

Esame di Controlli Automatici - 18 Febbraio 2009

Problema A Si consideri la dinamica di avanzamento di un veicolo in movimento mostrato in fig. 1-a), descritta in modo semplificato dalla equazione differenziale linearizzata

$$M\ddot{y} = -c\dot{y} + F, \quad (1)$$

dove M è la massa del veicolo, c il coefficiente di attrito aereodinamico, e F la spinta propulsiva. Si supponga che il sistema sia dotato di un odometro, capace di misurare la distanza totale percorsa y , ma non di una misura diretta di velocità, che si vuole ricavare per elaborazione del segnale di posizione.

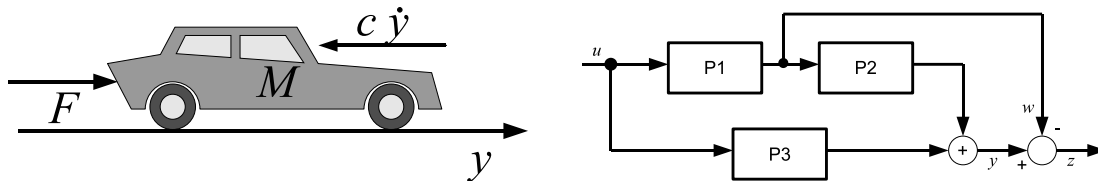


Figura 1: Fig. 1-a): Veicolo in moto rettilineo. Fig. 1-b): Composizione di più sottosistemi lineari

A-1 Supponendo di conoscere con sufficiente accuratezza i parametri del modello, cioè la massa $M = 1000$ Kg ed il coefficiente di attrito $c = 10$ Ns/m, si progetti un osservatore che, utilizzando le misure di $y(t)$ e in presenza di una spinta $F(t)$ variabile nel tempo ma esattamente nota, sia capace di stimare fedelmente la velocità $\dot{y}(t)$ del veicolo.

A-2 Si realizzi una simulazione dinamica del veicolo sottoposto ad una arbitraria spinta $F(t)$, e si confronti in simulazione la velocità effettiva con la stima ottenuta dall'algoritmo progettato.

Si supponga che il processo dinamico reale sia soggetto ad una forza $d(t)$ non misurabile che disturba l'avanzamento, e che la misura della posizione sia affetta da rumore di misura $n(t)$. Si ponga per semplicità $d(t) = A_d \sin(\omega_d t)$ N, $n(t) = A_n \sin(\omega_n t)$ m con $\omega_d = 2\pi$ rad/sec e $\omega_n = 200\pi$ rad/sec.

A-3 Si confrontino tramite simulazione il dato ricostruito con l'osservatore e quello ottenuto applicando al segnale di posizione un derivatore ($G(s) = s$), in presenza solo di rumore di misura (ad esempio, si ponga $A_n = 0.001$ m). Si discutano le differenze.

A-4 Si costruiscano due osservatori, con dinamiche di stima caratterizzate rispettivamente da costanti di tempo $\tau \approx 0.02$ s e $\tau \approx 2$ s. Si confrontino le prestazioni dei due osservatori nel caso in cui si abbia:

- alto disturbo di attuazione e basso rumore di misura $A_d = 100$ N, $A_n = 0.001$ m
- basso disturbo di attuazione e alto rumore di misura $A_d = 1$ N, $A_n = 1$ m

Si commentino i risultati e si forniscano indicazioni di progetto per la scelta del controllore più adatto a ciascuno dei due casi.

Problema B Si consideri l'impianto di fig. 1-b), i cui sottosistemi P1 P2 e P3 sono sistemi lineari caratterizzati dalle rispettive funzioni di trasferimento

$$P_1(s) = \frac{25(s+1)}{(s+5)^2}; \quad P_2(s) = \frac{20(s+5)}{(s-10)}; \quad P_3(s) = \frac{10}{(s+5)(s+2)}.$$

Si supponga che ciascun sottosistema sia rappresentato da un modello nello spazio di stato, che sarebbe completamente raggiungibile a partire dal proprio ingresso e osservabile dalla propria uscita. Per il sistema complessivo, si dispone però solo della possibilità di misurare alcuni segnali composti (vedi fig. 1-b).

