste OA e AB associate a ciascun equilibrio. Si discuta inoltre sulla stabilità di ciascun equilibrio trovato.
- B** Scegliendo come uscita del sistema l'angolo θ , come ingresso manipolabile la coppia τ e come ingresso di disturbo la forza F_d , si determini una rappresentazione del sistema in forma di stato, approssimando linearmente il suo comportamento nell'intorno del generico punto di equilibrio $\bar{\theta}$.

Si considerino i seguenti valori numerici: $\ell = 1$ m, $m = 0.5$ kg, $I_T = 2.5$ kg m², $h = 3$ m, $b = 2$ N s/m, $K = 50$ N/m, $g = 9.81$ m/s².

- C** Considerando l'equilibrio corrispondente a $\bar{\theta}$ appartenente al primo quadrante ($0 < \bar{\theta} < \pi/2$), si determinino le f.d.t. $G_u(s)$ e $G_d(s)$ tra l'uscita del sistema θ e gli ingressi τ e F_d .
- D** Agendo sulla coppia τ esercitata dal motore, si determini una legge di controllo per la posizione angolare θ del manovellismo che agisca in modo da garantire le seguenti specifiche:
- d1)** la posizione angolare θ che descrive la configurazione del manovellismo deve passare da un valore $\theta(t = 0) = \pi/6$ ad un valore $\theta(t \rightarrow \infty) \equiv \pi/3$ entrando e mantenendosi nella fascia $\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{300} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{300}$ entro un tempo non superiore a 10 ms, garantendo comunque che $\theta_{max} \leq \frac{9}{24}\pi$;
- d2)** assumendo $F_d = 75 \sin(\omega_d t)$, si garantisca che l'effetto di tale oscillazione sull'uscita sia inferiore a $\frac{\pi}{300}$ nel range frequenziale tale per cui $\omega_d \leq 10$ rad/s;

d3) supponiamo di misurare la posizione angolare della puleggia con un sensore le cui imperfezioni costruttive comportano un rumore additivo sulla misura del tipo $\nu = \sum_{k=1}^3 \frac{1}{20^k} \sin(\omega_k t + k \frac{\pi}{3})$ con $\omega_k = (1 + \frac{k-1}{20})10^4$ rad/s, $k = 1, 2, 3$. Si limitino gli effetti sull'uscita dovuto al rumore di misura a valori inferiori a ± 0.005 rad.

Si riporti esplicitamente il controllore ottenuto ed il diagramma di Bode del guadagno di anello con le relative specifiche da rispettare, nonchè la risposta al gradino unitario, il diagramma di Bode del sistema in anello chiuso e il diagramma a blocchi complessivo.

Soluzione

A Il sistema è descritto da due variabili di stato θ e $\dot{\theta}$. Il punto di equilibrio associato a ingresso τ e forza di disturbo F_d , entrambi nulli, si determina imponendo la condizione di equilibrio $\dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0$. Sostituendo nelle equazioni che descrivono la dinamica del sistema e tenendo conto che $\sin(2\theta) = 2 \sin \theta \cos \theta$, si ottiene

$$(16 K \ell \sin \bar{\theta} + m g - 4 K h) \cos \bar{\theta} = 0.$$

Gli equilibri del sistema sono pertanto tali che deve essere verificata almeno una delle seguenti equazioni:

$$\cos \bar{\theta} = 0 \quad (1)$$

$$16 K \ell \sin \bar{\theta} + m g - 4 K h = 0. \quad (2)$$

Dall'equazione (1) si ottengono due equilibri corrispondenti a $\bar{\theta}_1 = \frac{\pi}{2}$ e $\bar{\theta}_2 = -\frac{\pi}{2}$. Le configurazioni delle due aste OA e AB corrispondenti a ciascuno di questi due equilibri sono quattro; in particolare, per $\bar{\theta}_1$ si ha $\bar{\alpha} = \pi$ e $\bar{\alpha} = 0$, corrispondenti al caso in cui le due aste sono allineate lungo la verticale per O , con il punto B ad una quota pari a 4ℓ e al caso in cui le due aste sono sovrapposte sempre sulla verticale per O , con $B \equiv O$. Per l'equilibrio associato a $\bar{\theta}_2$ si hanno le configurazioni simmetriche, rispetto all'asse x , di quelle descritte per $\bar{\theta}_1$.

