

In fig.1 è mostrato il funzionamento del processo di produzione di tubo in vetro (processo *Danner*) attuato su una linea di produzione.

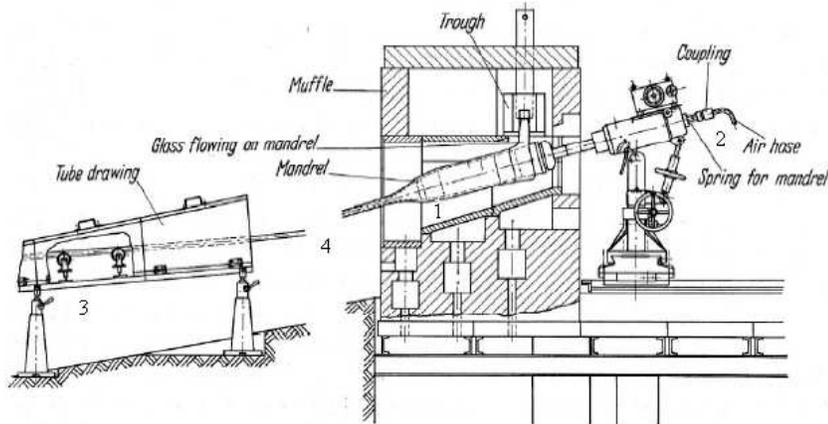


Figura 1: Impianto di produzione di tubo in vetro mediante processo di formatura Danner.

Il vetro fuso fluisce su un mandrino a sezione cava (1) che lo forma combinando gli effetti della rotazione e del soffio di aria compressa (2) agente al suo interno: quindi per effetto della gravità e sotto l'azione del tiro della linea di produzione (attuato mediante azione delle cinghie (3)), il tubo descrive una catenaria a sezione variabile (4) dalla punta del mandrino alla prima rotella della linea di tiro. Un processo di tale complessità è pressoché impossibile da analizzare in modo accurato essendo fortemente non lineare e presentando una notevole variazione nella risposta per piccole variazioni degli ingressi. La modellazione per le applicazioni pratiche viene fatta tramite tecniche di identificazione, usando come variabili di controllo la velocità di tiro delle cinghie ν a valle della linea di produzione, e la pressione del soffio di aria ρ agente attraverso il mandrino all'atto della formatura del tubo. Contestualmente, le variabili da dover tenere sotto controllo (cioè le uscite del sistema) al fine di ottimizzare la produzione in termini di resa percentuale sono il diametro Φ e lo spessore σ del tubo. Il sistema lineare ottenuto con questa procedura è il seguente

$$\begin{cases} \Phi(s) = G_{11}(s)\rho(s) + G_{12}(s)\nu(s) \\ \sigma(s) = G_{21}(s)\rho(s) + G_{22}(s)\nu(s) \end{cases}$$

dove:

$$G_{11}(s) = \frac{0.08(s + 1.67)(s^2 + 0.23s + 0.013)(s^2 - 1.18s + 0.99)}{(s + 0.31)(s + 0.012)(s^2 + 0.094s + 0.79)(s^2 + 0.95s + 2.9)}$$

$$G_{12}(s) = \frac{0.01(s + 0.038)(s^2 + 0.23s + 0.09)(s^2 - 0.40s + 2.1)}{(s + 0.31)(s + 0.012)(s^2 + 0.094s + 0.79)(s^2 + 0.95s + 2.9)}$$

$$G_{21}(s) = \frac{7.23e - 006(s - 12.33)(s - 0.077)(s + 0.02)(s^2 + 1.2s + 1.73)}{(s + 0.31)(s + 0.012)(s^2 + 0.094s + 0.79)(s^2 + 0.95s + 2.9)}$$

$$G_{22}(s) = \frac{-0.14(s + 0.102)(s^2 - 0.5s + 0.31)(s^2 + 1.7s + 3.2)}{(s + 0.31)(s + 0.012)(s^2 + 0.094s + 0.79)(s^2 + 0.95s + 2.9)}$$

- A)** Dall'analisi delle risposte delle due uscite ai medesimi segnali nei due ingressi, si traggano conclusioni sul peso relativo di questi ultimi, e si indichi quale dei due è dominante rispetto all'altro;
- B)** Trovate le due funzioni di trasferimento dominanti al punto precedente, si determini la forma di Jordan reale delle rispettive matrici della dinamica, e si descrivano i modi propri associati;

