

Si consideri lo schema di principio di un sistema idraulico riportato in figura 1.

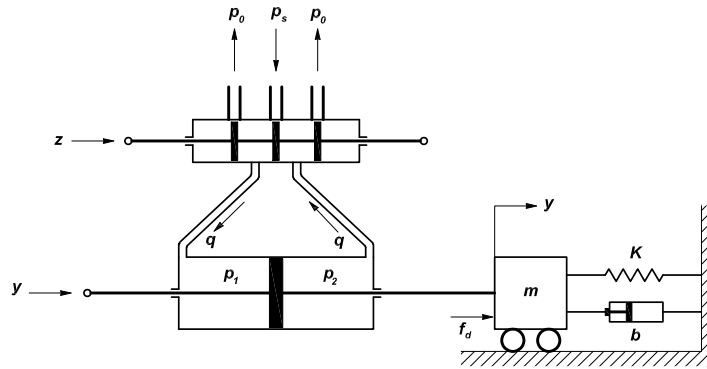


Figura 1: Sistema idraulico.

Il sistema idraulico è essenzialmente un attuatore e amplificatore idraulico controllato per mezzo di una valvola pilota la cui posizione è individuata dalla variabile di controllo z . La valvola pilota ha tre ingressi, attraverso i quali entra olio con densità di massa ρ . Il condotto centrale è a pressione p_s costante maggiore di quella dei due ingressi laterali in cui la pressione è mantenuta al valore p_o . La posizione della valvola in uscita è individuata dalla variabile y ed è collegata assialmente ad un carico di massa m il quale a sua volta è collegato attraverso un molla di costante elastica K ed uno smorzatore con coefficiente b ad una struttura rigida. La differenza di pressione $\Delta p = p_1 - p_2$ è causa dello spostamento della valvola di uscita.

Le equazioni differenziali che descrivono la dinamica del sistema sono:

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + b \frac{dy}{dt} + Ky = A_v \Delta p + f_d$$

$$A_v \rho \frac{dy}{dt} + \frac{\rho V}{K_{oil}} \frac{d\Delta p}{dt} + L \Delta p = q$$

dove, A_v è l'area sulla quale agisce la differenza di pressione Δp , f_d la forza di disturbo che agisce sul carrello, L il coefficiente di perdita del sistema, V il volume effettivo dell'olio sotto pressione e K_{oil} è il modulo di compressibilità dell'olio. Inoltre, il flusso di olio q , attraverso la valvola pilota, è una funzione non lineare di z e Δp la cui espressione è:

$$q = f(z, \Delta p) = C_1 \sqrt{\frac{p_s - \Delta p}{2}} \left(\frac{d_o}{2} + z \right) - C_2 \sqrt{\frac{p_s + \Delta p}{2}} \left(\frac{d_o}{2} - z \right)$$

e dove $C_1 = c_1 \alpha \sqrt{2g/\gamma}$, $C_2 = c_2 \alpha \sqrt{2g/\gamma}$, $\gamma = \rho g$ è il peso specifico dell'olio (g è l'accelerazione gravitazionale) e d_o il diametro dei condotti di ingresso e uscita dell'olio a pressione p_s e p_o , rispettivamente.

A Supponendo che la variabile di controllo sia lo spostamento z della valvola pilota e che la variabile controllata sia la posizione y del carrello di massa m coassiale alla valvola di uscita, si determini il regime di equilibrio, in forma simbolica, corrispondente al punto di lavoro desiderato $y = \bar{y}$ con $f_d = 0$;

B Supponendo di disporre della misura della posizione y della valvola di uscita e di poter controllare la posizione della valvola pilota, si determini una rappresentazione del sistema linearizzato in forma di stato, in forma simbolica, intorno all'equilibrio \bar{y} , $\Delta \bar{p}$, \bar{z} e $\bar{f}_d = 0$;

Si considerino i seguenti valori numerici: $m = 4$ kg, $K = 20$ N/m, $b = 20$ Ns/m, $A_v = 0,5$ m², $\rho = 8,84$ kg/m³, $V = 0,5$ m³, $K_{oil} = 5$ N/m², $L = 0,1$ ms, $\alpha = d_o = 0,05$ m, $c_1 = c_2 = 1$ kg/m³, $p_s = 500$ kPa e $g = 9.81$ m/s². Supponiamo, inoltre, di essere interessati al punto di equilibrio corrispondente a $\bar{y} = 0,5$ m.

C Si scriva la funzione di trasferimento tra ingresso z e uscita y e quella tra il disturbo f_d e l'uscita y .

D Si tracci l'andamento qualitativo dei modi associati al sistema.

E Si determini una legge di controllo per lo spostamento z della valvola pilota che agisca in modo tale da garantire le seguenti specifiche:

e1) la posizione della massa si deve portare da zero ad un valore compreso nell'intervallo 0.5 ± 0.025 in un tempo non superiore a 50 ms e senza mai eccedere il valore massimo ammissibile pari a 0.55 m , fermo restando che il valore di regime deve essere esattamente 0.5 m .

e2) ipotizzando che la forza f_d agente sulla massa m sia,

$$f_d = \bar{f}_d + F_d \sin(\omega_d t), \quad 0 \leq F_d \leq 0.2 \text{ N}, \quad \omega_d \leq 10 \text{ rad/s},$$

cioè somma di una componente costante di valore \bar{f}_d generico e una componente variabile sinusoidalmente, si garantisca che:

- lo scostamento indotto dalla componente costante f_d del disturbo sulla posizione y della massa m rispetto al valore nominale \bar{y} sia completamente annullato;
- la variazione indotta dalla componente sinusoidale sulla posizione y della massa m sia inferiore a 1 mm ;

F Si supponga che il sensore che misura lo spostamento della massa m garantisca una misura corretta per pulsazioni inferiori a 10^4 rad/s , ma sia affetta al di sopra di queste pulsazioni da un errore pari al massimo a 10 mm . Si desidera che l'effetto sulla regolazione dell'uscita sia inferiore a $\pm 0.3 \text{ mm}$.

Si riporti esplicitamente il controllore ottenuto, il diagramma di Bode relativo alla f.d.t. di anello con le relative specifiche da rispettare, la risposta al gradino del sistema in anello chiuso e lo schema a blocchi complessivo.

