

- A) Per descrivere i disturbi indotti dalla rotazione dell'albero motore sull'angolo di rollio di un veicolo è possibile utilizzare il modello illustrato nella seguente figura:

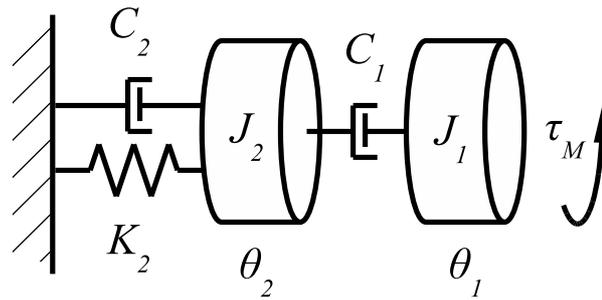


Figura 1: Modello dei disturbi introdotti dall'albero motore su un autoveicolo.

L'inerzia  $J_1$  rappresenta l'albero motore, controllato da una coppia motrice  $\tau_M$  e connesso all'autoveicolo ( $J_2$ ) tramite un attrito viscoso  $C_1$  dovuto alla presenza del lubrificante. Supposto il veicolo fermo, l'insieme ammortizzatore ruota può essere schematizzato come un parallelo composto da una rigidità  $K_2$  ed uno smorzamento  $C_2$ . In tale approssimazione  $\dot{\theta}_1$  identifica la velocità angolare dell'albero motore, mentre  $\theta_2$  l'angolo di rollio dello chassis.

Considerando come ingresso la coppia motrice e come uscite rispettivamente l'angolo di rotazione dell'albero motore  $\theta_1$  e l'angolo di rollio  $\theta_2$ , si dia una rappresentazione simbolica del modello del sistema in forma di stato e come funzioni di trasferimento. Si commentino i risultati.

- B) Dato il sistema caratterizzato dalla funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{s + \alpha}{(s^2 - (\alpha + \beta)s + 4\beta)(s + \beta)}$$

- B1)** Discutere la stabilità del sistema al variare dei parametri  $\alpha$  e  $\beta$ ;  
**B2)** Scrivere le matrici **A**, **B**, **C**, **D** di una realizzazione nello spazio degli stati.

Dati  $\alpha = -1$  e  $\beta = 3$ :

- B3)** Si determinino i modi associati al sistema e se ne descriva graficamente l'andamento temporale;  
**B4)** Tracciare il diagramma asintotico di Bode del sistema in anello aperto;  
**B5)** Determinare le condizioni per cui un controllore puramente proporzionale  $k$  stabilizza il sistema.

- C) Dato il sistema descritto dalla funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{20}{(5s + 1)(0.07s + 1)}$$

determinare una controllore che in anello chiuso soddisfi le seguenti specifiche:

- C1)** errore a regime al gradino nullo;  
**C2)** errore a regime alla rampa  $\leq 0.01$  %;  
**C3)** margine di fase di circa  $\pi/4$ ;  
**C4)** frequenza di taglio del sistema maggiore di 50 (rad/sec).

**Soluzione**

A) Il modello matematico del sistema può essere ottenuto scrivendo l'equazione di Newton rispetto all'asse di rotazione, ottenendo:

$$\begin{cases} J_1 \ddot{\theta}_1 = C_1 (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) + \tau_M \\ J_2 \ddot{\theta}_2 = -C_1 (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) - C_2 \dot{\theta}_2 - K_2 \theta_2 \end{cases}$$

I vettori di stato  $\mathbf{z}$  e di uscita  $\mathbf{y}$  possono essere scelti nel seguente modo:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

dunque le matrici della rappresentazione in forma di stato sono:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{C_1}{J_1} & \frac{C_1}{J_1} \\ 0 & -\frac{K_2}{J_2} & \frac{C_1}{J_2} & -\frac{C_1+J_2 C_2}{J_1} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{J_1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = 0$$