- C) Si consideri il progetto di un controllore per la funzione di trasferimento tra l'ingresso ρ e l'uscita Φ che soddisfi le seguenti specifiche:
- C1) errore di inseguimento a regime nullo sull'uscita per variazioni a gradino dell'ingresso;
 - C2) tempo di assestamento inferiore a 120 sec e sovraelongazione massima non superiore al 10% del valore di regime;
 - C3) si consideri l'ingresso ν (non dominante per questa uscita) come un disturbo; si garantisca una attenuazione di un fattore 10^2 delle componenti in uscita con un ingresso sinusoidale con frequenza pari o inferiore a 0.03 Hz.
- D) Si consideri il progetto di un controllore per la funzione di trasferimento tra l'ingresso ν e l'uscita σ che soddisfi le seguenti specifiche:
- D1) errore di inseguimento a regime nullo sull'uscita per variazioni a gradino dell'ingresso;
 - D2) tempo di assestamento inferiore a 130 sec e sovraelongazione massima non superiore al 25% del valore di regime;
 - D3) si consideri l'ingresso ρ (non dominante per questa uscita) come un disturbo; si garantisca una attenuazione di un fattore 10^3 delle componenti in uscita con un ingresso sinusoidale con frequenza pari o inferiore a 0.03 Hz.

Si descriva esplicitamente la procedura di progetto del controllore, commentando i passaggi effettuati durante le varie fasi di progetto; si corredi la trattazione con i diagrammi e gli schemi a blocchi utilizzati e si riporti l'espressione analitica dei controllori ricavati.

Soluzione

- A) Per valutare il peso relativo di un ingresso su una particolare uscita, si può innanzitutto osservare il valore assoluto del guadagno statico della funzione di trasferimento che lega i due segnali. Quindi, nel nostro caso:

$$\begin{aligned} |G_{11}(0)| &= 0.2018 & |G_{12}(0)| &= 0.0084; \\ |G_{21}(0)| &= 2.7868e - 005; & |G_{22}(0)| &= 1.6622; \end{aligned}$$

Questi dati indicano che l'ingresso ρ ha, a regime costante, un peso molto maggiore sull'uscita Φ che sull'uscita σ . Al contrario, l'ingresso ν ha un grosso peso su σ e un peso molto minore su Φ . Per completezza in fig.2 vengono riportate le risposte a gradino unitario per i diversi canali di ingresso e uscita.

Una ulteriore indicazione sul peso relativo degli ingressi sulle uscite si può ricavare dai diagrammi di ampiezza delle quattro funzioni di trasferimento, riportate in fig.3, da cui è facile osservare che il rapporto tra le ampiezze delle risposte rimane all'incirca costante anche a frequenze diverse. Questo dato conforta quindi la considerazione di una dominanza di ρ su Φ e ν su σ .