Soluzione

A Il sistema è descritto da tre variabili di stato y , \dot{y} e Δp . Essendo l'equilibrio caratterizzato dalla posizione y della valvola di uscita costante e pari al valore \bar{y} generico, si ricava che $\dot{y} = \ddot{y} = 0$. Tuttavia in condizioni di equilibrio statico anche $d\Delta p/dt$ è nullo. Sostituendo tali valori nelle equazioni dinamiche e ponendo la forza di disturbo nulla, si ottiene un sistema di due equazioni in due incognite, la posizione \bar{z} della valvola pilota e la differenza di pressione $\Delta\bar{p}$ necessaria per mantenere in equilibrio il sistema. Il sistema è il seguente:

$$\begin{cases} K\bar{y} = A_v\Delta\bar{p} \\ L\Delta\bar{p} = f(\bar{z}, \Delta\bar{p}) \end{cases}$$

Dalla prima equazione ricaviamo il valore $\Delta\bar{p} = \frac{K}{A}\bar{y}$, che sostituito nella seconda equazione permette di ottenere il valore \bar{z} . L'equilibrio, caratterizzato dalla coppia $(\bar{z}, \Delta\bar{p})$, è il seguente:

$$\begin{aligned} \Delta\bar{p} &= \frac{K}{A_v}\bar{y} \\ \bar{z} &= \frac{\sqrt{2}L\frac{K}{A_v}\bar{y} - \left(C_1\sqrt{p_s - \frac{K}{A_v}\bar{y}} - C_2\sqrt{p_s + \frac{K}{A_v}\bar{y}}\right)\frac{d_o}{2}}{C_1\sqrt{p_s - \frac{K}{A_v}\bar{y}} + C_2\sqrt{p_s + \frac{K}{A_v}\bar{y}}} \end{aligned}$$

B Una rappresentazione del sistema lineare in forma di stato intorno all'equilibrio dato da \bar{y} , $\Delta\bar{p}$, \bar{z} con $\bar{f}_d = 0$ si può ottenere indicando come variabili di stato $x = [x_1, x_2, x_3]^T = [y, \Delta p, \dot{y}]^T$ e definendo le variabili errore $\tilde{x} = x - \bar{x} = [\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3]^T = [y - \bar{y}, \Delta p - \Delta\bar{p}, \dot{y}]^T$, $\tilde{u} = z - \bar{z}$ e $f_d = f_d$. In questo modo, il sistema non lineare, scritto in forma di stato e traslato nell'origine, ha la seguente forma:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_1 &= \tilde{x}_3 \\ \dot{\tilde{x}}_2 &= \frac{K_{oil}}{\rho V} [f(\tilde{u}, \tilde{x}_2) - L(\tilde{x}_2 + \Delta\bar{p}) - A_v \rho \tilde{x}_3] \\ \dot{\tilde{x}}_3 &= \frac{1}{m} [A_v(\tilde{x}_2 + \Delta\bar{p}) - b\tilde{x}_3 - K(\tilde{x}_1 + \bar{y})] + \frac{f_d}{m} \end{aligned}$$

dove,

$$f(\tilde{u}, \tilde{x}_2) = C_1\sqrt{\frac{p_s - \tilde{x}_2 - \Delta\bar{p}}{2}} \left(\frac{d_o}{2} + \tilde{u} + \bar{z}\right) - C_2\sqrt{\frac{p_s + \tilde{x}_2 + \Delta\bar{p}}{2}} \left(\frac{d_o}{2} - \tilde{u} - \bar{z}\right)$$

Derivando e calcolando nell'equilibrio delle nuove variabili di stato, cioè nell'origine, si ottiene il sistema linearizzato nella consueta forma di stato

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= A\tilde{x} + B\tilde{v} \\ \tilde{z} &= C\tilde{x} + D\tilde{v} \end{aligned}$$

dove $\tilde{v} = [\tilde{u}, f_d]^T$ mentre,

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}; & B &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b_{21} & 0 \\ 0 & b_{32} \end{bmatrix} \\ C &= [1 \ 0 \ 0]; & D &= 0 \end{aligned}$$

con:

$$\begin{aligned} a_{22} &= \frac{K_{oil}}{\rho V} \left(\frac{\partial f(\tilde{u}, \tilde{x}_2)}{\partial \tilde{x}_2} \Big|_{\substack{\tilde{x}=0 \\ \tilde{u}=0}} - L \right) = -\frac{K_{oil}}{\rho V} \left(\frac{C_1(d_o + 2\bar{z})}{4\sqrt{2}\sqrt{p_s - \Delta\bar{p}}} + \frac{C_2(d_o - 2\bar{z})}{4\sqrt{2}\sqrt{p_s + \Delta\bar{p}}} + L \right); \\ a_{23} &= -A_v \frac{K_{oil}}{V}; & a_{31} &= -\frac{K}{m}; & a_{32} &= \frac{A_v}{m}; & a_{33} &= -\frac{b}{m}; \\ b_{21} &= \frac{K_{oil}}{\rho V} \left(\frac{C_1}{\sqrt{2}}\sqrt{p_s - \Delta\bar{p}} + \frac{C_2}{\sqrt{2}}\sqrt{p_s + \Delta\bar{p}} \right); & b_{32} &= \frac{1}{m}; \end{aligned}$$

C Il calcolo della funzione di trasferimento tra l'ingresso \tilde{z} e l'uscita \tilde{x}_1 del sistema, e di quella tra il disturbo \tilde{f}_d e l'uscita \tilde{x}_1 , sostituendo i valori numerici dati, risultano

$$G_z(s) = \frac{\tilde{Y}(s)}{\tilde{Z}(s)} = \frac{3,363}{(s + 3.276)(s + 1.737)(s + 0.1)}$$

$$G_{f_d}(s) = \frac{\tilde{Y}(s)}{\tilde{F}_d(s)} = \frac{0.25(s + 0.113)}{(s + 3.276)(s + 1.737)(s + 0.1)}$$

In figura 3 e in figura 4 sono riportati i diagrammi di Bode delle due f.d.t.. Inoltre, in figura 2-a,c ed in figura 2-b,d sono riportate anche la risposta al gradino e impulsiva della funzione di trasferimento $G_z(s)$ e G_{f_d} , rispettivamente.