Dall'equazione (2) si ottiene

$$\sin \bar{\theta} = \frac{4 K h - m g}{16 K \ell} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \bar{\theta}_3 = \arcsin \left(\frac{4 K h - m g}{16 K \ell} \right) \\ \bar{\theta}_4 = \pi - \bar{\theta}_3. \end{cases}$$

In tal caso le configurazioni possibili per le due aste sono due: nel primo caso, $\bar{\theta}_3$, $\bar{\alpha} = \pi - 2\bar{\theta}_3$, e nel secondo caso, $\bar{\theta}_4$, $\bar{\alpha} = 2\pi - 2\bar{\theta}_4$.

Gli equilibri associati a $\bar{\theta}_1$ e $\bar{\theta}_2$ sono instabili, mentre quelli associati a $\bar{\theta}_3$ e $\bar{\theta}_4$ sono asintoticamente stabili.

B Indicando con $\tilde{x} = [\tilde{x}_1, \tilde{x}_2]^T = [\theta - \bar{\theta}, \dot{\theta}]^T$ le nuove variabili di stato, con \tilde{u} il nuovo ingresso, e con \tilde{F}_d il disturbo, si ottiene il seguente sistema in forma di stato nonlineare, traslato nell'equilibrio¹,

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_1 &= \tilde{x}_2 \\ \dot{\tilde{x}}_2 &= \frac{1}{I_T} \left[-16 b \ell^2 \cos^2 (\tilde{x}_1 + \bar{\theta}) \tilde{x}_2 - 8 K \ell^2 \sin (2 (\tilde{x}_1 + \bar{\theta})) + \ell (4 K h - m g) \cos (\tilde{x}_1 + \bar{\theta}) + \right. \\ &\quad \left. -\tilde{\tau} - 4\tilde{F}_d \ell \cos (\tilde{x}_1 + \bar{\theta}) \right], \end{aligned}$$

Al fine di ottenere il sistema linearizzato nella consueta forma di stato,

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= A \tilde{x} + B \tilde{u} \\ \tilde{y} &= C \tilde{x} + D \tilde{u} \end{aligned}$$

con $\tilde{u} = [\tilde{\tau} \tilde{F}_d]$ è necessario determinare gli elementi delle matrici A , B , C e D derivando ciascuna equazione del sistema nonlineare in forma di stato traslato nell'equilibrio generico, rispetto a ciascuna variabile di stato inclusa nel vettore \tilde{x} e calcolando poi il risultato nell'origine, cioè il nuovo equilibrio. Le matrici del sistema sono:

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} & B &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \\ C &= [1 \quad 0] & D &= 0 \end{aligned}$$

¹Il sistema nonlineare così ottenuto avrà l'origine come nuovo punto di equilibrio.

in cui si ha:

$$\begin{aligned} a_{21} &= -\frac{16 K \ell^2}{I_T} \cos(2\bar{\theta}) - \frac{\ell}{I_T} (4 K h - m g) \sin \bar{\theta} \\ a_{22} &= -\frac{16 b \ell^2}{I_T} \cos^2 \bar{\theta} \\ b_{21} &= -\frac{1}{I_T} \\ b_{42} &= -\frac{4 \ell}{I_T} \cos \bar{\theta}. \end{aligned}$$

C Sostituendo i valori numerici nelle matrici del sistema linearizzato e considerando l'equilibrio asintoticamente stabile $0 < \bar{\theta} < \pi/2$, si ottengono le seguenti f.d.t.:

$$\begin{aligned} G_u(s) &= \frac{-0.4}{s^2 + 5.72 s + 143}, \\ G_d(s) &= \frac{-1.07}{s^2 + 5.72 s + 143}. \end{aligned}$$

Entrambe le funzioni di trasferimento presentano due poli complessi coniugati a parte reale negativa (criterio di Descartes), quindi asintoticamente stabile. In figura 2 sono riportate la risposta al gradino unitario e quella impulsiva.