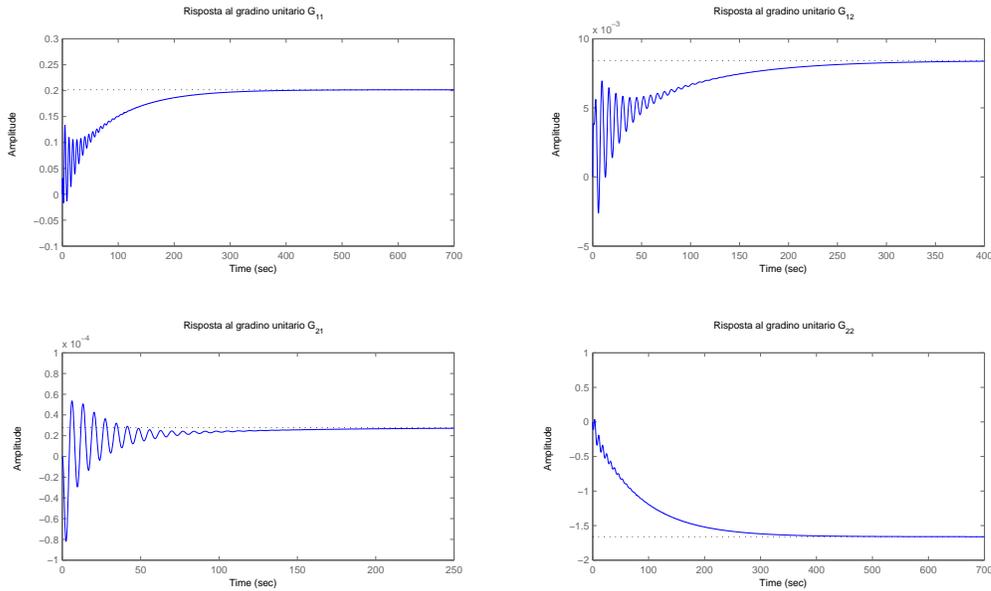


Figura 2: Risposte a gradino unitario per le quattro funzioni di trasferimento

- B) Come appena visto, le funzioni di trasferimento dominanti per le due uscite Φ e σ sono rispettivamente G_{11} e G_{22} . Da notare, però, che tutte e quattro le funzioni di trasferimento hanno lo stesso denominatore e quindi anche gli stessi poli. L'analisi modale può dunque essere condotta su una qualsiasi delle $G(s)$ fornite.

Le funzioni di trasferimento presentano quattro radici complesse e coniugate a parte reale negativa, $\lambda_{1,2} \approx -0.0470 \pm j0.8876 = \sigma_1 \pm j\omega_1$ e $\lambda_{3,4} \approx -0.4750 \pm j1.6354 = \sigma_2 \pm j\omega_2$ le quali generano rispettivamente modi oscillanti con pulsazione naturale $\omega_{n1} \approx 0.9$ rad/s e $\omega_{n2} \approx 1.6$ rad/s e smorzamento $\sigma_1 \approx 0.05$ e $\sigma_2 \approx 0.5$. Gli altri due poli sono reali a parte reale negativa $\lambda_5 \approx -0.0120$ e $\lambda_6 \approx -0.3100$, e generano modi esponenzialmente decrescenti. Una possibile matrice in forma di Jordan reale è dunque:

$$J = \begin{bmatrix} \sigma_1 & \omega_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\omega_1 & \sigma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_2 & \omega_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega_2 & \sigma_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.05 & 0.89 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.89 & 0.05 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.47 & 1.64 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1.64 & 0.47 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0120 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.3100 \end{bmatrix}.$$

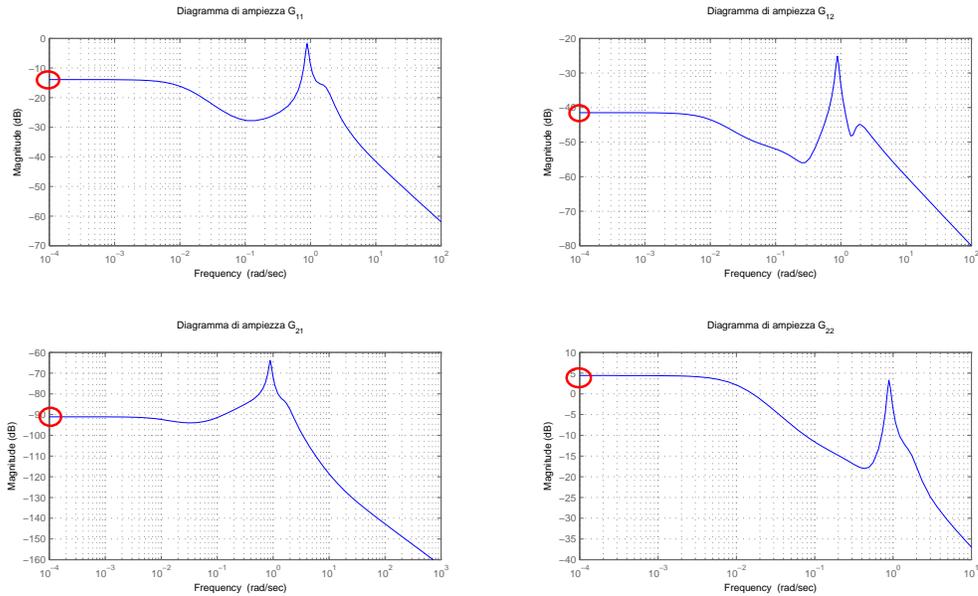


Figura 3: Diagramma di ampiezza per tutte le funzioni di trasferimento

- C) C1) La funzione di trasferimento $G_{11}(s)$ non ha poli nell'origine. Quindi per avere, a regime, errore nullo nell'inseguimento di riferimenti a gradino, è necessario che il controllore sia almeno di tipo uno, ovvero $C(s) = \frac{1}{s}\hat{C}(0)$.
- C2) Poiché è tollerabile una sovraelongazione, tentiamo di esaudire le specifiche sul tempo di assetamento e sulla sovraelongazione stessa progettando un controllore che permetta di approssimare il sistema in anello chiuso con un modello a doppio polo dominante, rispetto al quale le specifiche si traducono come segue:

$$S_{\%} = 100 \exp\left(\frac{-\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}\right) \implies \delta \approx 0.59 \implies M_{\Phi} \approx 60^{\circ};$$

$$\omega_T = \frac{3}{\delta T_a} \implies \omega_T \approx 0.043 \text{ rad/s.}$$

Il minimo margine di fase ammissibile vale quindi $M_{\Phi} \approx 60$ gradi. Per soddisfare la specifica sul tempo di assetamento, invece, il diagramma dell'ampiezza della funzione di trasferimento $C(s)G_{11}(s)$ deve attraversare l'asse a zero db per pulsazioni maggiori di 0.043 rad/s.

- C3) Lo schema a blocchi a cui fare riferimento per disturbi sull'uscita è quello di fig.4. La funzione

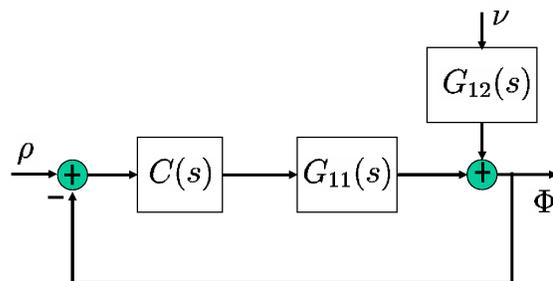


Figura 4: Schema a blocchi

di trasferimento tra l'uscita Φ e l'ingresso ν in ciclo chiuso è:

$$\Phi(s) = \frac{G_{12}(s)}{1 + C(s)G_{11}(s)}\nu(s).$$

Per soddisfare la specifica di reiezione del disturbo ν , è necessario soddisfare la relazione (per $\omega \leq 0.19 \text{ rad/s}$):

$$\left| \frac{G_{12}(j\omega)}{1 + C(j\omega)G_{11}(j\omega)} \right| < \frac{1}{10^2}.$$

Poiché nel campo di frequenze di interesse vale $|C(j\omega)G_{11}(j\omega)| \gg 1$, la relazione da soddisfare risulta, in prima approssimazione:

$$|C(j\omega)G_{11}(j\omega)|_{db} > 40db + |G_{12}(j\omega)|_{db} = -1.48db.$$

I diagrammi di Bode della funzione di trasferimento di anello $\frac{1}{s}G_{11}(s)$ sono riportati in fig.6 dove vengono anche indicati i due limiti inferiori derivati dalle specifiche. Come si può vedere la specifica