B-1 Si determini se è possibile ricostruire completamente lo stato iniziale del sistema conoscendo gli ingressi e disponendo

- della sola misura di y ;
- della sola misura di $z = y - w$;
- di entrambe le misure y e w .

B-2 Si stabilisca se il sistema complessivo è stabilizzabile.

Soluzione

A-1 Il sistema può essere scritto in forma di stato rispetto alle variabili $x = (y, \dot{y})^T$ come segue:

$$\begin{bmatrix} \dot{y} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -c/M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/M \end{bmatrix} F = Ax + Bu$$

$$y = [1 \ 0] \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \end{bmatrix} = Cx$$

Notiamo che scrivendo il sistema in questa forma, il dato di interesse è direttamente espresso come una delle variabili di stato, perciò un osservatore è immediatamente ottenibile tramite le usuali tecniche di sintesi nella forma di Luenberger. Se si fosse invece realizzato il sistema nella forma canonica di controllo si avrebbe avuto

$$\dot{z} = Az + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} F$$

$$y = \begin{bmatrix} \frac{1}{M} & 0 \end{bmatrix} z$$

In questo caso, il primo stato z_1 corrisponde a M volte la posizione, quindi la stima di z_2 dovrebbe essere moltiplicata per M per ottenere la desiderata velocità \dot{y} .

Si consideri dunque l'osservatore di Luenberger

$$\dot{x}_o = Ax_o + Bu + L(y - Cx_o)$$

La matrice L può essere facilmente ottenuta in modo da fissare gli autovalori della dinamica di stima. Posti ad esempio questi in $-5, -6$, dalla applicazione delle formule di piazzamento dei poli si ottiene $L = \begin{bmatrix} 10.9900 \\ 29.8901 \end{bmatrix}$

A-2 Lo schema simulink di fig. 2 è una possibile implementazione simulativa della dinamica del veicolo e dell'osservatore progettato. In fig. 3 è possibile osservare il comportamento dell'osservatore senza disturbi in ingresso né rumore di misura.

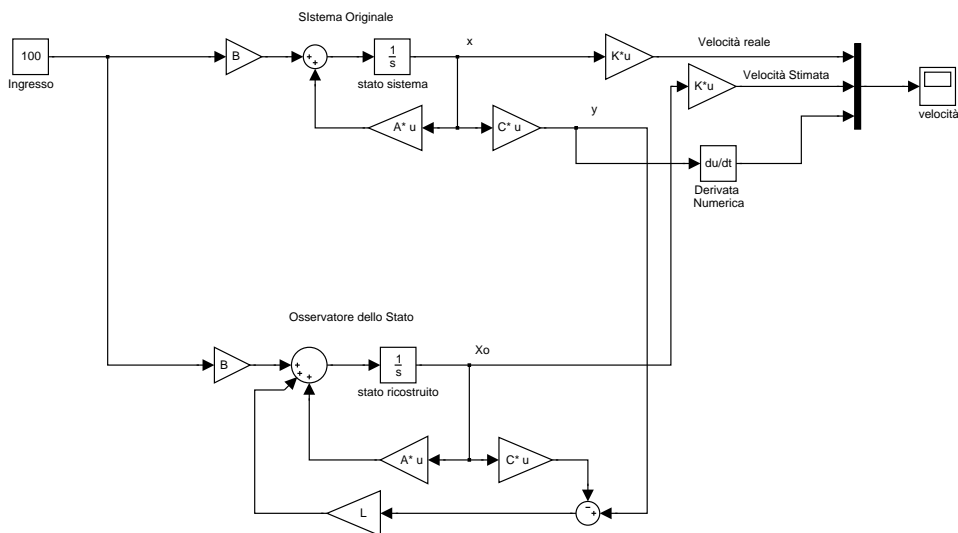


Figura 2: Schema simulink del sistema e dell'osservatore.