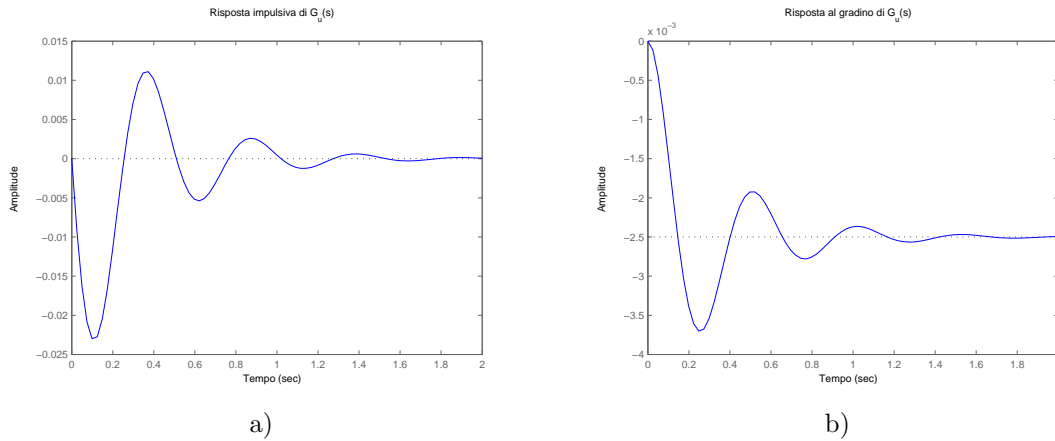


Figure 2: La risposta impulsiva della funzione di trasferimento $G_u(s)$ è riportata in (a), ottenuta con il comando impulse di Matlab, mentre la risposta al gradino è riportata in (b).

D Poichè il sistema è asintoticamente stabile, il progetto di un controllore che permetta al sistema complessivo di rispettare le specifiche può essere affrontato direttamente sui diagrammi di Bode, facendo riferimento allo schema a blocchi riportato in figura 3. A tal fine, facendo riferimento al progetto di un controllore del tipo

$$C(s) = \frac{K_c}{s^t} C_0(s), \quad C_0(0) \geq 1,$$

iniziamo considerando la scelta del tipo t e della costante di guadagno k_c del controllore basandoci sulle specifiche statiche.

d1) La specifica richiede che il manovellismo si porti ad una configurazione tale per cui $\theta(t \rightarrow \infty) = \frac{\pi}{3}$ a partire da un valore $\theta(t=0) = \frac{\pi}{6}$. Poichè il sistema $G_u(s)$ non possiede poli nell'origine, la soluzione prevede l'inserimento di un polo nell'origine nel controllore ($t=1$), aggiustando poi successivamente il valore del guadagno K_c compatibilmente con le successive specifiche. La seconda parte della specifica richiede di non superare un valore angolare massimo $\theta_{max} = \frac{9}{24}\pi$. Questo può essere garantito limitando la sovralongazione ad un valore

$$S_{\%} = 100 \frac{\theta_{max} - \theta(\infty)}{\theta(\infty) - \theta(0)} = 100 \frac{\frac{9}{24}\pi - \frac{\pi}{3}}{\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}} \leq 25\%.$$

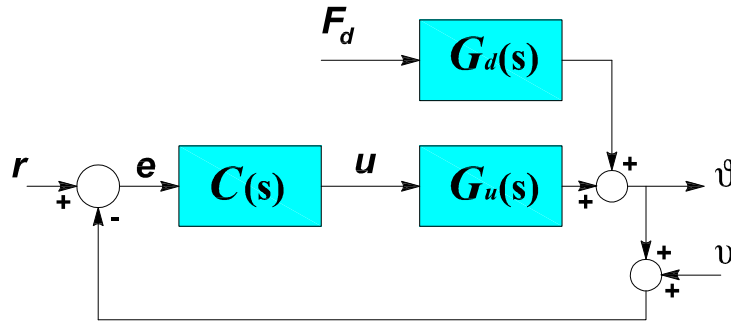


Figure 3: Schema a blocchi complessivo.