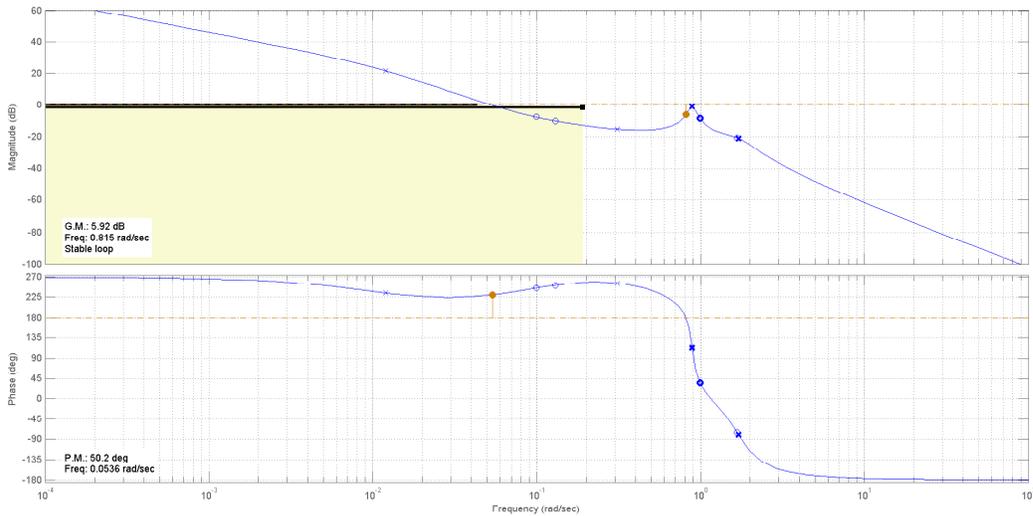


Figura 5: Diagramma di Bode di funzione di anello $\frac{1}{s}G(s)$

sull'attraversamento viene già soddisfatta, ma sia il margine di fase (50.2 gradi) sia la specifica relativa all'attenuazione del rumore in uscita, non sono rispettate. Quindi, per far salire il margine di fase sono stati inseriti due zeri complessi e coniugati in $-0.2791 \pm j0.6140$. In questo modo la specifica sul margine di fase viene rispettata, ma è necessario inserire uno zero in -0.0044 , un polo in -0.0533 e alzare il guadagno per tornare a soddisfare la specifica sul taglio. Infine, per attenuare il rumore in uscita come richiesto, è necessario aggiungere due poli complessi e coniugati in $-0.1736 \pm j0.2793$. Il controllore così ottenuto è il seguente:

$$C(s) = \frac{0.97254(s + 0.004419)(s^2 + 0.5582s + 0.455)}{s(s + 0.0533)(s^2 + 0.3472s + 0.1082)}.$$

In fig.6 e in fig.7 sono riportati rispettivamente i diagrammi di Bode della funzione di anello $C(s)G_{11}(s)$ e la risposta a gradino unitario per il sistema G_{11} in ciclo chiuso con il controllore $C(s)$. Come si può vedere le specifiche sono state più che soddisfatte.

- D) Il metodo di procedere per trovare le specifiche che il controllore dovrà soddisfare è lo stesso di quello descritto nel punto precedente. Oltre ad avere un polo nell'origine per assicurare errore nullo ad un