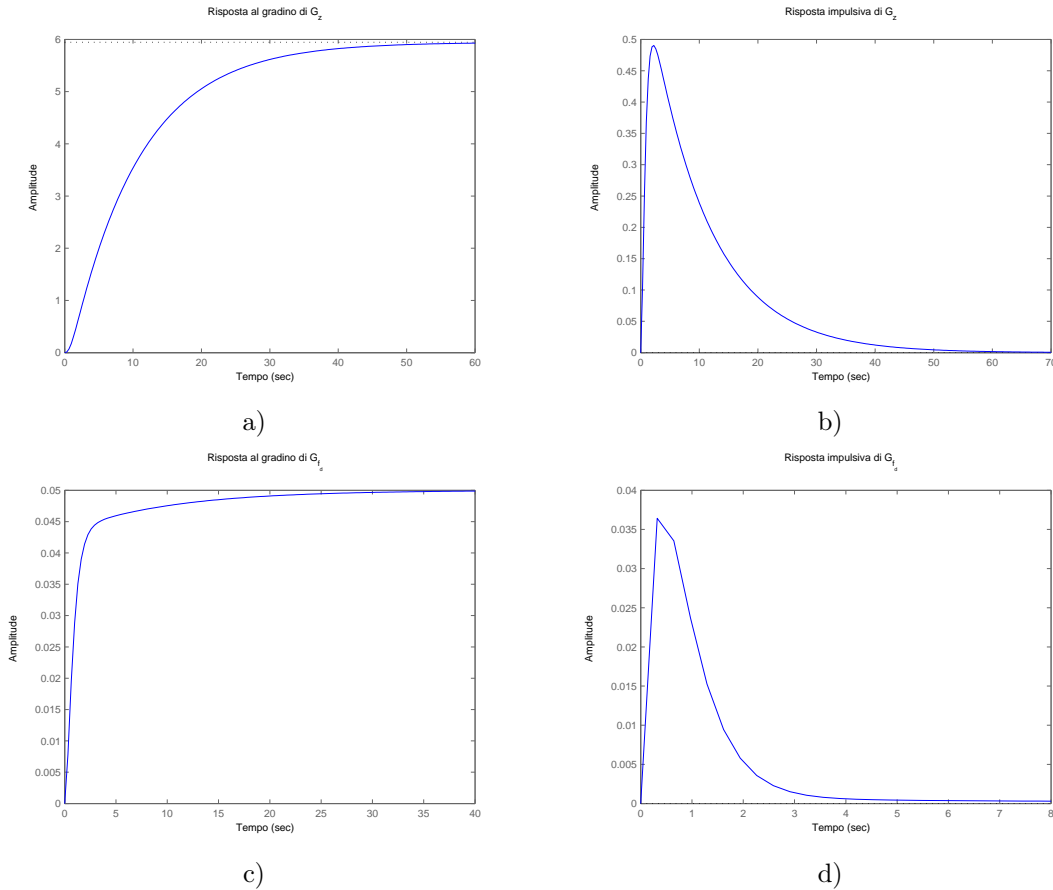


Figura 2: Le risposte al gradino e impulsive delle funzioni di trasferimento $G_z(s)$ e G_{f_d} sono riportate in (a,b) e (c,d), rispettivamente, e sono ottenute con il comando step e impulse di Matlab.

D Sostituendo i valori numerici, il sistema linearizzato scritto in forma di stato è il seguente:

$$\dot{\tilde{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -0.1131 & -5 \\ -5 & 0.125 & -5 \end{bmatrix} \tilde{x} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 26.9 & 0 \\ 0 & 0.25 \end{bmatrix} \tilde{v}$$

$$\tilde{z} = [1 \ 0 \ 0] \tilde{x} + D\tilde{v}$$

dove $\tilde{v} = [\tilde{u}, f_d]^T$. La matrice dinamica del sistema presenta tre autovalori reali distinti a parte reale negativa; questo significa che esiste una matrice di trasformazione T tale che $A = T^{-1}\Lambda T$, dove Λ è una matrice diagonale a blocchi, con miniblocchi semplici contenenti gli autovalori del sistema. I modi propri del sistema sono perciò di tipo esponenziale semplice convergente a zero. La rapidità con cui questi modi convergono a zero dipende dal modulo dell'autovalore ad esso associato. In figura 5 sono riportati i tre modi associati ai tre autovalori $\lambda_1 \approx -3.2763$, $\lambda_2 \approx -1.7375$, $\lambda_3 \approx -0.1$.

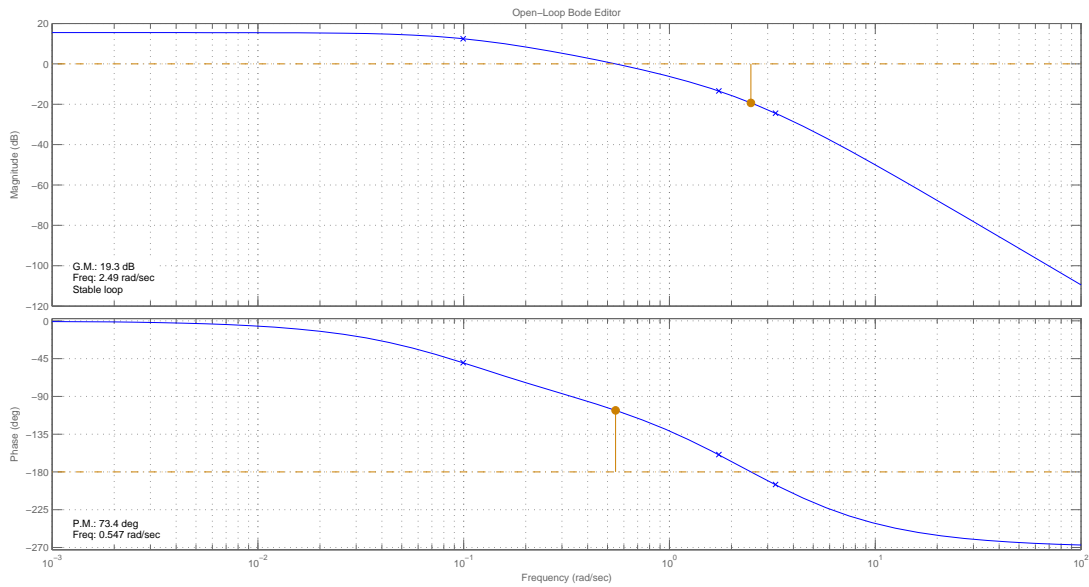


Figura 3: Diagramma di Bode della f.d.t. $G_z(s)$.