A-3 La velocità può essere ottenuta per derivazione numerica della posizione. La derivata è una operazione non causale, quindi non fisicamente realizzabile, rappresentata da una funzione di trasferimento $G(s) = s$. Si può comunque approssimare questa operazione con un operatore causale, ad esempio del tipo $G(s) = s/(\tau s + 1)$, con costante di tempo τ sufficientemente piccola. Si noti che, in Simulink, un blocco derivatore può essere inserito direttamente dal menu degli operatori continui

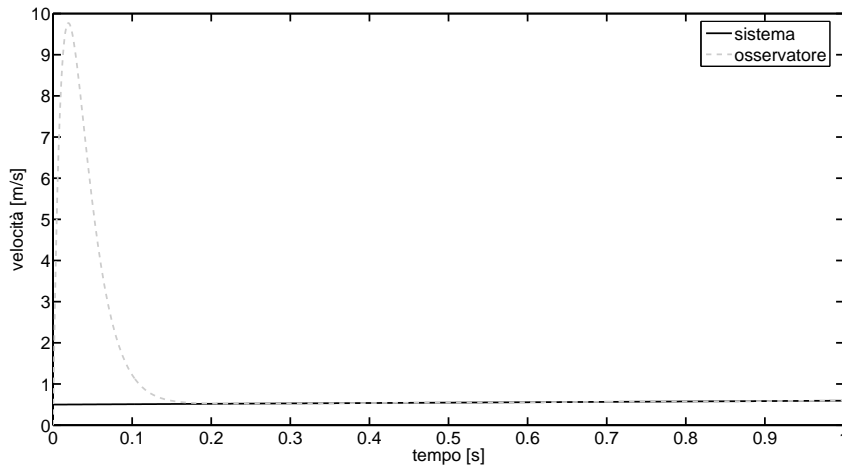


Figura 3: Stima della velocità con l'osservatore proposto partendo da una stima iniziale $x_o(0) = (0, 0)^T$ mentre lo stato reale è inizializzato a $x(0) = (0.5, 0.5)^T$. In ingresso al sistema è applicata una forza costante pari a 100 N.

(vedi fig. 2). Questo effettua sostanzialmente la stessa operazione di derivazione numerica, che è approssimata (e causale).

Nel caso di utilizzo di una approssimazione molto prossima di un derivatore puro ($\tau \approx 0$), il calcolo della velocità è fortemente alterato dalla presenza di rumore in alta frequenza (vedi fig. 4-a). Qualora si volesse utilizzare un valore minore di τ (cioè in effetti introducendo una azione di filtro passa-basso che attenua gli effetti di amplificazione del rumore in alta frequenza), si andrebbe peraltro incontro all'inconveniente di ritardare la stima della velocità (vedi fig. 4-b). La presenza di tale ritardo nella stima introduce anche, come visibile in figura, un errore non nullo in presenza di un profilo di velocità non costante. La trasformata della differenza tra la stima fatta dal derivatore ideale e quella fatta con derivatore con azione filtrante passa-basso è data da

$$E(s) = V(s) - V_f(s) = s \cdot Y(s) - \frac{s}{1 + \tau s} \cdot Y(s) = \frac{\tau s^2}{1 + \tau s} Y(s) = G_e(s) Y(s).$$

Detta $G(s) = \frac{1}{ms^2 + cs}$ la f.d.t. del sistema meccanico, e assumendo che la spinta in ingresso abbia un andamento a rampa lineare, dal teorema del valore finale si ha

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot G_e(s) G(s) \frac{1}{s^2} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\tau s^2}{(1 + \tau s)(ms + c)s} \frac{1}{s} = \tau \neq 0.$$

Ricordiamo che al contrario la dinamica dell'errore di stima con l'osservatore alla Luenberger è indipendente dal particolare andamento dello stato (vedi fig. 4).