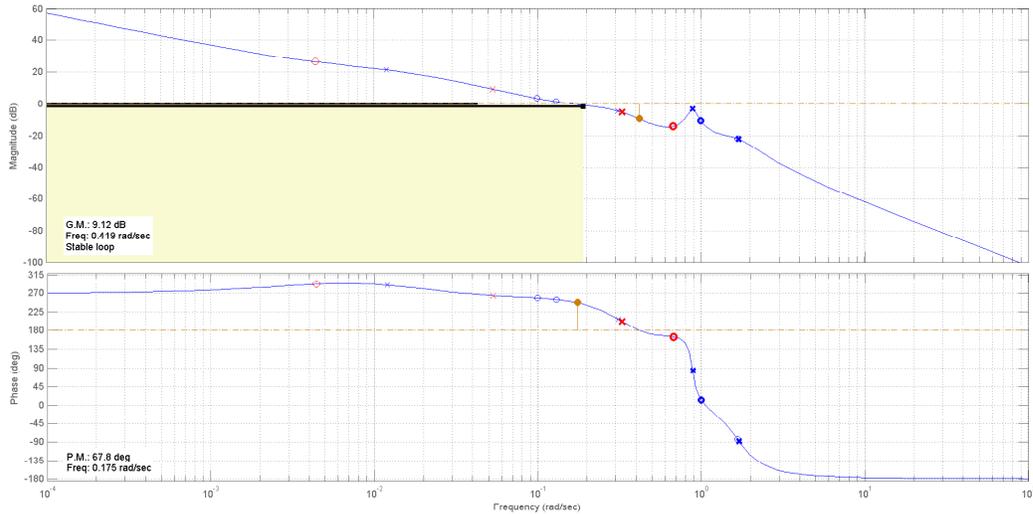


Figura 6: Diagramma di Bode della funzione di anello $C(s)G_{11}(s)$

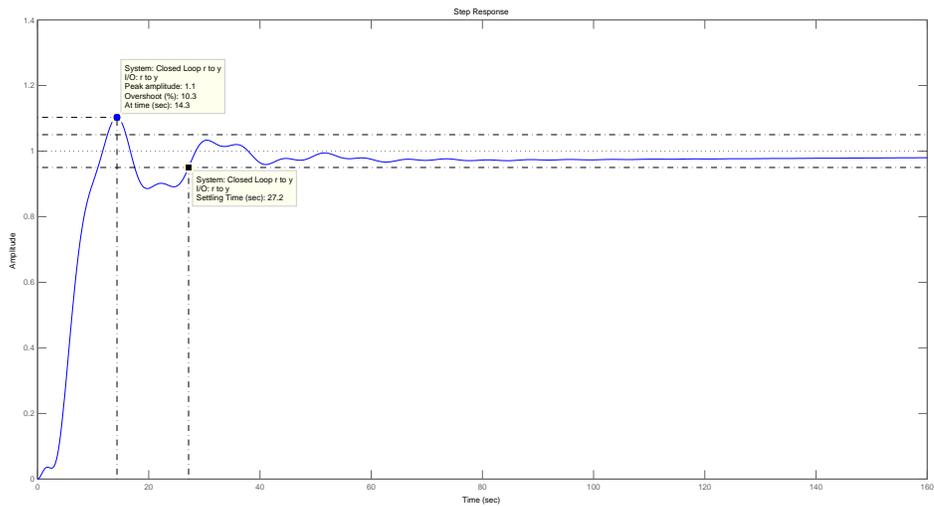


Figura 7: Risposta a gradino unitario per il sistema G_{11} in ciclo chiuso con il controllore $C(s)$

ingresso a gradino, il controllore $C_2(s)$ dovrà garantire:

$$S_{\%} = 100 \exp\left(\frac{-\pi \delta}{\sqrt{1 - \delta^2}}\right) \Rightarrow \delta \approx 0.404 \Rightarrow M_{\Phi} \approx 40.4^{\circ};$$

$$\omega_T = \frac{3}{\delta T_a} \Rightarrow \omega_T \approx 0.0572 \text{ rad/s};$$

$$|C(j\omega)G_{11}(j\omega)|_{db} > 60db + |G_{21}(j\omega)|_{db} = -31.1db \quad (\omega \leq 0.19 \text{ rad/s}).$$

Come già visto le quattro funzioni di trasferimento prese in esame hanno lo stesso denominatore e quindi gli stessi poli. Osservando inoltre le due funzioni di trasferimento G_{11} e G_{22} e le loro risposte a gradino unitario (fig.2) si nota che sono molto simili, fatta eccezione per il guadagno che differisce sia in valore che in segno. Considerando infine che le specifiche richieste sono molto simili, è pensabile che il controllore $C(s)$ trovato per la G_{11} , opportunamente modificato nel guadagno, potrebbe soddisfare anche le specifiche richieste al controllore $C_2(s)$. Infatti il nuovo controllore

$C_2(s)$ può essere facilmente trovato cambiando opportunamente il segno e valore del guadagno statico del controllore $C(s)$.

Il controllore $C_2(s)$ trovato è il seguente:

$$C_2(s) = \frac{-0.08254(s + 0.004419)(s^2 + 0.5582s + 0.455)}{s(s + 0.0533)(s^2 + 0.3472s + 0.1082)}.$$

In fig.8 e in fig.9 sono riportati rispettivamente i diagrammi di Bode della funzione di anello $C_2(s)G_{22}(s)$ e la risposta a gradino unitario per il sistema G_{22} in ciclo chiuso con il controllore $C_2(s)$. Come si può vedere le specifiche sono state soddisfatte.

