

Esame di Controlli Automatici - 15 Settembre 2009

Esercizio 1

Si consideri il sistema meccanico rappresentato in figura 1. Esso è costituito da una sfera di massa m posta all'interno di un cilindro cavo e di massa trascurabile, che può ruotare attorno ad un asse passante per una delle sue estremità. La sfera è collegata all'asse di rotazione attraverso una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo r e può muoversi lungo le pareti interne del cilindro che oppongono un attrito viscoso caratterizzato da un coefficiente β . La sfera è inoltre soggetta alla forza peso dovuta all'accelerazione di gravità g , mentre la rotazione del cilindro può essere attuata da una coppia di controllo τ . Indicando con x l'elongazione della molla e con θ l'angolo di rotazione del cilindro rispetto alla posizione verticale, la dinamica del sistema è descritta dalle equazioni

$$\begin{cases} m \ddot{x} &= -kx - \beta \dot{x} - mg \cos(\theta) + (r+x) \dot{\theta}^2, \\ m(r+x)^2 \ddot{\theta} &= mg(r+x) \sin(\theta) - 2m(r+x) \dot{x} \dot{\theta} + \tau. \end{cases}$$

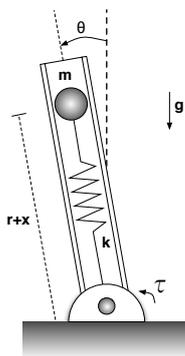


Figura 1: Schema meccanico del sistema

A Si determinino i punti di equilibrio del sistema corrispondenti ad una coppia di ingresso nulla ($\bar{\tau} = 0$) e si discuta la stabilità al variare del valore r della lunghezza a riposo della molla;

Considerando soltanto il punto di equilibrio con angolo θ più piccolo, si risponda ai seguenti quesiti:

B Si discutano le proprietà di raggiungibilità e stabilizzabilità del sistema attorno all'equilibrio, utilizzando τ come ingresso di controllo. Si dia un'interpretazione fisica dei risultati;

C Si studino le proprietà di osservabilità e detettabilità del sistema nello stesso equilibrio, supponendo di misurare alternativamente la posizione della massa ($y_1 = r + x$) o l'angolo di rotazione del cilindro ($y_2 = \theta$);

D Si scomponga il sistema nei suoi sottosistemi fondamentali, e se ne riscriva la dinamica in forma di Kalman;

E Assumendo i valori numerici $m = 1$ Kg, $k = 1$ N/m, $\beta = 2$ Ns/m, $g = 9.81$ m/s² e $r = 10$ cm, si progetti un regolatore che, a regime, garantisca l'inseguimento di un riferimento costante per l'angolo θ con errore nullo.

F Si realizzi in ambiente Matlab/Simulink una simulazione del sistema non lineare in anello chiuso con il regolatore progettato al punto precedente.

Esercizio 2

Si consideri il sistema dinamico descritto dall'equazione

$$\ddot{x} + |x^2 - 1| \dot{x}^3 + x - \sin\left(\frac{\pi}{2} x\right) = 0.$$

A Si determinino gli equilibri $(\bar{x}, \dot{\bar{x}})$ del sistema e se ne discuta la stabilità. (*Suggerimento*: laddove il metodo indiretto di Lyapunov risultasse inconcludente, si utilizzi la funzione candidata $V(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} \dot{x}^2 + \int_0^x (\alpha - \sin(\frac{\pi}{2} \alpha)) d\alpha + K$, con K costante opportuna).