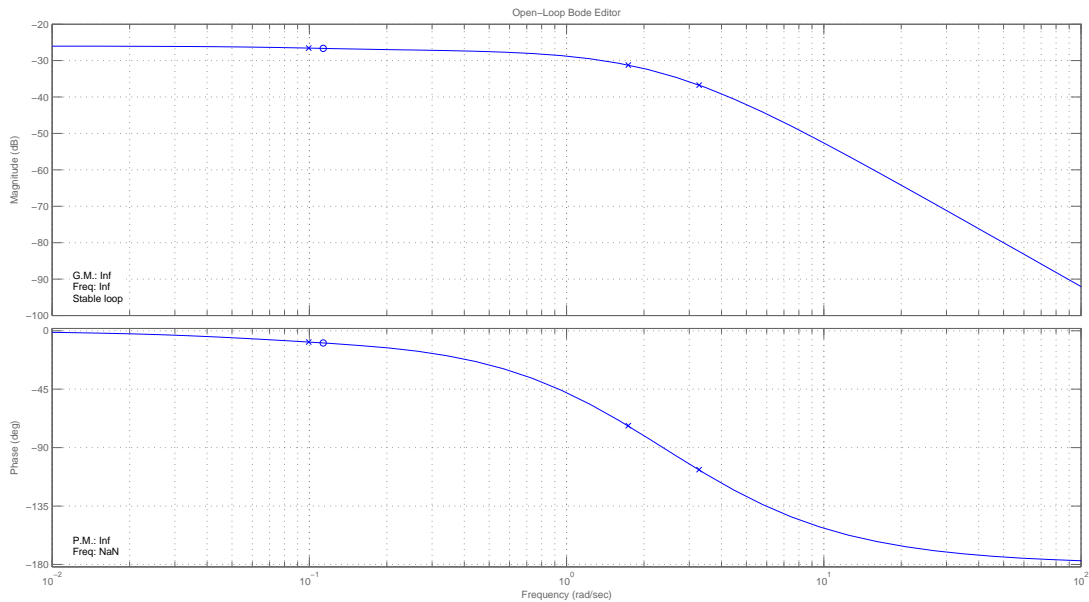


Figura 4: Diagramma di Bode della f.d.t. $G_{fd}(s)$.

E Il sistema risulta asintoticamente stabile con i valori numerici dati. Pertanto il progetto di un controllore che permetta al sistema complessivo di rispettare le specifiche può essere affrontato direttamente sui diagrammi di Bode (la $G_z(s)$ è anche a fase minima). Facendo riferimento al progetto di un controllore del tipo

$$C(s) = \frac{k_c}{s^t} \hat{C}(s), \text{ con } \hat{C}(0) = 1,$$

iniziamo con la scelta del *tipo* t e della costante di guadagno k_c del controllore basandoci sulle specifiche statiche.

- e1) La specifica impone un errore di inseguimento nullo per riferimenti costanti di ampiezza generica \bar{y} : a questo scopo è sufficiente un controllore di tipo “1”.

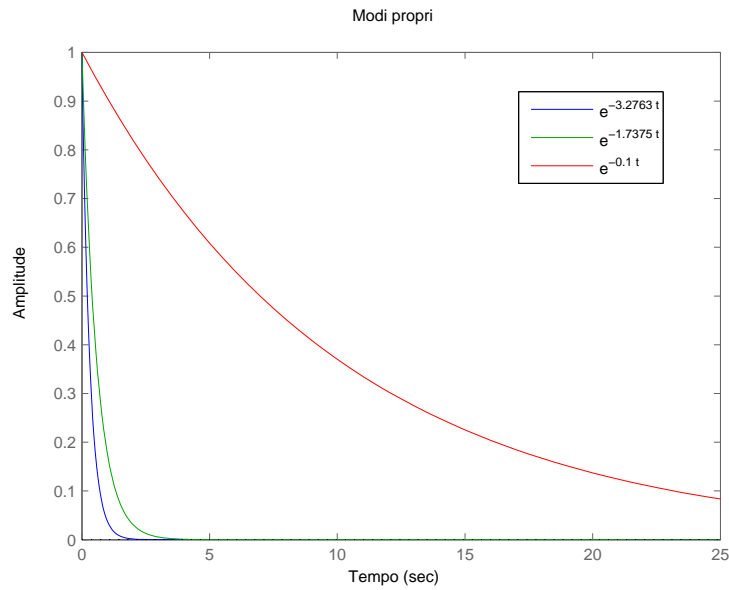


Figura 5: Modi propri del sistema: modi esponenziali negativi, ottenuti con il comando initial di Matlab.

Nella seconda parte della specifica, è richiesto un tempo di assestamento al 5% del valore di regime, pari a 0.05s, con sovraelongazione massima pari al 10% del valore di regime. Tentiamo di esaudire le specifiche sul tempo di assestamento e sulla sovraelongazione progettando un controllore che permetta di approssimare il sistema in anello chiuso con un modello a doppio polo dominante, cioè un sistema del secondo ordine, rispetto al quale le due specifiche si traducono come segue:

$$S_{\%} = 100 \exp\left(\frac{-\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}\right) \Rightarrow \delta \approx 0,6 \Rightarrow M_{\Phi} \approx 60^{\circ}$$

$$\omega_T = \frac{3}{\delta T_a} \Rightarrow \omega_T = 100 \text{ rad/s}$$

Il diagramma di Bode con i vincoli sulla pulsazione di taglio ω_T sono riportati in figura 6.

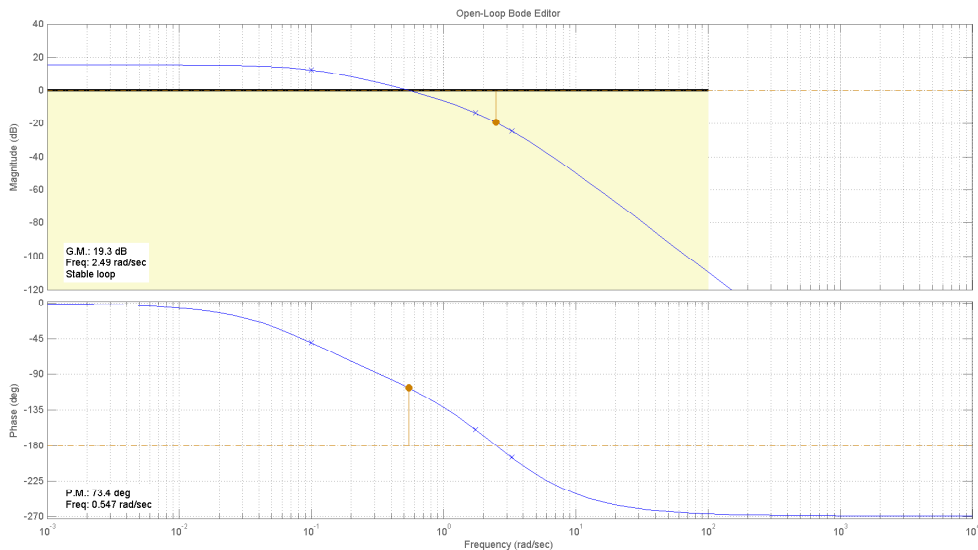


Figura 6: Diagramma di Bode della f.d.t. $G_z(s)$ con specifica sulla banda passante.