Inoltre, viene chiesto di entrare nella fascia $\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{300} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{300}$ entro un tempo non superiore a 10 ms, cioè un tempo di assestamento al 2% ($e_{\%} = 100 \frac{\pi}{300} \frac{6}{\pi} = 2\%$) inferiore a 10 ms.

Al fine di rispettare entrambe queste due ultime specifiche, si può tentare di progettare un controllore in grado di realizzare un sistema complessivo chiuso in retroazione approssimabile ad un sistema a due poli dominanti (sistema del secondo ordine), rispetto al quale le specifiche sul $T_a(2\%)$ e sulla $S_{\%}$ si traducono come segue:

$$S = e\left(-\frac{\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}\right) \Rightarrow \delta = 0.40 \Rightarrow M_{\phi} \approx 40 \text{ deg}$$

$$\omega_T = \frac{4}{\delta T_a} \Rightarrow \omega_T \approx 1000 \text{ rad/s}.$$

Il diagramma di Bode con i vincoli sulla pulsazione di taglio ω_T sono riportati in figura 4.

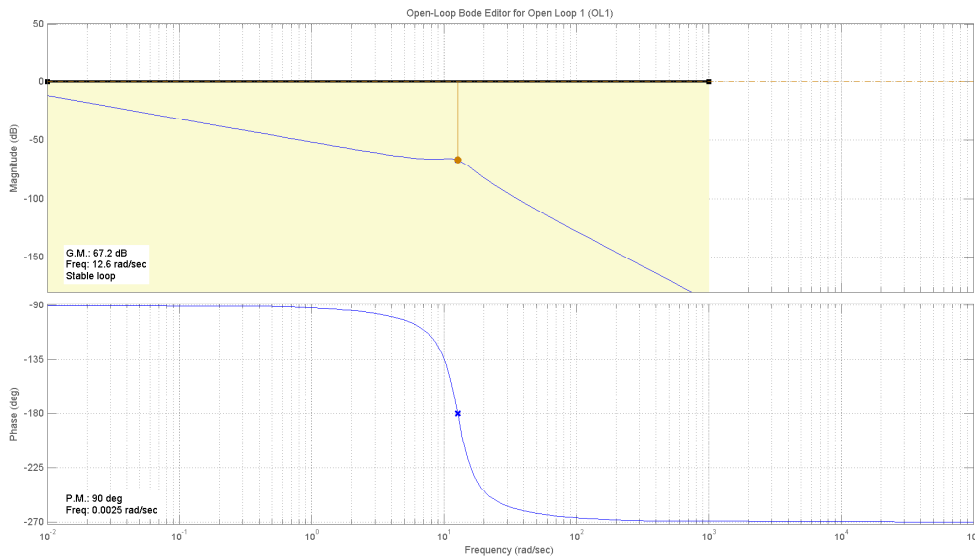


Figure 4: Diagramma di Bode della f.d.t. $-G_u(s)/s$ con specifica sulla banda passante.