Soluzione esercizio 1

A) Posti $z = (x, \theta, \dot{x}, \dot{\theta})^T = (z_1, z_2, z_3, z_4)^T$ e $u = \tau$, la dinamica del sistema può essere scritta nella forma di stato

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_3, \\ \dot{z}_2 = z_4, \\ \dot{z}_3 = -\frac{k}{m}z_1 - \frac{\beta}{m}z_3 - g \cos(z_2) + \frac{1}{m}(r+z_1)z_4^2, \\ \dot{z}_4 = \frac{g \sin(z_2) - 2z_3z_4}{r+z_1} + \frac{u}{m(r+z_1)^2}. \end{cases}$$

Imponendo la condizione di equilibrio $\dot{z} = 0$ e di avere un segnale di ingresso nullo ($\bar{u} = 0$), si ottengono gli equilibri

$$\bar{z}_a = \left(-\frac{mg}{k}, 0, 0, 0\right), \quad \bar{z}_b = \left(\frac{mg}{k}, \pi, 0, 0\right).$$

Per studiare la stabilità dell'equilibrio in \bar{z}_a , si consideri l'approssimazione lineare del sistema attorno a tale equilibrio data da

$$\dot{z} = A_1 z + B_1 u,$$

con

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & 0 & -\frac{\beta}{m} & 0 \\ 0 & \frac{kg}{rk-mg} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{k^2}{m(rk-mg)^2} \end{pmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico della matrice dinamica A_1 risulta essere proporzionale al prodotto

$$(s^2m + s\beta + k)(s^2(kr - mg) - kg),$$

il cui primo fattore ammette sempre due soluzioni con parte reale negativa che danno luogo a modi convergenti. Per quanto riguarda invece le soluzioni del secondo fattore dobbiamo distinguere i due seguenti casi. Se $mg > kr$, le soluzioni del secondo polinomio sono $\pm i\sqrt{\frac{kg}{mg-kr}}$ e quindi il sistema linearizzato risulta essere marginalmente stabile, mentre nulla si può dire sulla stabilità del sistema originale. Al contrario, se $mg < kr$, le soluzioni del secondo polinomio sono $\pm\sqrt{\frac{kg}{kr-mg}}$ e quindi il sistema linearizzato risulta essere instabile e così anche quello non lineare.

Per studiare la stabilità dell'equilibrio in \bar{z}_b , si consideri l'approssimazione lineare del sistema attorno a tale equilibrio data da

$$\dot{z} = A_2 z + B_2 u,$$

con

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & 0 & -\frac{\beta}{m} & 0 \\ 0 & -\frac{kg}{rk+mg} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{k^2}{m(rk+mg)^2} \end{pmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico della matrice dinamica A_2 risulta essere proporzionale al prodotto

$$(s^2m + s\beta + k)(s^2(kr + mg) + kg).$$

In questo caso, il secondo fattore ammette sempre come soluzioni i due autovalori immaginari puri $\pm i\sqrt{\frac{kg}{mg+kr}}$, il che indica che il sistema linearizzato risulta marginalmente stabile, mentre nulla si può concludere su quello non lineare.

B) Si consideri innanzitutto la matrice di raggiungibilità $R = (B_1, A_1B_1, A_1^2B_1, A_1^3B_1)$, che consente di studiare la proprietà di raggiungibilità del sistema attorno all'equilibrio in \bar{z}_a . Essa risulta data da

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m\left(r-\frac{gm}{k}\right)^2} & 0 & \frac{g}{m\left(r-\frac{gm}{k}\right)^3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{m\left(r-\frac{gm}{k}\right)^2} & 0 & \frac{g}{m\left(r-\frac{gm}{k}\right)^3} & 0 \end{pmatrix}.$$

Essendo $\text{rank}(R) = 2 < 4$, non tutto lo spazio di stato risulterà raggiungibile. Infatti, il sottospazio raggiungibile si riduce a quello descritto dai vettore della base

$$T_R = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Fisicamente ciò significa che, agendo attraverso la coppia τ , è possibile controllare la posizione e la velocità del cilindro, mentre non è possibile fare altrettanto per la posizione e velocità della massa al suo interno.

Inoltre, da un'analisi della matrice dinamica A_1 , è facile osservare che il sottosistema formato dalle variabili $x_1 = x$ e $x_3 = \dot{x}$, che non sono raggiungibili, non dipende dalle altre variabili di stato del sistema originale. La matrice dinamica associata al sottosistema è

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{\beta}{m} \end{pmatrix},$$

e possiede due autovalori con parte reale negativa. Pertanto, il sistema linearizzato e quello originale non sono completamente raggiungibili, ma sono comunque stabilizzabili.