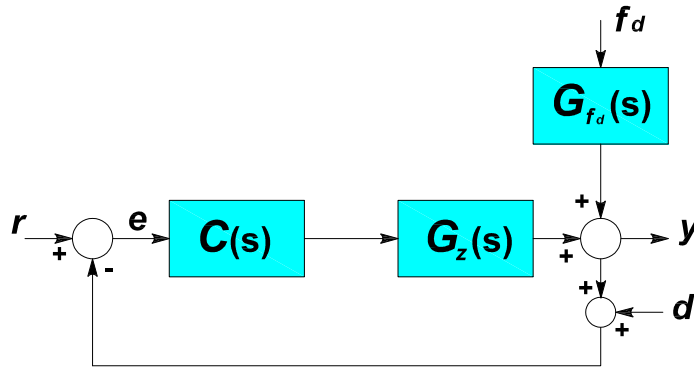


Figura 7: Schema a blocchi.

- e2) Affinchè l'effetto della componente costante \bar{f}_d del disturbo f_d sull'uscita sia completamente annullato è necessario che nella f.d.t. in anello aperto sia presente un polo nell'origine. Questa specifica è perciò automaticamente soddisfatta dal momento che la specifica statica richiede un errore a regime nullo (il controllore scelto è di tipo "1").

Consideriamo adesso la componente sinusoidale del disturbo f_d . Partendo dal presupposto che il sistema controllato a ciclo chiuso sarà asintoticamente stabile in seguito al progetto del controllore $C(s)$, è possibile applicare il teorema della risposta armonica. La funzione di trasferimento tra il disturbo f_d applicato al corpo di massa m e l'uscita y del sistema, cioè la posizione della massa stessa, è pari a (figura 7)

$$y(j\omega) = \frac{G_{f_d}(j\omega)}{1 + C(j\omega)G_z(j\omega)} \tilde{F}_d(j\omega) = \bar{G}(j\omega) \tilde{F}_d(j\omega).$$

Applicando quindi il teorema della risposta armonica

$$y(t) = |\bar{G}(j\omega)| F_d \sin(\omega_d t + \angle \bar{G}(j\omega)),$$

questa specifica è equivalente a richiedere che, per pulsazioni $\omega_d < 10$ rad/s, si abbia $|y(t)| < 0.001$ m. Facendo riferimento al caso peggiore, si consideri la valutazione cautelativa $|\sin(\omega_d t + \angle \bar{G}(j\omega))| = 1$ e, dal diagramma di Bode di G_{f_d} (figura 4) si prenda l'amplificazione massima nel range frequenziale considerato (pari al guadagno statico di G_{f_d} equivalente a 0.05 cioè -26.02 dB, rilevabile sui diagrammi di Bode o calcolabile esplicitamente imponendo $s = 0$ nella f.d.t. di $G_{f_d}(s)$). In questo caso la specifica richiede,

$$\left| \frac{0.2 \cdot G_{f_d}(j\omega)}{1 + C(j\omega)G_z(j\omega)} \right|_{\text{dB}} < -60 \text{ dB}.$$

Approssimando la $G_{f_d}(j\omega)$ a numeratore della relazione a primo membro con il valore che essa assume nel range di frequenze considerato, cioè con il suo guadagno statico, otteniamo

$$\left| \frac{0.2 \cdot 0.05}{1 + C(j\omega)G_z(j\omega)} \right|_{\text{dB}} < -60 \text{ dB}.$$

Perciò, per basse frequenze si cerca un guadagno elevato di $C(s)G_z(s)$ e quindi un controllore $C(s)$ tale per cui $\left| \frac{C(s)G_z(s)}{0.2 \cdot 0.05} \right|_{\text{dB}} > 60$ dB, o, equivalentemente

$$|C(s)G_z(s)| > 20 \text{ dB},$$

per pulsazioni inferiori a 10 rad/s. Il vincolo relativo a questa specifica è riportato esplicitamente nella fig. 8.

- F** L'ultimo quesito si riferisce ad un disturbo di misura. Sia quindi d il disturbo sul sensore di posizione e si indichi con

$$\Omega(s) = -\frac{C(s)G_z(s)}{1 + C(s)G_z(s)} D(s),$$

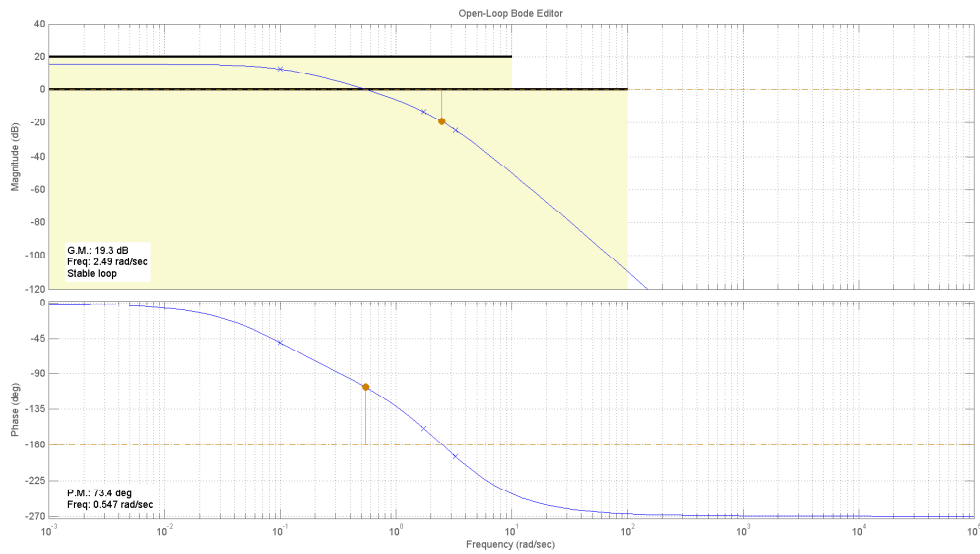


Figura 8: Diagramma di Bode della f.d.t. $G_z(s)$ con specifica sulla banda passante e sulla componente sinusoidale del disturbo di forza f_d applicato sul corpo di massa m .