- d2)** questa specifica riguarda la riduzione degli effetti sull'uscita dovuti ad una forza di disturbo F_d agente sulla estremità B e diretta verticalmente del tipo $F_d = 75 \sin(\omega_d t)$ per pulsazioni $\omega_d \leq 10$ rad/s, perciò in bassa frequenza rispetto alla banda passante del sistema, a valori al di sotto del 2% rispetto al valore di regime. Tenendo conto che il sistema chiuso in retroazione deve essere asintoticamente stabile grazie all'azione esercitata dal controllore $C(s)$ si può applicare il teorema della risposta armonica. La funzione di trasferimento tra disturbo F_d e uscita θ del sistema è

$$\Theta(j\omega) = \frac{G_d(j\omega)}{1 + C(j\omega)G_u(j\omega)} F_d(j\omega) = \bar{G}(j\omega) F_d(j\omega).$$

Applicando quindi il teorema della risposta armonica

$$y(t) = |\bar{G}(j\omega)| A_v \sin(\omega_v t + \angle \bar{G}(j\omega)),$$

e facendo le usuali approssimazioni cautelative, si arriva a scrivere

$$\left| \frac{75 G_d(j\omega)}{1 + C(j\omega)G_u(j\omega)} \right| \leq \frac{\pi}{300}$$

Perciò, poichè nel campo di frequenze di interesse $|\bar{G}_d| < 0.014$ (figura 5), si cerca un guadagno di $C(s)G_u(s)$ e quindi un controllore $C(s)$ tale per cui

$$|C(s)G_u(s)| \geq 40dB$$

per pulsazioni inferiori a 10 rad/s. In figura 6 è riportato il diagramma di Bode con i vincoli sulla pulsazione di taglio ω_T e sul disturbo F_d .

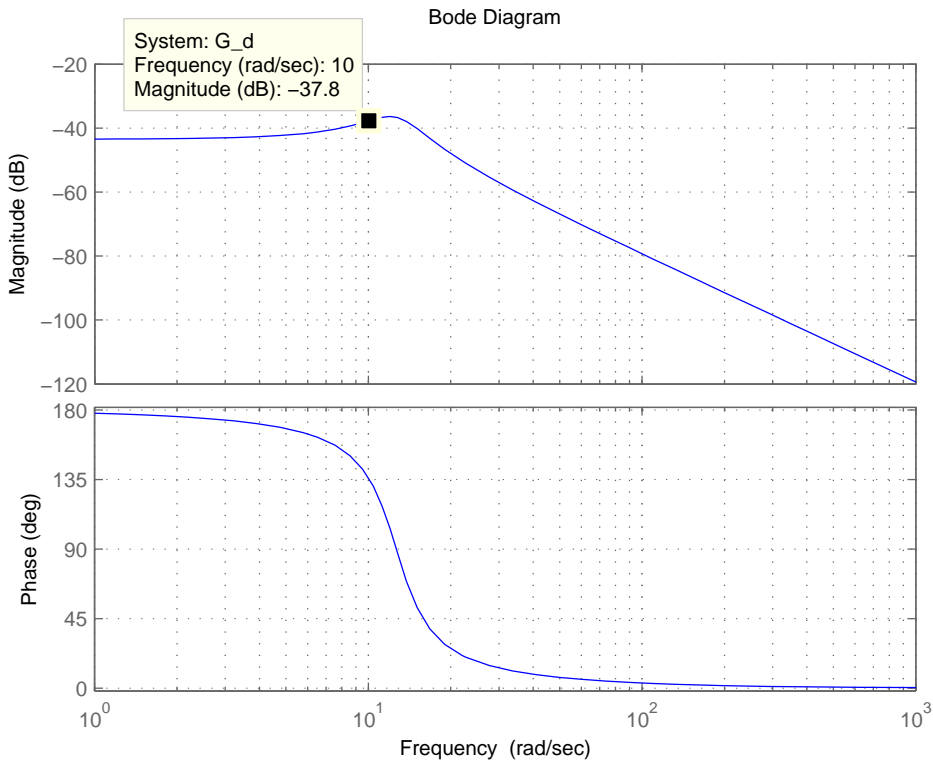


Figure 5: Diagramma di Bode della f.d.t. G_d .