Trasformando invece le equazioni secondo Laplace, si ottiene

$$\begin{cases} J_1 s^2 \Theta_1(s) = C_1 (s \Theta_2(s) - s \Theta_1(s)) + T_M(s) \\ J_2 s^2 \Theta_2(s) = -C_1 (s \Theta_2(s) - s \Theta_1(s)) - C_2 s \Theta_2(s) - K_2 \Theta_2(s) \end{cases}$$

le cui funzioni di trasferimento sono

$$G_{\theta_1}(s) = \frac{s^2 J_2 J_1 + (C_1 J_2 + J_2 C_2) s + J_1 K_2}{s (J_2 s^3 J_1^2 + (2 J_2 J_1 C_1 + J_2 J_1 C_2) s^2 + (J_2 C_1 C_2 - C_1^2 J_1 + J_1^2 K_2 + J_2 C_1^2) s + J_1 K_2 C_1)}$$

mentre

$$G_{\theta_2}(s) = \frac{J_1 C_1}{J_2 s^3 J_1^2 + (2 J_2 J_1 C_1 + J_2 J_1 C_2) s^2 + (J_2 C_1 C_2 - C_1^2 J_1 + J_1^2 K_2 + J_2 C_1^2) s + J_1 K_2 C_1}$$

Possiamo notare che in  $G_{\theta_2}(s)$  si verifica una cancellazione tra uno zero ed un polo posti nell'origine, il che riduce la dimensione del sistema da tre a quattro. In altri termini, questa f.d.t. potrebbe essere realizzata anche da un sistema più semplice del precedente, con soli tre stati. Gli effetti di una cancellazione di questo tipo saranno oggetto di successivi corsi di studio.

B) B1) Al fine dello studio della stabilità della funzione di trasferimento proposta è possibile notare che affinché il sistema sia asintoticamente stabile si deve avere  $\beta > 0$ . Posta tale condizione è possibile applicare la regola dei segni di Descartes al polinomio  $s^2 - (\alpha + \beta) s + 4\beta$  ricavando che una ulteriore condizione affinché il sistema sia asintoticamente stabile è  $\alpha + \beta < 0$ , ovvero  $\alpha < -\beta$ . Per  $\beta = 0$  e  $\alpha \neq \beta$  il sistema sarà stabile ma non asintoticamente, mentre per  $\alpha = \beta = 0$  il sistema sarà polinomialmente divergente. In tutti gli altri casi il sistema sarà esponenzialmente divergente.

B2) Esprimendo la funzione di trasferimento nella forma:

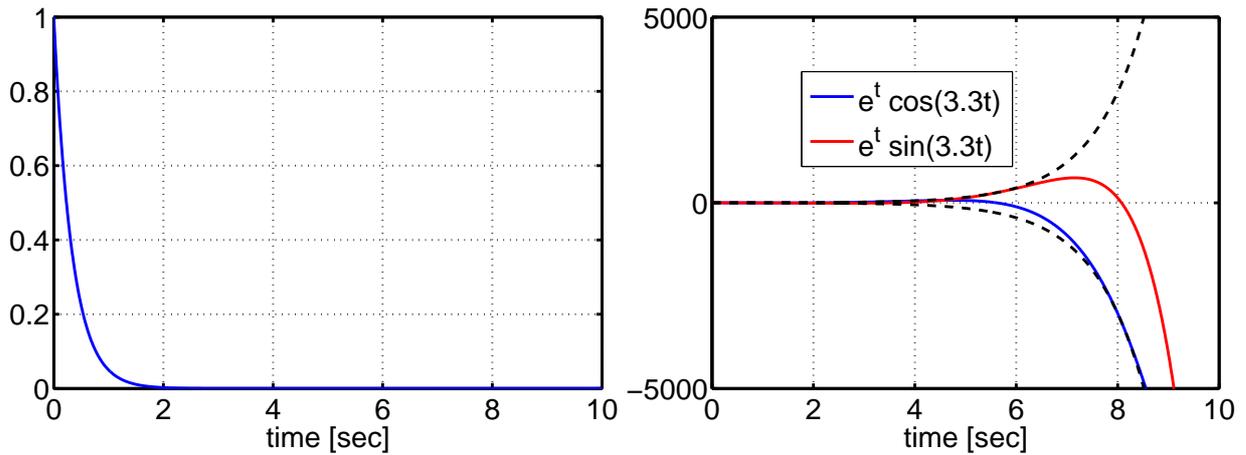
$$G(s) = \frac{s + \alpha}{s^3 - s^2 \alpha + (4\beta - \alpha\beta - \beta^2) s + 4\beta^2}$$