- C) Si consideri il caso in cui si dispone di un sensore che misura la posizione della massa, $y_1 = r + z_1$. In tal caso, la matrice di uscita del sistema linearizzato risulta essere $C_1 = \frac{\partial y_1}{\partial z} = (1, 0, 0, 0)$ e la corrispondente matrice di osservabilità risulta data da

$$O_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{k}{m} & 0 & -\frac{\beta}{m} & 0 \\ \frac{\beta k}{m^2} & 0 & \frac{\beta^2}{m^2} - \frac{k}{m} & 0 \end{pmatrix}.$$

Essendo il rango di O_1 pari a 2, esiste un sottospazio non osservabile che può descritto dai vettori della base

$$T_{\bar{O}}^{-1} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Pertanto, misurando la posizione della massa, non è possibile ricostruire la posizione e la velocità angolari del cilindro. Da un'analisi del matrice dinamica A_1 , è facile osservare che il sottosistema formato dalle variabili $x_2 = \theta$ e $x_4 = \dot{\theta}$, che non sono osservabili, non dipende dalle altre variabili di stato del sistema originale. La matrice dinamica associata al sottosistema è data da

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{kg}{rk-mg} & 0 \end{pmatrix},$$

i cui autovalori possono essere immaginari puri o reali (di cui uno positivo) secondo quanto discusso al punto A. In entrambi i casi, il sistema non risulta detettabile.

Si consideri adesso il caso in cui si dispone di un sensore che misura la posizione angolare del cilindro, $y_2 = \theta$. In tal caso, la matrice di uscita del sistema linearizzato risulta essere $C_2 = \frac{\partial y_2}{\partial z} = (0, 1, 0, 0)$ e la corrispondente matrice di osservabilità risulta data da

$$O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{kg}{kr-mg} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{kg}{kr-mg} \end{pmatrix}.$$

Anche il rango di O_2 risulta pari a 2, il che indica l'esistenza di un sottospazio non osservabile, che può descritto dai vettori della base

$$T_{\bar{O}}^{-2} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Pertanto, misurando la posizione angolare del cilindro, non è possibile ricostruire la posizione e la velocità della massa. In base a quanto osservato al punto C, il sottosistema non osservabile formato dalle variabili di stato $x_1 = x$ e $x_3 = \dot{x}$ è asintoticamente stabile. Il sistema originale dotato di uscita di misura sull'angolo θ risulta quindi detettabile.

- D) Assumendo come uscita di misura $y_2 = \theta$, si ottiene la seguente scomposizione in sottosistemi fondamentali. Il sottosistema raggiungibile e osservabile è rappresentato dalle variabili $x_2 = \theta$ e $x_4 = \dot{\theta}$, il sottosistema raggiungibile e non osservabile è rappresentato da $x_1 = x$ e $x_3 = \dot{x}$, mentre i sottosistemi non raggiungibile/osservabile e raggiungibile/non osservabile sono vuoti. Definendo il cambiamento di base descritto dalla matrice

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

si ottiene la forma canonica di Kalman

$$\begin{cases} \dot{z}_k = A_k z_k + B_k u, \\ y = C_k z_k \end{cases}$$

con $z = T z_k$ e

$$A_k = T^{-1} A_1 T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{kg}{rk-mg} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{k}{m} & -\frac{\beta}{m} \end{pmatrix},$$

$$B_k = T^{-1} B_1 \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{kg}{rk-mg} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C_k = C_2 T = (1, 0, 0, 0).$$

- E) Con i valori numerici specificati, la matrice dinamica e i vettori di ingresso assumono i valori