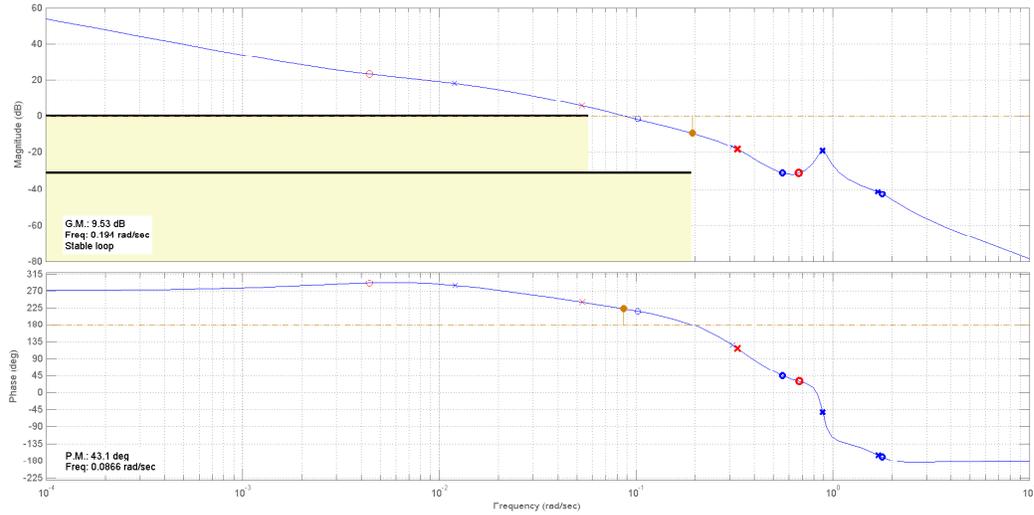


Figura 8: Diagramma di Bode della funzione di anello $C_2(s)G_{22}(s)$

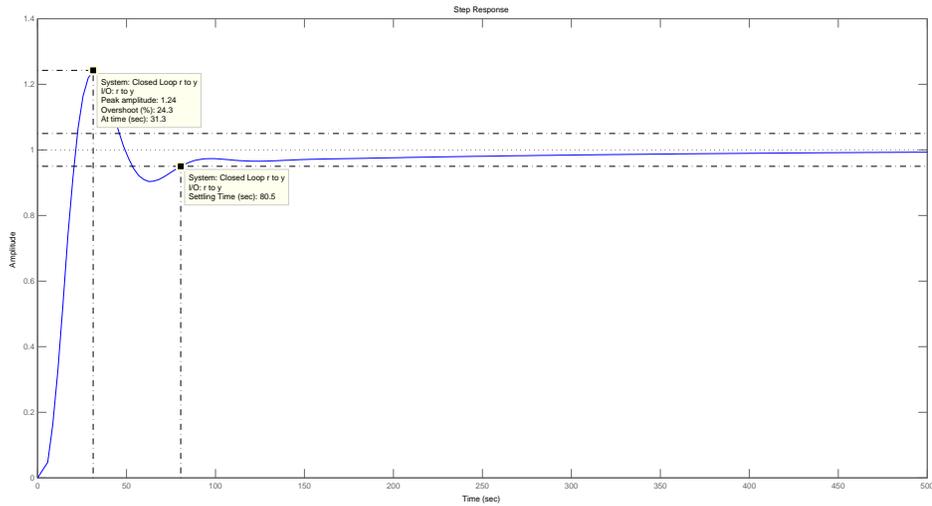


Figura 9: Risposta a gradino unitario per il sistema G_{22} in ciclo chiuso con il controllore $C_2(s)$

Appendice: Il sistema MIMO

Durante lo svolgimento di questa prova sono state analizzate tutte le funzioni di trasferimento presenti nel processo MIMO in esame. La progettazione dei due controllori, però, non ha tenuto in alcun modo in considerazione le varie interconnessioni presenti nel sistema. In fig.10 è stato implementato un modello simulink nel quale si è usato C_1 e C_2 prima trovati per controllare il sistema. In fig.11 viene mostrato per completezza la realizzazione interna del blocco *Sistema MIMO*, dove si può osservare la classica rappresentazione a blocchi di un sistema MIMO.

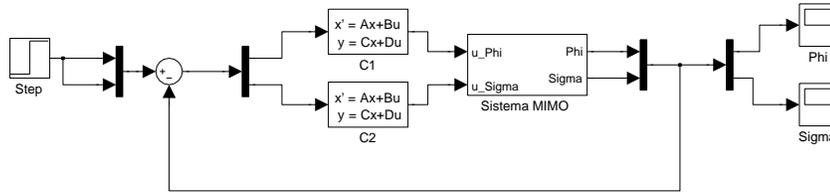


Figura 10: Schema Simulink per provare i controllori sul sistema MIMO.

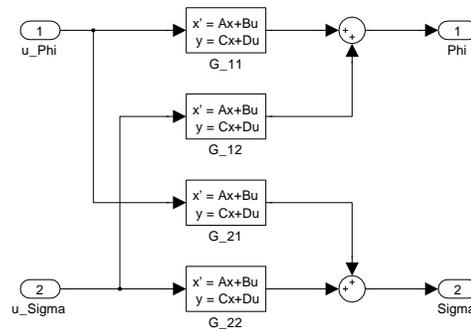


Figura 11: Il blocco *Sistema MIMO*.