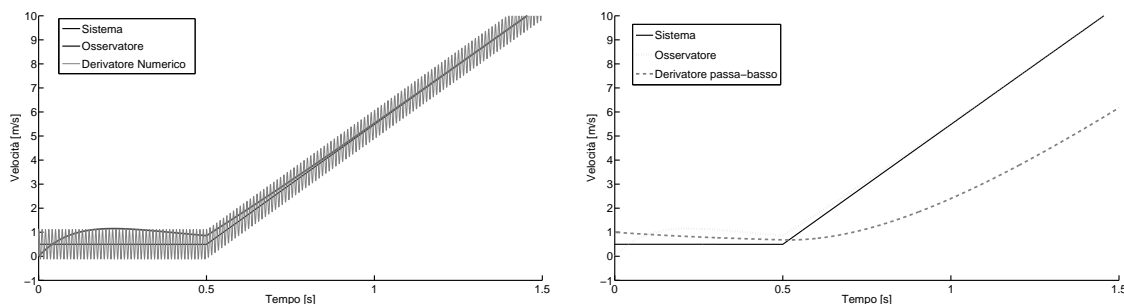


Figura 4: Stima dello velocità con derivatore numerico (a sinistra) e con filtro $G(s) = \frac{s}{\tau s + 1}$, $\tau = 0.5$. Le condizioni iniziali del sistema sono $(0.5, 0.5)$. Al sistema è applicata una spinta in ingresso a gradino di ampiezza 1000N all'istante $t = 0.5s$. Nei grafici è riportato per riferimento anche l'andamento della stima ottenuta con l'osservatore sopra progettato.

A-4 Con procedura analoga a quella del punto A, è possibile ottenere i due osservatori che differiscono soltanto per il valore delle rispettive matrici di iniezione delle uscite, ovvero

$$L1 = \text{place}(A', C', [-0.6, -0.5])'$$

$$L2 = \text{place}(A', C', [-55, -50])'$$

ottenendo

$$L1 = \begin{bmatrix} 1.0900 \\ 0.2891 \end{bmatrix}$$

$$L2 = \begin{bmatrix} 0.1050 \\ 2.7490 \end{bmatrix} \cdot 10^3 .$$

Le prestazioni dei due osservatori sono osservabili in figura 5. Come atteso, è possibile osservare che:

- nel caso $A_d = 100N, A_n = 0.001m$, in cui si ha una forte incertezza sull'ingresso del sistema e una bassa incertezza sulla misura dell'uscita, l'osservatore veloce ha prestazioni molto migliori, infatti la sua dinamica è tale da portarsi velocemente a bassi errori di stima, anche partendo da condizioni iniziali errate, e da inseguire bene le variazioni introdotte nella dinamica del sistema dal disturbo d .

- nel caso in cui si abbiano $A_d = 1N, A_n = 1m$, e cioè una bassa incertezza sull'ingresso ed un'alta incertezza sulla misura dell'uscita, il comportamento dell'osservatore veloce è compromesso dalla forte sensibilità al rumore n . Vista la bassa incertezza sull'attuazione, è quindi più prudente utilizzare l'osservatore lento. Esso manifesta una certa lentezza nel compensare un eventuale errore della stima iniziale, ma, una volta "agganciata" la dinamica del sistema, è in grado di inseguirla con bassi valori dell'errore (vedi particolare di figura 6).

In figura 7 è mostrato lo schema simulink completo con il disturbo d e il rumore n .

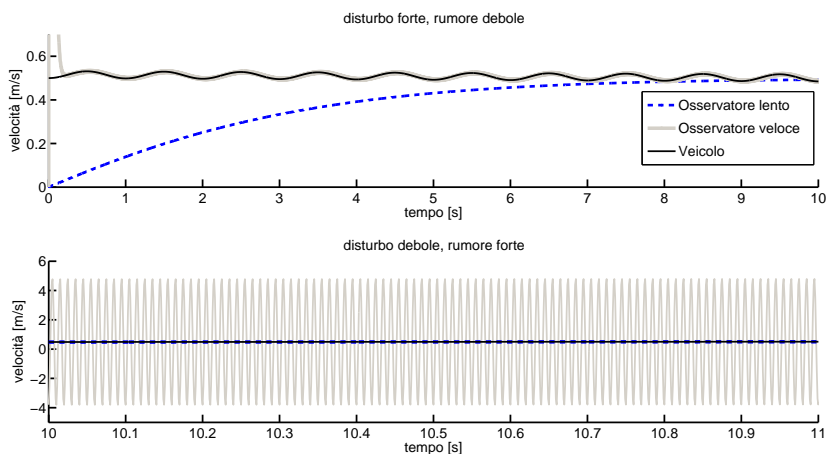


Figura 5: Prestazioni dei due osservatori nei due casi.