si può scrivere una rappresentazione di stato nella forma canonica di controllo

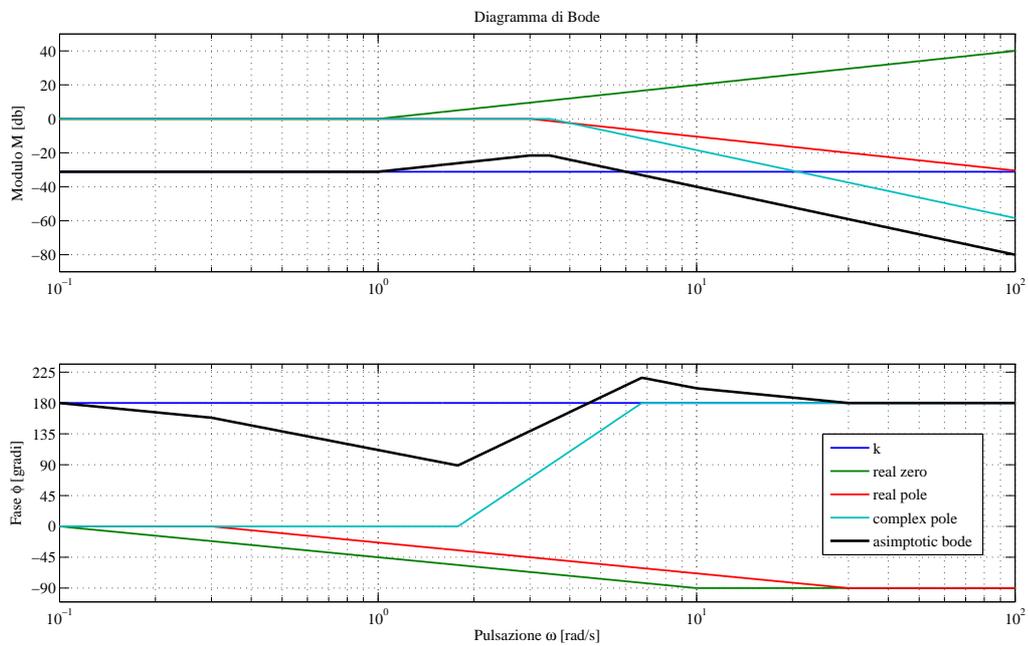
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4\beta^2 & -(4\beta - \alpha\beta - \beta^2) & \alpha \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = [\alpha \quad 1 \quad 0] \quad \mathbf{D} = 0$$

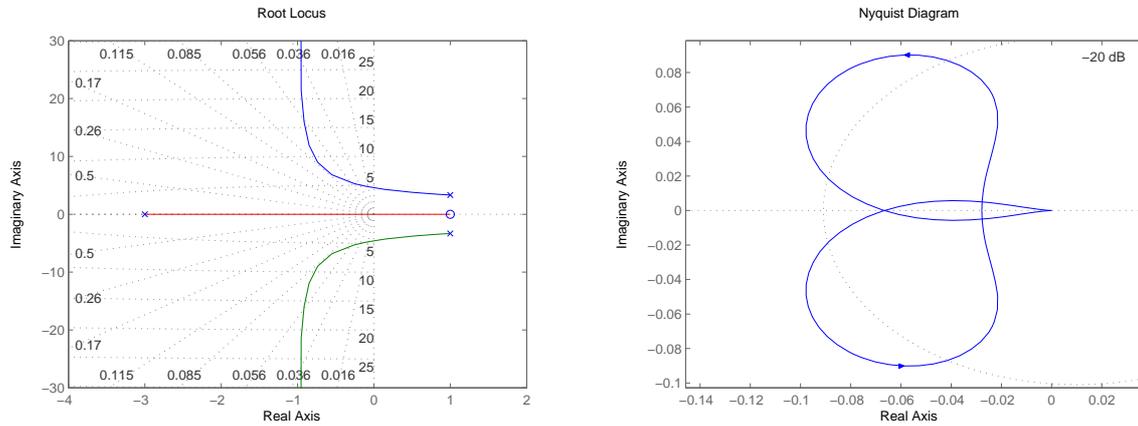
**B3)** La funzione di trasferimento proposta presenta uno zero posto in  $z_1 = -\alpha$  e tre poli  $p_1 = -\beta$ ,  $p_{2,3} = \frac{(\alpha+\beta) \pm \sqrt{(\alpha+\beta)^2 - 16\beta}}{2}$ , sostituendo  $\alpha = -1$  e  $\beta = 3$  si ottiene  $p_1 = -3$  e  $p_{2,3} = 1 \pm j\sqrt{11}$ . I modi associati al sistema sono quindi del tipo  $e^{-3t}$ , esponenzialmente convergente e  $e^t \cos\sqrt{11}t$ , una oscillazione di ampiezza esponenzialmente crescente. Le figure seguenti illustrano l'andamento temporale di tali modi:



