

**Quesito 1**

Si consideri il reattore continuo perfettamente miscelato (CSTR) in figura 1, nel quale avviene la reazione esotermica irreversibile  $A \rightarrow B$ . Il reattore è raffreddato mediante un fluido refrigerante circolante

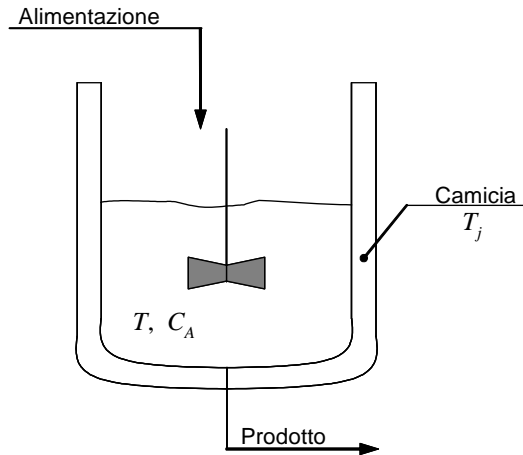


Figura 1: Modello del sistema.

in una camicia esterna. Facendo le assunzioni di miscelazione perfetta e volume costante, il reattore può essere descritto dalle seguenti equazioni differenziali:

$$\begin{aligned} \dot{C}_A &= \frac{F}{V} (C_{Af} - C_A) - k_0 C_A \exp\left(\frac{-\Delta E}{RT}\right) \\ \dot{T} &= \frac{F}{V} (T_f - T) + \left(\frac{-\Delta H}{\rho c_p}\right) k_0 C_A \exp\left(\frac{-\Delta E}{RT}\right) - \frac{UA}{V\rho c_p} (T - T_j), \end{aligned}$$

dove  $C_A$  è la concentrazione della specie A nel reattore,  $T$  è la temperatura del reattore e  $T_j$  (variabile di controllo) è la temperatura del fluido nella camicia. I parametri del modello hanno il seguente significato:  $F$  è la portata volumetrica di alimentazione,  $V$  il volume del reattore,  $C_{Af}$  la concentrazione di A nel flusso di alimentazione,  $k_0$  è il coefficiente pre-esponenziale,  $\Delta E$  è l'energia di attivazione della reazione,  $R$  è la costante universale di gas,  $T_f$  la temperatura di alimentazione,  $-\Delta H$  il calore di reazione,  $\rho$  la densità del composto A-B,  $c_p$  la capacità termica del composto A-B,  $U$  il coefficiente di trasferimento termico e  $A$  l'area di scambio termico. Si dispone della misura della temperatura del reattore  $T$ .

- 1.A Si linearizzi il sistema intorno all'equilibrio generico  $\bar{C}_A$ ,  $\bar{T}$  e relativo controllo di equilibrio  $\bar{T}_j$ ;
- 1.B Dati i seguenti valori numerici per i parametri:  $\frac{F}{V} = 1 \text{ h}^{-1}$ ,  $k_0 = 9703 \cdot 3600 \text{ h}^{-1}$ ,  $-\Delta H = 5960 \text{ kcal/kgmol}$ ,  $\Delta E = 11843 \text{ kcal/kgmol}$ ,  $\rho c_p = 500 \text{ kcal}/(\text{m}^3 \text{ K})$ ,  $T_f = 298 \text{ K}$ ,  $C_{Af} = 10 \text{ kgmol}/\text{m}^3$ ,  $\frac{UA}{V} = 150 \text{ kcal}/(\text{m}^3 \text{ K h})$ ,  $R = 1.987 \text{ kcal}/(\text{kgmol K})$ ; e per l'equilibrio:  $\bar{C}_A = 5.518 \text{ kgmol}/\text{m}^3$ ,  $\bar{T} = 339.1 \text{ K}$ ,  $\bar{T}_j = 298 \text{ K}$ , si valuti la stabilizzabilità del sistema e si progetti un compensatore, che, usando solo la misura della uscita, stabilizzi asintoticamente il sistema nell'equilibrio dato;
- 1.C Si effettui una simulazione del sistema a ciclo chiuso ottenuto connettendo il controllore con il modello non lineare del sistema;
- 1.D Supponendo di avere accesso all'intero stato, si progetti un controllore alla Lyapunov in grado di rendere l'equilibrio globalmente asintoticamente stabile;  
*Suggerimento:* si rammenta che il  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha + \beta \exp(\frac{-\alpha}{\delta+x})}{x}$  esiste finito.
- 1.E Si effettui una simulazione del sistema a ciclo chiuso ottenuto connettendo il controllore alla Lyapunov con il modello non lineare del sistema.