la f.d.t. tra il disturbo di misura e l'uscita del sistema. Nella specifica analizzata in questo punto si richiede un basso guadagno della funzione d'anello $C(s)G_z(s)$ per pulsazioni superiori a circa 10^4 rad/s in modo che l'effetto sull'uscita sia inferiore a $\pm 0.3 \cdot 10^{-3}$ m quando il disturbo di misura è al suo massimo valore di 0.01 m. Questo si traduce, applicando il teorema della risposta armonica, in una richiesta di attenuazione del disturbo pari a circa 0.03, ossia

$$|C(s)G_z(s)| \leq -30 \text{ dB},$$

per pulsazioni maggiori o uguali a 10^4 rad/s. Le limitazioni relative a questa specifica sono riportate in figura 9

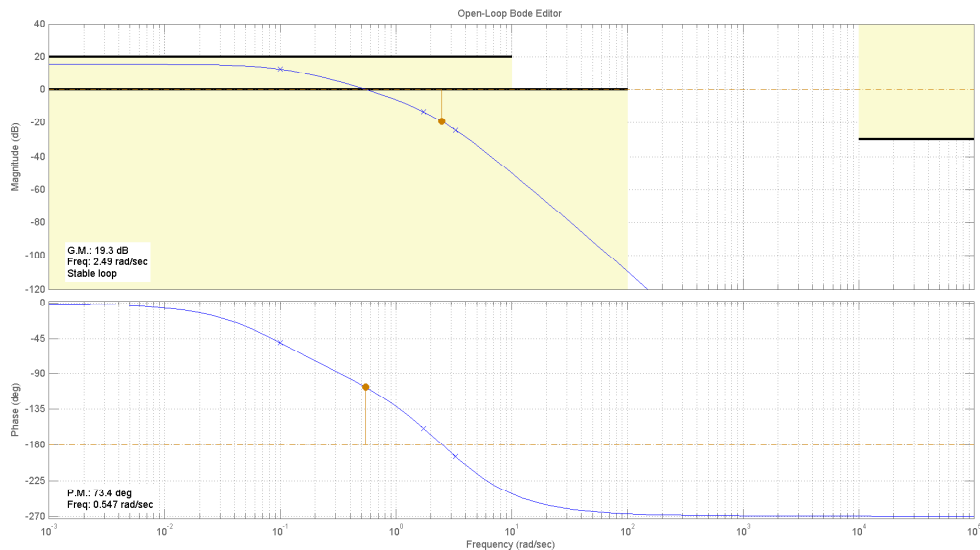


Figura 9: Diagramma di Bode della f.d.t. $G_z(s)$ con specifica sulla banda passante, sulla componente sinusoidale del disturbo di forza f_d sul corpo di massa m e sul disturbo di misura.

Progetto del controllore

Il diagramma di Bode della f.d.t. in anello aperto con un controllore parziale di guadagno $k_c = 1$, $\hat{C}(s) = 1$ e con un polo nell'origine necessario sia per garantire un errore a regime per riferimenti costanti pari a zero sia per annullare completamente l'effetto di ogni componente costante del disturbo di forza f_d sull'uscita, è riportato in figura 10. L'inserimento di due zeri in corrispondenza dei due poli della f.d.t.

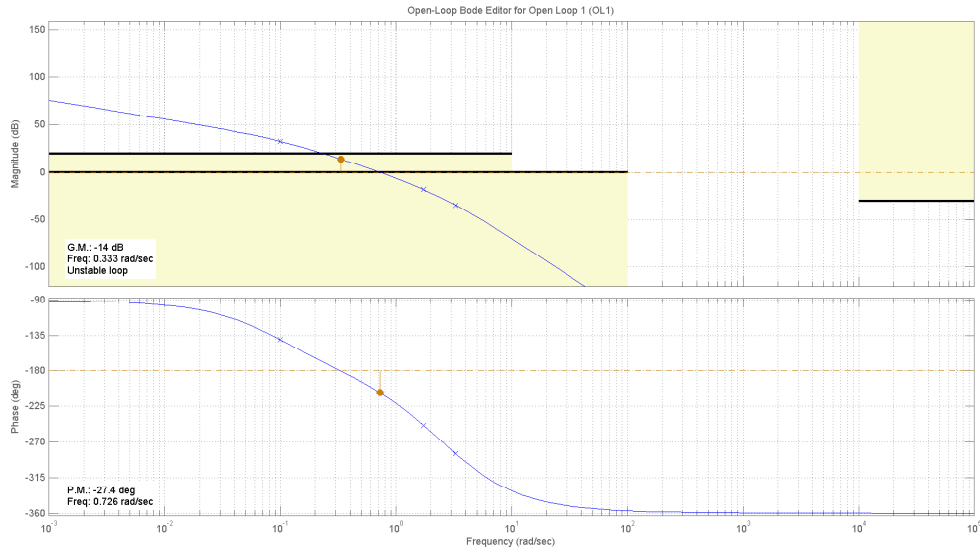


Figura 10: Diagramma di Bode risultante con controllore puramente proporzionale e $k_c = 1$.

$G_z(s)$ dell'impianto e un guadagno $k_c = 4194.55$ permettono un attraversamento dell'asse a 0 dB con una pendenza di -20 dB/dec oltre la pulsazione di taglio. In tal modo è rispettata la specifica sulla banda passante, quella sulla componente sinusoidale del disturbo f_d e quella sul disturbo di misura. Tuttavia non risulta rispettata la specifica sul margine di fase che deve essere almeno pari a 60° (figura 11). Per riuscire