**B4)** Il diagramma asintotico di Bode del sistema in anello aperto è riportato nella figura seguente



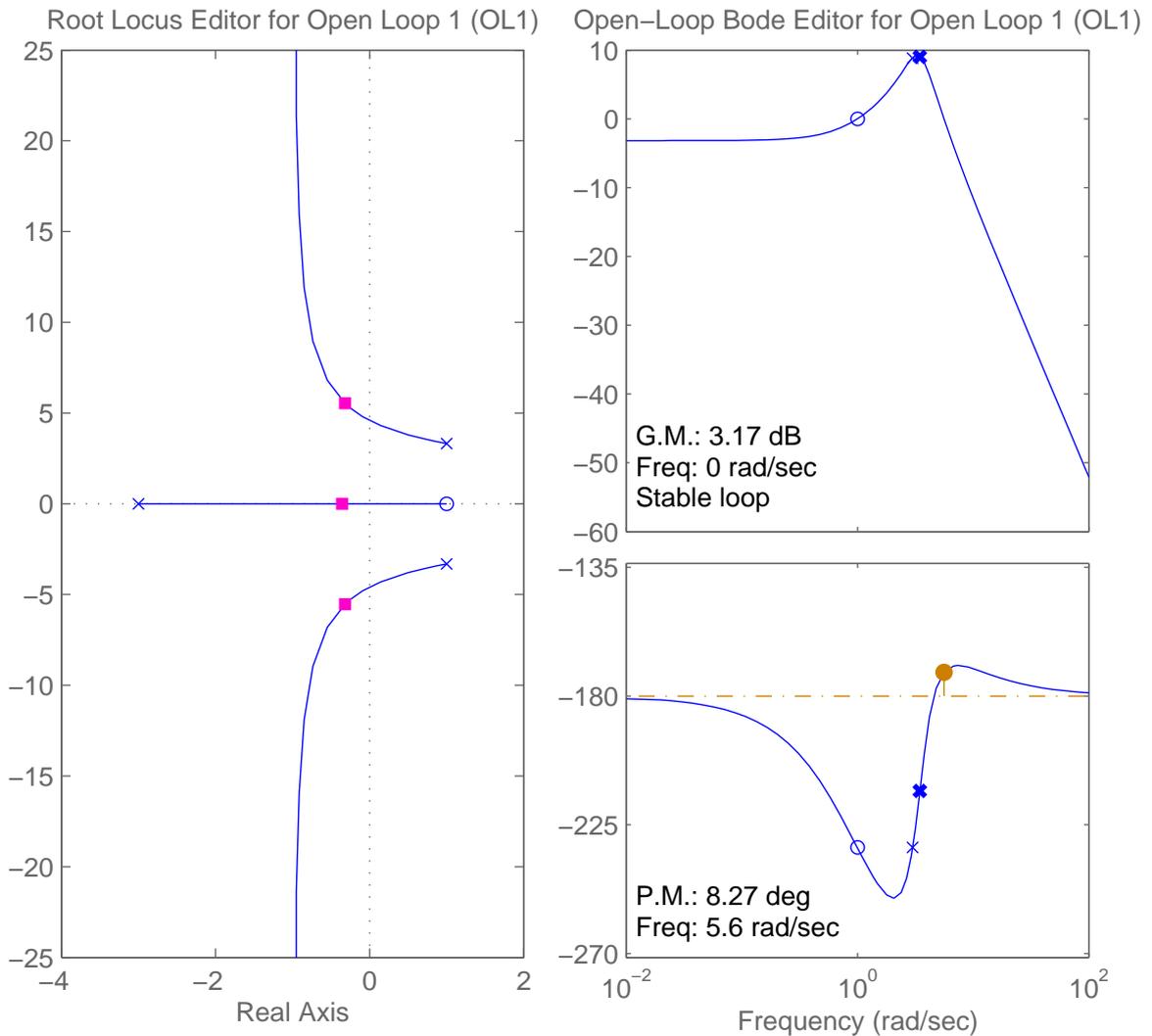
**B5)** Nelle figure seguenti sono riportati il luogo delle radici ed il diagramma di Nyquist del sistema