- d3)** Quest'ultima specifica riguarda l'attenuazione del rumore di misura del tipo $\nu = \sum_{k=1}^3 \frac{1}{20k} \sin(\omega_k + k \frac{\pi}{3})$ con $\omega_k = (1 + \frac{k-1}{20})10^4$ rad/s, $k = 1, 2, 3$ a valori inferiori a ± 0.01 . La f.d.t. tra il disturbo di misura ν entrante nella catena in retroazione e l'uscita θ è

$$\Theta(j\omega) = -\frac{C(j\omega)G_u(j\omega)}{1 + C(j\omega)G_u(j\omega)} \nu(j\omega).$$

Applicando ancora il teorema della risposta armonica con le consuete approssimazioni cautelative, la specifica si traduce come segue:

$$|C(j\omega)G_u(j\omega)| \leq \frac{0.005}{\sum_{k=1}^3 \frac{1}{20k}} \Rightarrow |C(j\omega)G_u(j\omega)| \leq -25 dB.$$

per frequenze superiori a 10^4 rad/s. In figura 7 è riportata la specifica appena determinata.

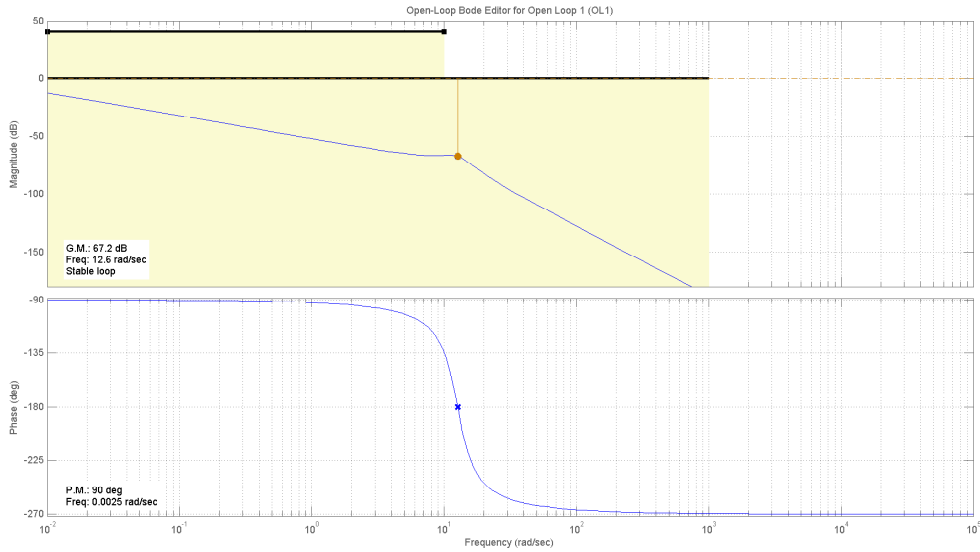


Figure 6: Diagramma di Bode della f.d.t. $-G_u(s)/s$ con specifica sulla banda passante e disturbo F_d .