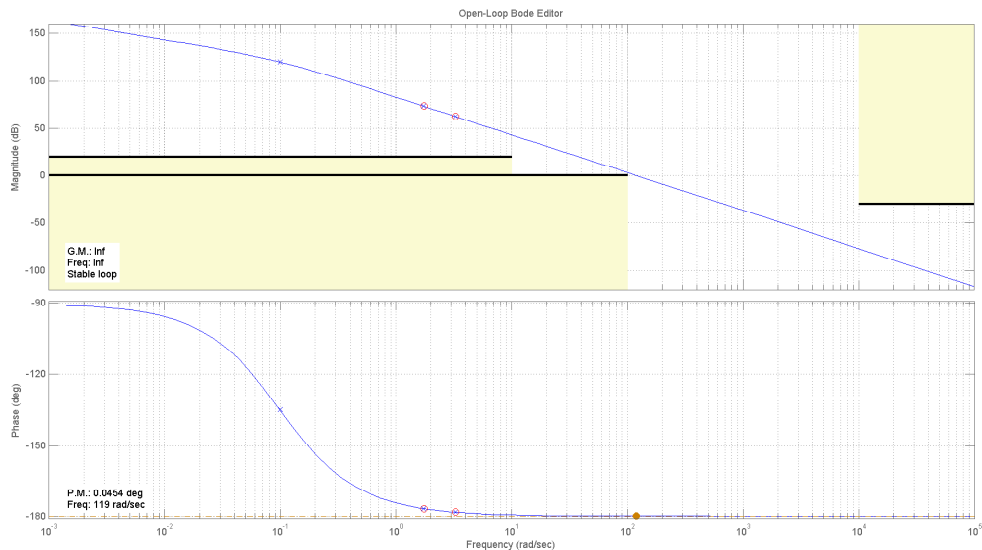


Figura 11: Diagramma di Bode risultante con controllore parziale $C_1(s) = 4194.55 \frac{(s+3.279)(s+1.74)}{s}$.

a soddisfare anche la specifica sul margine di fase, è necessario l'inserimento di un'azione anticipatrice. Il polo in -220.8 e lo zero in -0.6434 costituiscono di fatto la rete anticipatrice necessaria allo scopo. Infine, l'aggiunta del polo in alta frequenza permette di ottenere un controllore causale, necessario per la realizzabilità del controllore stesso. Una possibile soluzione per il controllore $C(s)$ è, in definitiva, la

seguinte

$$C(s) = 387721731.42 \frac{(s + 3.279)(s + 1.74)(s + 0.6434)}{s(s + 220.8)(s + 4.3 \cdot 10^4)}$$

Il diagramma di Bode della funzione di trasferimento in anello aperto è riportato in fig. 12.

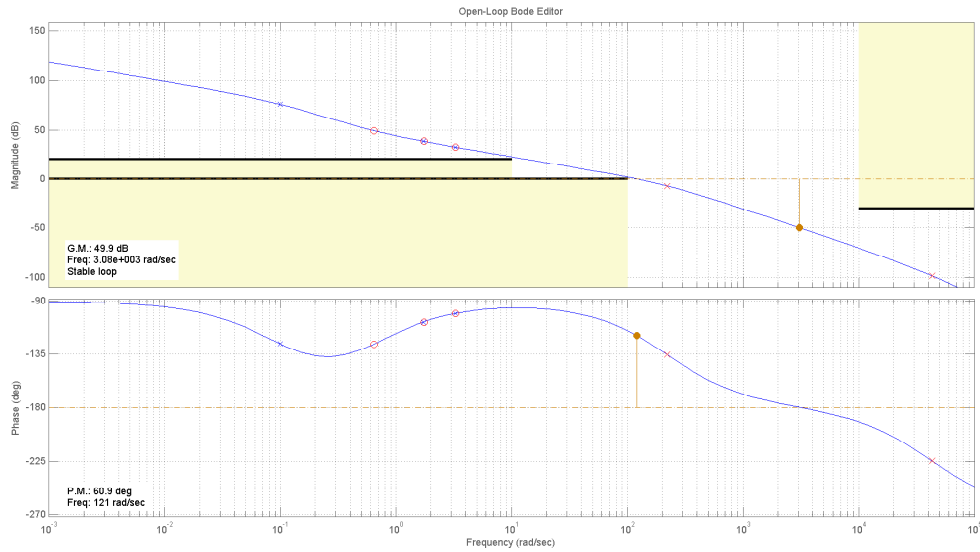


Figura 12: Diagramma di Bode risultante dal progetto della f.d.t. d'anello $C(s)G_z(s)$.

In figura 13 è riportato il diagramma di Bode del sistema controllato. Come si può notare dalla figura 14, dove è riportata la risposta al gradino del sistema controllato, il tentativo di ottenere un sistema a ciclo chiuso del secondo ordine è riuscito e la risposta stessa presenta un tempo di assestamento inferiore a quello desiderato.

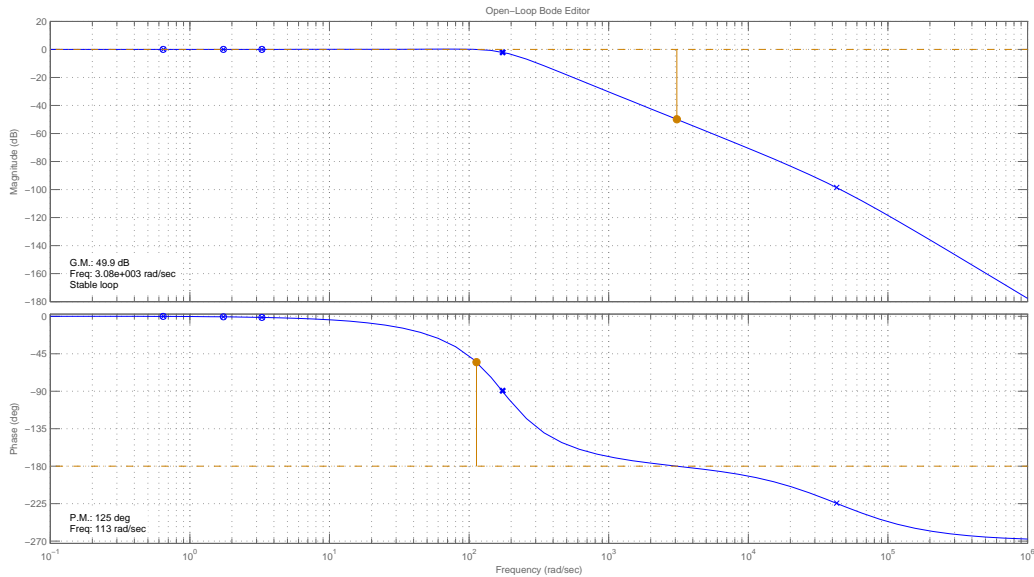


Figura 13: Diagramma di Bode del sistema controllato in anello chiuso.