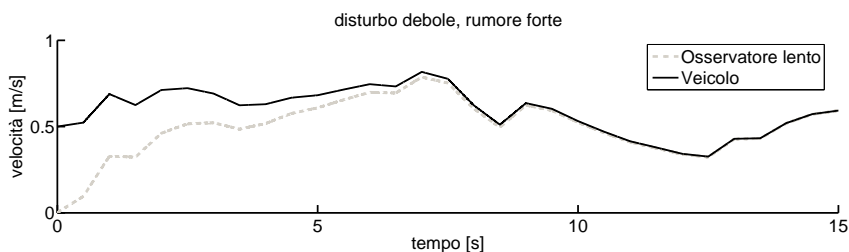


Figura 6: Particolare delle prestazioni dell'osservatore lento nel caso 2.

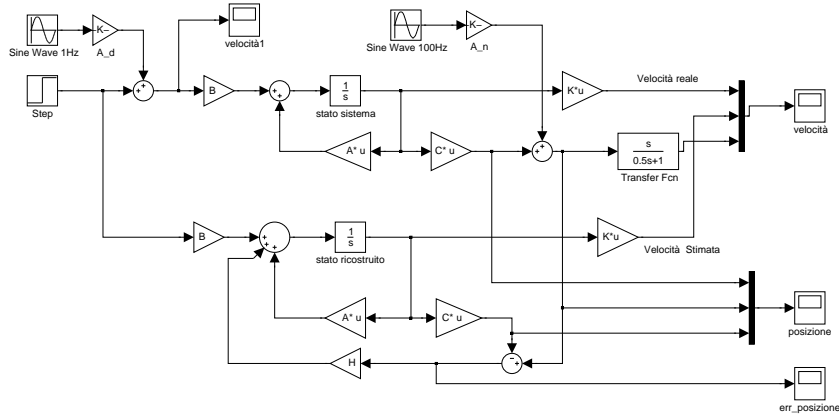


Figura 7: Schema simulink completo.

B-1 Si osserva dallo schema che i due rami in parallelo che concorrono a formare l'uscita y hanno un polo in comune in -5 che ne impedisce la osservabilità. Inoltre, si ha la cancellazione di un polo in -5 di $P_1(s)$ con uno zero del sottosistema in serie $P_2(s)$, il che implica una ulteriore perdita di osservabilità. L'uscita w non può ovviamente osservare i poli in 10 di $P_2(s)$ e quelli in -5 e -2 di $P_3(s)$, propri di sottosistemi che non sono collegati a quella uscita. Sono invece completamente osservabili da w i due poli in -5 del sottosistema $P_1(s)$. Nel terzo caso, in cui si ha a disposizione l'informazione portata dalla y e quella da w , ci si attende quindi che il sistema sia completamente osservabile.

Resta da studiare la osservabilità dalla uscita $z = y - w$. Si osservi che il calcolo della funzione di trasferimento tra u e z ,

$$P_{u,z} = P_3(s) + P_1(s)(P_2(s) - 1) = \frac{475(s + 0.8353)(s + 2.171)(s + 5.804)}{(s + 5)^2(s + 2)(s - 10)}$$

non porterebbe a conclusioni certe. Infatti la cancellazione di un polo in -5 che si verifica può corrispondere alla perdita di raggiungibilità dell'autovalore corrispondente, oppure alla sua perdita di osservabilità, ovvero ad entrambe.