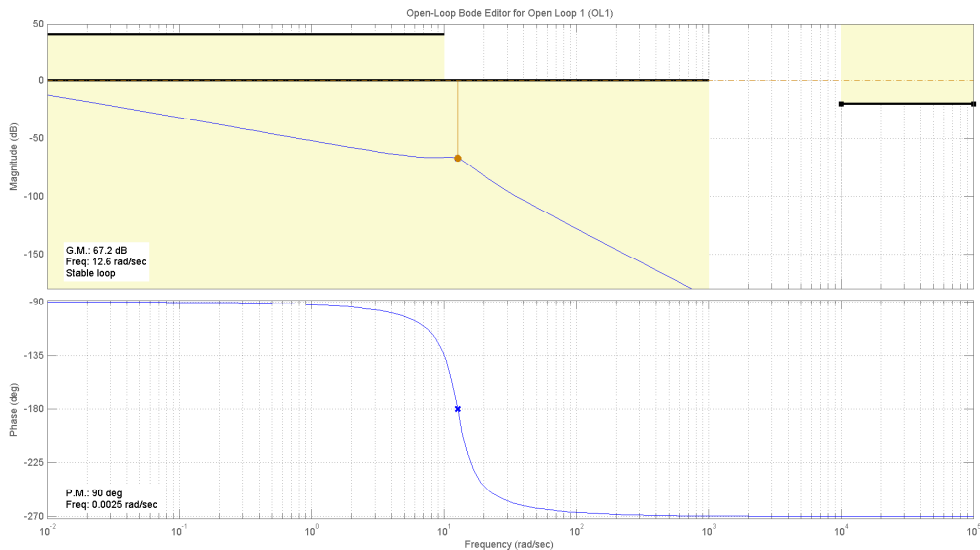


Figure 7: Diagramma di Bode della f.d.t. $-G_u(s)/s$ con tutte le specifiche di progetto.

Progetto del controllore. Possiamo progettare un controllore in grado di rispettare tutte le specifiche richieste procedendo come segue. La f.d.t. G_u presenta un guadagno negativo, e l'inserimento del polo nell'origine, necessario per garantire errore nullo a regime, fa sì che il luogo inverso delle radici presenti un ramo sull'asse reale positivo. L'inserimento di un controllore con guadagno negativo di valore opportuno permetterebbe un attraversamento dell'asse a 0 dB con pendenza pari a -3 dB/dec. Per rendere il sistema asintoticamente stabile con margine di fase superiore a 40 deg, si può procedere con l'inserimento di uno zero prima dell'attraversamento e una rete anticipatrice a cavallo della pulsazione di taglio. Aggiustando opportunamente i valori si riesce ad ottenere una risposta al gradino con andamento simile a quello di un sistema del secondo ordine con tempo di assestamento inferiore a 10 ms e sovraelongazione inferiore al 25% ma senza rispettare la specifica sul rumore di misura. Il polo in alta frequenza presente nel controllore permette di soddisfare anche quest'ultima specifica. Il controllore così ottenuto è

$$C(s) = -\frac{111864029532(s + 35.36)(s + 155.4)}{s(s + 2401)(s + 9980)}.$$

In figura 8 sono riportati i diagrammi di bode della f.d.t. $C(s)G_u(s)$ con le relative specifiche.

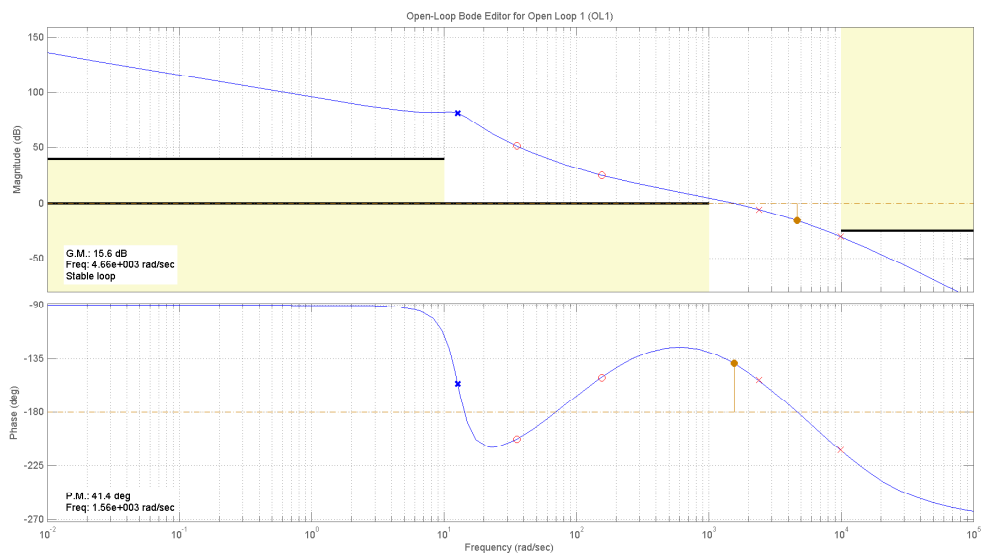


Figure 8: Diagrammi di Bode della f.d.t. $C(s)G_u(s)$ con tutte le specifiche riportate.