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.1111 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B_1 = 10^{-4} \begin{pmatrix} 0 \\ 0.8605 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ai fini del progetto del regolatore è necessario considerare soltanto il sottosistema raggiungibile e osservabile $\Sigma_{R,O}$ il cui stato è $z_{R,O} = (x_2, x_4)^T$ e la cui evoluzione è descritta dalle equazioni $\dot{z}_{R,O} = A_{R,O} z_{R,O} + B_{R,O} u$, $y = C_{R,O} z_{R,O}$. Numericamente, si ha

$$A_{R,O} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.1111 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_{R,O} = 10^{-4} \begin{pmatrix} 0 \\ 0.8605 \end{pmatrix}, \quad C_{R,O} = (1, 0).$$

Inoltre, per garantire che l'uscita $y_2 = \theta$ inseguia perfettamente riferimenti costanti sull'ingresso u , è necessario che la catena diretta tra i due segnali contenga almeno un polo nell'origine. Visto che $\Sigma_{R,O}$ non ne possiede, il polo nell'origine dovrà essere inserito dal compensatore. Una semplice procedura per ottenere ciò consiste nel predisporre un integratore in serie a $\Sigma_{R,O}$, e nel calcolare il compensatore che stabilizzi il sistema così esteso. Questo può essere ottenuto utilizzando i seguenti comandi:

```
integrator = ss(1/tf('s'));
sys_esteso = integrator * ss(Aro, Bro, Cro, 0);
p = [-2 -4 -6];
K = place(sys_esteso.a, sys_esteso.b, p);
q = 2*p;
L = place(sys_esteso.a', sys_esteso.c', q)';
rsys = reg(sys_esteso, K, L);
kreg = -rsys.c * inv(rsys.a) * rsys.b;
```

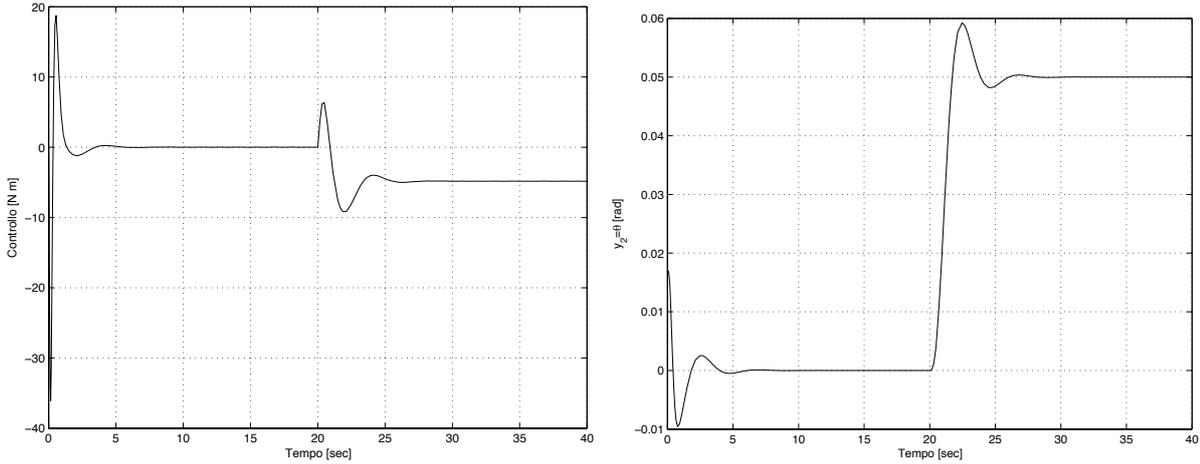



Figura 3: Evoluzione temporale di alcuni segnali durante una simulazione con stato iniziale traslato $\tilde{z}(0) = 10^{-2} (-0.1, 1.7, 0.7, 0.04)$. All'istante $t = 0$ s viene applicato un segnale di riferimento nullo, che viene poi cambiato all'istante $t = 20$ s con un riferimento costante di ampiezza 0.05 rad. In entrambi i casi, il sistema regolato è in grado di inseguire perfettamente il riferimento.