In fig.12 vengono riportate le risposte a gradino unitario sia per l'uscita Φ sia per σ .

I due controllori SISO trovati per le due funzioni di trasferimento dominanti riescono a stabilizzare il sistema complessivo.

Nello studio del controllo di processi multivariabile, questo modo di procedere è frequente. Nell'industria, per esempio, sono di largo impiego le strutture di controllori decentralizzati, ovvero strutture diagonali formate da più anelli di controllo con un solo ingresso e una sola uscita. Una struttura di questo tipo è semplice e comprensibile; consente quindi una facile modifica dei parametri dei controllori anche dagli stessi ingegneri di processo in qualsiasi momento. Inoltre, in molti casi l'adozione di strutture più complicate porta solo a miglioramenti marginali delle prestazioni a scapito di una maggiore complessità.

Per poter progettare bene i controllori in questo modo, però, si devono tener presente diversi aspetti legati sia alla scelta preliminare dell'accoppiamento fra le variabili di controllo e le variabili di uscita (detto *pairing*) sia alla caratterizzazione dell'interazione tra i vari sistemi; ogni azione di controllo su una certa variabile influisce in una certa misura anche sulle altre.

Ci si può chiedere se e in che misura è garantito che il sistema MIMO in ciclo chiuso controllato come se fosse una collezione di processi SISO, cioè trascurando le interazioni tra i canali, rispetti delle specifiche imposte per i singoli loop di controllo. Una condizione perché questo avvenga è quella di dominanza diagonale della $G(s)$ e di altre condizioni imposte da tecniche di controllo classiche per sistemi multivariabile (Teorema di Freeman, RGA, DNA, ecc..).

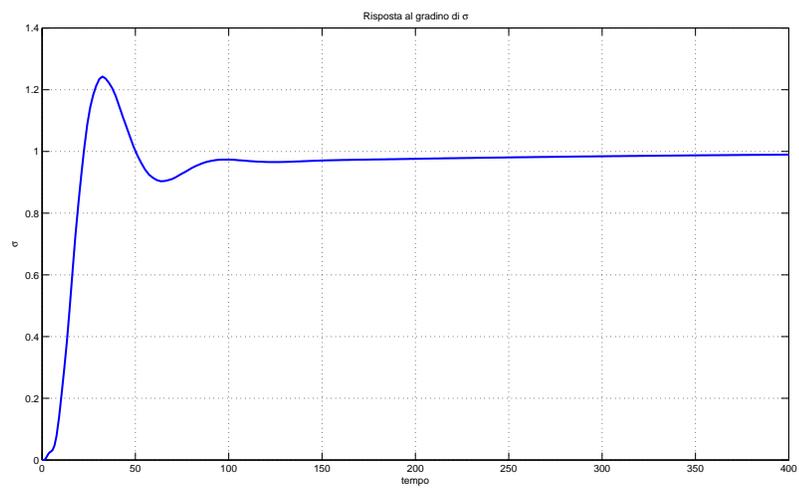
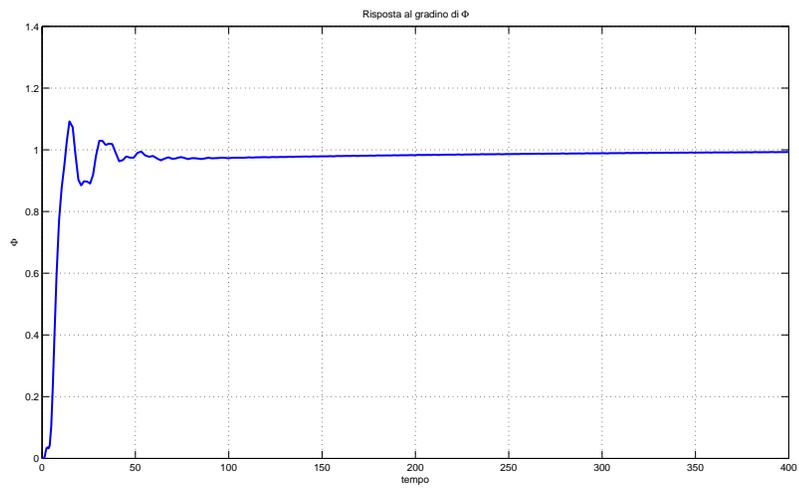


Figura 12: Risposta a gradino unitario sia per l'uscita Φ sia per σ .