Dal solo luogo delle radici non è possibile stabilire se il sistema può essere stabilizzato ricorrendo ad un controllore puramente proporzionale. Il sistema proposto ha 2 poli instabili, analizzando il diagramma di Nyquist possiamo osservare che tramite una opportuna costante di guadagno  $k$  è possibile far sì che il diagramma circonda 2 volte il punto  $-1$  in verso antiorario, garantendo la stabilità. Per determinare le condizioni per le quali ciò avviene è sufficiente studiare la stabilità del sistema in anello chiuso, ovvero di

$$G_c = \frac{kG}{1 + kG} = \frac{k(s - 1)}{s^3 + s^2 + (6 + k)s + 36 - k}.$$

Ricorrendo nuovamente alla regola di Descartes, o al criterio di Routh si determina che il sistema in anello chiuso è stabile per  $15 < k < 36$ . Il luogo delle radici ed il diagramma di Bode in anello chiuso ottenuti per  $k = 25$  sono riportati nella seguente figura



C) Il sistema proposto presenta 2 poli a parte reale negativa, è quindi possibile procedere con la sintesi del controllore sui diagrammi di Bode.

C1) Fissiamo un controllore  $C(s) = \frac{k}{s^t} C_0(s)$  con  $C_0(0) = 1$ . Le specifiche statiche richiedono un integratore ( $t = 1$ ).

C2) Il valore della costante  $k$  può essere determinato in base al requisito del errore a regime sulla rampa. Tale errore è pari a  $\frac{1}{20k}$ . Si ricava quindi  $k \geq 5$ .

C3) Il sistema così ottenuto risulta essere instabile. Al fine di stabilizzarlo possiamo inserire 2 zeri vicini all'origine in modo da richiamare i rami che sfuggono nel semipiano positivo ed infine per garantire la causalità del controllore è quindi sufficiente inserire 2 poli stabili in alta frequenza.

Possiamo ad esempio scegliere due zeri complessi e coniugati  $z_{1,2} = -5 \pm i5$  e due poli reali  $p_{1,2} = -100$ , il controllore fin qui realizzato è della forma

$$C = k \frac{s^2 + 10s + 50}{s(s + 100)^2}$$

Non avendo vincoli sul funzionamento del sistema in alta frequenza la specifica sul margine di fase e può essere rispettata agendo sulla costante  $k$ , in particolare possiamo scegliere  $k = 10^4$  ottenendo un margine di fase di circa 46 deg.

C4) Il controllore ottenuto al punto precedente già soddisfa la specifica, ottenendo una frequenza di taglio approssimativamente di 104 (rad/sec).

La forma finale del controllore è quindi

$$C = 10^4 \frac{s^2 + 10s + 50}{s(s + 100)^2}$$

I diagrammi di bode ed il luogo delle radici del sistema sono riportati nella figura seguente.