Si può osservare che, rispetto alla uscita z , il sistema consiste di due rami in parallelo, con funzioni di trasferimento rispettivamente pari a $P_3(s)$ e

$$P_1(s)(P_2(s) - 1) = \frac{475(s + 1)(s + 5.789)}{(s - 10)(s + 5)^2},$$

che hanno un polo in -5 a comune, quindi il sistema ha un sottosistema inosservabile di dimensione uno.

Per una verifica più diretta e dettagliata, si può ricorrere ad una analisi direttamente nello spazio di stato composito. Indicando con il pedice i le grandezze relative al sottosistema i -esimo $\dot{x}_i = A_i x_i + B_i u_i$, $y_i = C_i x_i + D_i u$, si considerino le tre realizzazioni

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_1 \\ y_1 &= [-100 \ 25] x_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= [10] x_2 + [1] u_2 \\ y_2 &= [30] x_2 + [2] u_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_3 &= \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} x_3 + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u_3 \\ y_3 &= [10/3 \ -10/3] x_3 \end{aligned}$$

Andiamo quindi a considerare le relazioni di connessione dello schema, che sono

$$u_2 = y_1, \quad u_1 = u_3 = u$$

è quindi possibile scrivere per quanto riguarda l'evoluzione dello stato (notando che D_1 e D_3 sono nulle)

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ B_2 C_1 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & A_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \\ B_3 \end{bmatrix} u.$$

Per quanto riguarda le 3 uscite proposte, è poi possibile scrivere

$$C_y = [D_2 C_1 \mid C_2 \mid C_3]$$

$$C_w = [C_1 \mid 0 \mid 0]$$

$$C_z = C_y - C_w = [(D_2 - I)C_1 \mid C_2 \mid C_3]$$

$$C_{yw} = \begin{bmatrix} C_y \\ C_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_2 C_1 & C_2 & C_3 \\ C_1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Calcolando le tre matrici di osservabilità associate a C_y , C_z e C_{yw} ed i rispettivi ranghi, si ottiene

$$\text{rank}(\mathcal{O}_y) = 3, \quad \text{rank}(\mathcal{O}_z) = 4, \quad \text{rank}(\mathcal{O}_{yw}) = 5.$$

Le informazioni ricavate sono quindi congruenti con quanto precedentemente osservato, e confermano che l'unica uscita che permette di osservare completamente il sistema è quindi la terza.

B-2 Si osserva dallo schema che i due sistemi che ricevono l'ingresso u in parallelo hanno un polo in comune, che risulterà non raggiungibile (l'altra cancellazione che si ha nella serie di P1 con P2 non altera la raggiungibilità). Questo polo in -5 è peraltro a parte reale negativa, quindi la stabilizzabilità rimane garantita.

In modo alternativo, procediamo al calcolo della matrice di raggiungibilità del sistema che risulta

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -10 & 75 & -500 \\ 1 & -5 & 25 & -125 & 625 \\ 0 & 25 & 25 & 1875 & 8125 \\ 1 & -2 & 4 & -8 & 16 \\ 1 & -5 & 25 & -125 & 625 \end{bmatrix}$$

ed è di rango 4 (come evidente dall'uguaglianza delle righe 2 e 5). Per stabilire se il sistema è stabilizzabile, dobbiamo perciò controllare se l'unico autovalore instabile in $s = 10$ sia interno o esterno al sottospazio di raggiungibilità. Costruiamo una base del sottospazio di raggiungibilità, prendendo le prime 4 colonne di \mathcal{C} e aggiungendo un vettore linearmente indipendente:

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -10 & 75 & 0 \\ 1 & -5 & 25 & -125 & 0 \\ 0 & 25 & 25 & 1875 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & -8 & 0 \\ 1 & -5 & 25 & -125 & 1 \end{bmatrix}$$

ottenendo così

$$\bar{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 500 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 400 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 75 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = T^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

da cui risulta evidente che la dinamica esterna al sottospazio di raggiungibilità è quella associata all'autovalore in -5 , situato nell'angolo in basso a destra della matrice \bar{A} . Perciò, essendo il rango della matrice di raggiungibilità pari a 4, la dinamica dell'autovalore in 10 è interna al sottospazio di raggiungibilità, ed il sistema è quindi stabilizzabile.