Soluzione esercizio 2

A) Definendo le variabili di stato $x_1 = x$ e $x_2 = \dot{x}$, il sistema può essere posto nella forma

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -|x_1^2 - 1| x_2^3 - x_1 + \sin\left(\frac{\pi}{2} x_1\right). \end{cases}$$

Imponendo che il sistema si trovi all'equilibrio ($\dot{x}_1 = 0$, $\dot{x}_2 = 0$), si ottengono la condizione $\bar{x}_2 = 0$ e la condizione $\bar{x}_1 = \sin\left(\frac{\pi}{2} \bar{x}_1\right)$, le cui soluzioni sono $\bar{x}_1 = 0, \pm 1$.

Ai fini dello studio della stabilità degli equilibri, si consideri prima di tutto l'approssimazione lineare

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2} \bar{x}_1\right) - 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

la cui matrice dinamica ammette il polinomio caratteristico

$$p(s) = s^2 - \left(\frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2} \bar{x}_1\right) - 1\right).$$

Per l'equilibrio nell'origine ($\bar{x}_1 = 0$), le soluzioni di $p(s)$ sono $s = \pm\sqrt{\frac{\pi}{2} - 1}$ e quindi il sistema linearizzato risulta instabile per la presenza di un autovalore a parte reale positiva. Conseguentemente, anche il sistema non lineare risulta essere instabile in tale equilibrio. Nel caso degli equilibri in $\bar{x}_1 = \pm 1$, le soluzioni di $p(s)$ sono $s = \pm i$ e quindi il sistema linearizzato risulta essere marginalmente stabile. Tuttavia, nulla si può concludere sulla stabilità del sistema non lineare in tali punti mediante il metodo indiretto di Lyapunov.

Si consideri quindi la funzione candidata di Lyapunov suggerita nel testo, riscritta nelle variabili di stato, $V(x_1, x_2) = \frac{1}{2} x_2^2 + \int_0^{x_1} (\alpha - \sin\left(\frac{\pi}{2} \alpha\right)) d\alpha + K$, ovvero $V(x_1, x_2) = \frac{1}{2} x_2^2 + \frac{x_1^2}{2} + \frac{2}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2} x_1\right) - \frac{2}{\pi} + K$. Questa funzione ha due minimi isolati in $x_1 = \pm 1$, $x_2 = 0$. Posta la costante K pari al valore ottenuto nei punti di minimo, ovvero $K = \frac{2}{\pi} - \frac{1}{2}$, V risulta quindi localmente positiva definita. Derivando V rispetto al tempo si ottiene

$$\dot{V}(x_1, x_2) = \left(\frac{\partial V}{\partial x_1}, \frac{\partial V}{\partial x_2}\right) \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \left(x_1 - \sin\left(\frac{\pi}{2} x_1\right)\right) \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2 = -|x_1^2 - 1| x_2^4.$$

L'insieme dei punti per cui $\dot{V} = 0$ è dato da $R_0 = \{x_2 = 0 \forall x_1\} \cup \{x_1 = 1, \forall x_2\} \cup \{x_1 = -1, \forall x_2\}$. Gli insiemi invarianti in R_0 , ottenuti per sostituzione nella dinamica delle condizioni che definiscono R_0 stesso, si riducono agli equilibri $M = \{x|x_2 = 0, x_1 \in \{0, \pm 1\}\}$.

Per applicare il teorema di Ljapunov, si consideri l'insieme $\Omega_\ell = \{x|V(x) < \ell\}$, con $0 < \ell \leq K$. L'insieme Ω_ℓ è formato da due sottoinsiemi disgiunti $\Omega_{\ell,+1}$ e $\Omega_{\ell,-1}$, che rispettivamente contengono

i punti di equilibrio $(1, 0)$ e $(-1, 0)$, i quali ne rappresentano anche l'insieme invariante massimo (come si osserva intersecando M con Ω_ℓ). Quindi, per il Teorema dell'Insieme Invariante Massimo, $\Omega_{K,+1}$ è contenuto nella RAS dell'equilibrio $(1, 0)$, e analogamente $\Omega_{K,-1}$ è contenuto nella RAS dell'equilibrio $(-1, 0)$.