La f.d.t. complessiva d'anello è

$$G_c(s) = \frac{44745611813(s + 155.4)(s + 35.36)}{(s + 1.05 \cdot 10^4)(s + 173.3)(s + 35.18)(s^2 + 1681s + 3.84 \cdot 10^6)}$$

di cui in figura 9 è riportata la risposta al gradino. La risposta al gradino ottenuta è molto simile a quella relativa ad un sistema del secondo ordine, quindi si può concludere che il tentativo di progettare un controllore che renda il sistema in anello chiuso un sistema a due poli dominanti è comunque riuscito e le specifiche sul tempo di assestamento e sulla sovraelongazione sono rispettate. Infine, in figura 10 sono riportati i diagrammi di bode della f.d.t. complessiva $G_c(s)$.

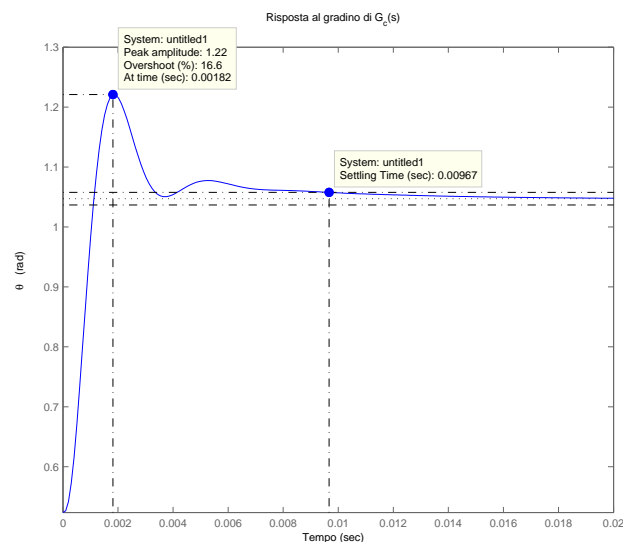


Figure 9: Risposta al gradino del sistema controllato $G_c(s)$.

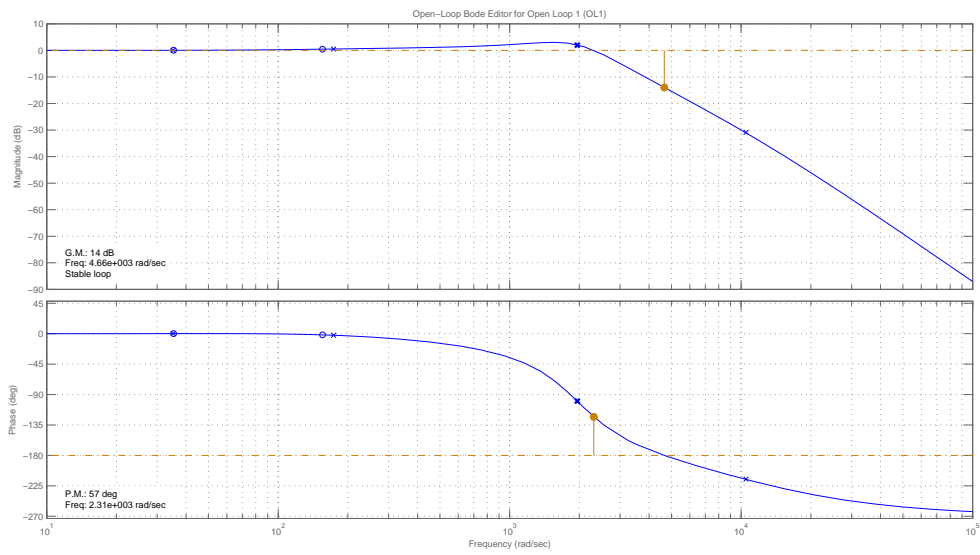


Figure 10: Diagrammi di Bode della f.d.t. $G_c(s)$.