Nella figura 15 è inoltre riportata la risposta del sistema controllato nel caso in cui, come da specifica, il disturbo di forza f_d sia la somma di una componente costante e di una di tipo sinusoidale con pulsazione inferiore o uguale a $\omega = 10$ rad/s. Il grafico può essere ottenuto da Matlab utilizzando il comando `lsim` ed impostando un ingresso costituito da una componente costante di valore pari a 0.1 N e di una sinusoidale

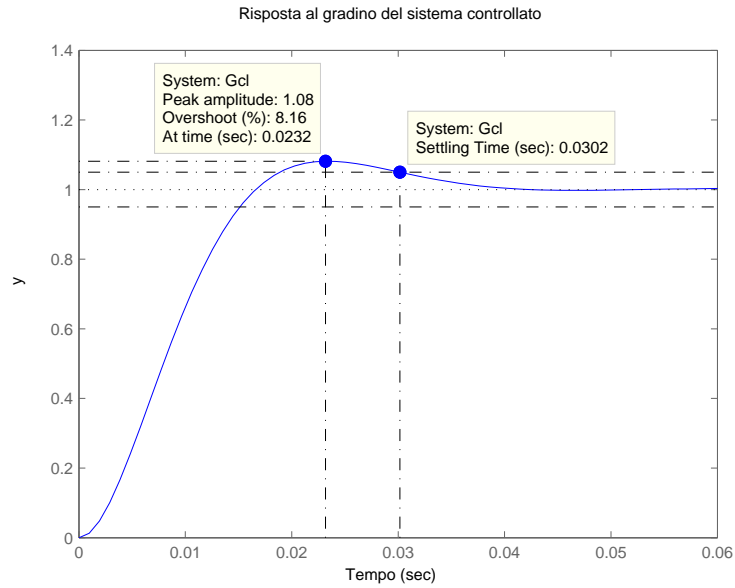


Figura 14: Risposta al gradino del sistema controllato in anello chiuso.

di pulsazione desiderata ed ampiezza 0.2 N. Il sistema al quale l'ingresso è applicato ha come funzione di trasferimento $G_{fd}(s)/(1 + C(s)G_z(s))$. Nella figura 16 è invece riportata la risposta del sistema

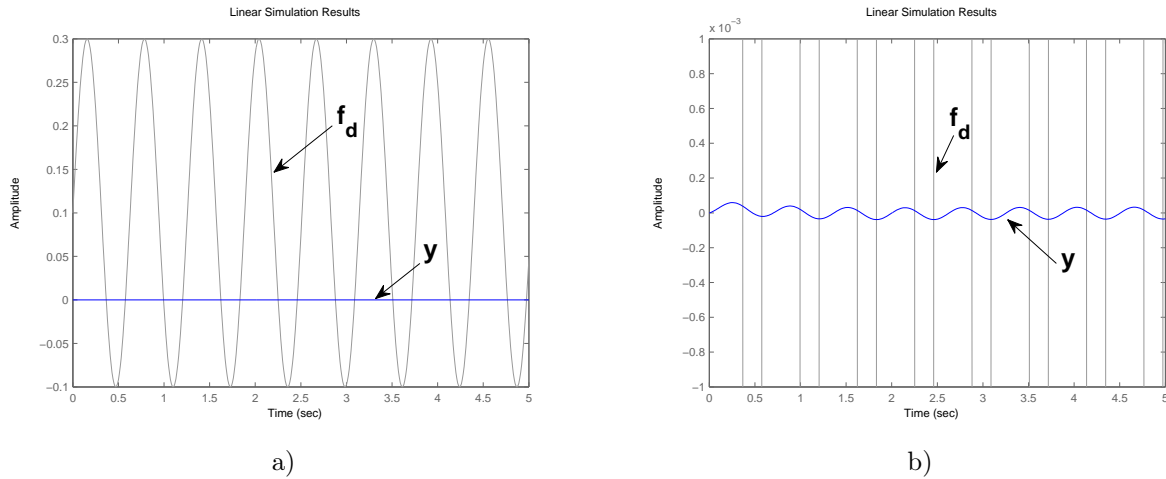
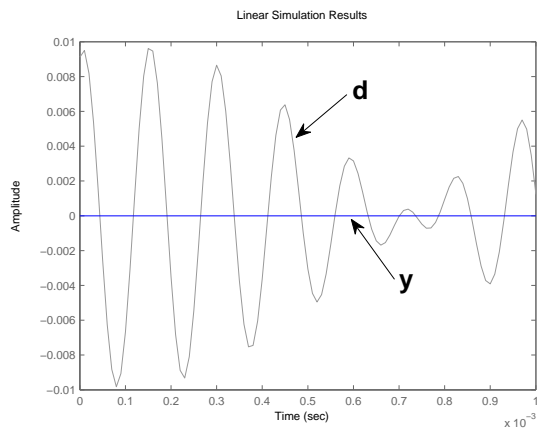


Figura 15: Risposta del sistema controllato ad un segnale $f_d(t) = 0.1 + 0.2 \sin(10t)$ applicato come disturbo di forza sul corpo di massa m (a) e relativo zoom (b).

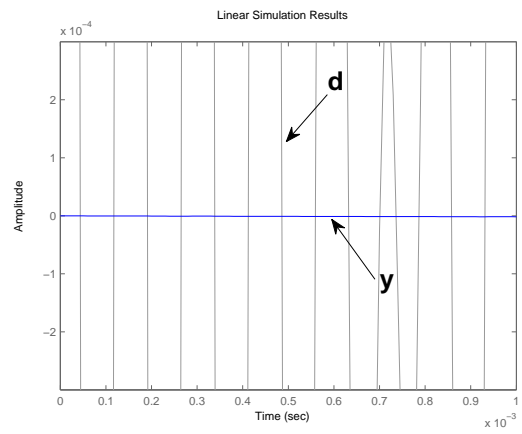
controllato nel caso in cui, come da specifica, l'errore sulla misura dell'uscita sia di tipo sinusoidale con pulsazione maggiore o uguale a $\omega = 10^4$ rad/s. Il grafico può essere ottenuto da Matlab utilizzando il comando lsim ed impostando un disturbo

$$\nu(t) = \frac{0,01}{\sum_{i=1}^3 \nu_i} \left(\nu_1 \sin(4.2 \cdot 10^4 t) + \nu_2 \cos(4 \cdot 10^4 t) + \sin\left(4.5 \cdot 10^4 + \frac{\pi i}{3}\right) \right)$$

dove le ampiezze sono $\nu_1 = 0.0357$, $\nu_2 = 0.8491$ e $\nu_3 = 0.9340$. Il sistema al quale l'ingresso è applicato ha come funzione di trasferimento $-C(s)G_z(s)/(1 + C(s)G_z(s))$.



a)



b)

Figura 16: Risposta del sistema controllato ad un segnale sinusoidale applicato come disturbo di misura (a) e relativo zoom (b).