## Soluzione

**1.A** Le equazioni del sistema non lineare in variabili di stato traslate  $\tilde{x} = [\tilde{x}_1, \tilde{x}_2]^T = [C_A - \bar{C}_A, T - \bar{T}]^T$  e controllo traslato  $\tilde{u} = T_j - \bar{T}_j$ , sono le seguenti:

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}}_1 &= \frac{F}{V} (C_{Af} - \tilde{x}_1 - \bar{C}_A) - k_0 (\tilde{x}_1 + \bar{C}_A) \exp\left(\frac{-\Delta E}{R(\tilde{x}_2 + \bar{T})}\right) \\ \dot{\tilde{x}}_2 &= \frac{F}{V} (T_f - \tilde{x}_2 - \bar{T}) + \left(\frac{-\Delta H}{\rho c_p}\right) k_0 (\tilde{x}_1 + \bar{C}_A) \exp\left(\frac{-\Delta E}{R(\tilde{x}_2 + \bar{T})}\right) - \frac{UA}{V\rho c_p} (\tilde{x}_2 + \bar{T} - \tilde{u} - \bar{T}_j).\end{aligned}$$

Il sistema linearizzato nell'origine delle nuove variabili è il seguente:

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}} &= A\tilde{x} + B\tilde{u} \\ \tilde{y} &= C\tilde{x},\end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned}A &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, & B &= \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{UA}{V\rho c_p} \end{bmatrix}, \\ C &= [0 \quad 1],\end{aligned}$$

ove

$$\begin{aligned}a_{11} &= -\frac{F}{V} - k_0 \exp\left(\frac{-\Delta E}{R\bar{T}}\right) \\ a_{12} &= -k_0 \bar{C}_A \frac{\Delta E}{R\bar{T}^2} \exp\left(\frac{-\Delta E}{R\bar{T}}\right) \\ a_{21} &= \left(\frac{-\Delta H}{\rho c_p}\right) k_0 \exp\left(\frac{-\Delta E}{R\bar{T}}\right) \\ a_{22} &= -\frac{F}{V} - \frac{UA}{V\rho c_p} + \left(\frac{-\Delta H}{\rho c_p}\right) k_0 \bar{C}_A \frac{\Delta E}{R\bar{T}^2} \exp\left(\frac{-\Delta E}{R\bar{T}}\right).\end{aligned}$$

**1.B** Sostituendo i valori numerici, si ottengono le seguenti matrici per il sistema linearizzato:

$$\begin{aligned}A &= \begin{bmatrix} -1.8124 & -0.2324 \\ 9.6837 & 1.4697 \end{bmatrix}, & B &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0.3 \end{bmatrix} \\ C &= [0 \quad 1].\end{aligned}$$

Gli autovalori di  $A$  sono  $-0.8369$  e  $0.4942$ . Il sistema è quindi esponenzialmente instabile. È facile verificare che il sistema è completamente raggiungibile

$$R = [B \quad AB] = \begin{bmatrix} 0 & -0.0697 \\ 0.3 & 0.4409 \end{bmatrix},$$

quindi sicuramente stabilizzabile. Altrettanto facilmente si verifica la sua completa osservabilità. Possiamo progettare un compensatore basato su regolatore, in modo da rendere il sistema asintoticamente stabile nell'equilibrio specificato. Calcoliamo la matrice  $K$  di retroazione degli stati in modo da allocare i poli del sistema a ciclo chiuso, cioè gli autovalori della matrice  $A - BK$ , in  $p = [-2 \quad -5]$ . Utilizzando la funzione di Matlab  $K = \text{place}(A, B, p)$ , si ottiene:

$$K = [23.7002 \quad 22.191].$$

Poiché non si ha accesso a tutte le variabili di stato ma il sistema risulta completamente osservabile dall'uscita  $\tilde{y} = T - \bar{T}$ , si può realizzare un osservatore di Luenberger per ricostruire lo stato. La matrice  $L$  di iniezione delle uscite è calcolata in modo che la matrice dinamica dello stimatore  $A - LC$  abbia autovalori  $q = 2p$ . Sempre impiegando il comando Matlab  $L = \text{transpose}(\text{place}(A', C', q))$  si ottiene:

$$L = \begin{bmatrix} 1.6173 \\ 13.6573 \end{bmatrix}.$$

Il compensatore basato sul regolatore appena progettato ha dinamica  $K(sI - A + BK + LC)^{-1}L$  e si costruisce con il comando  $\text{rsys} = \text{ss}(A - B*K - L*C, L, K, 0)$  ovvero, a meno di un segno, con  $\text{rsys} = \text{reg}(\text{sys}, K, L)$ , ove  $\text{sys} = \text{ss}(A, B, C, 0)$ .

1.C Uno schema Simulink del sistema stabilizzato, rappresentato rispetto a variabili traslate, è riportato in figura 2.

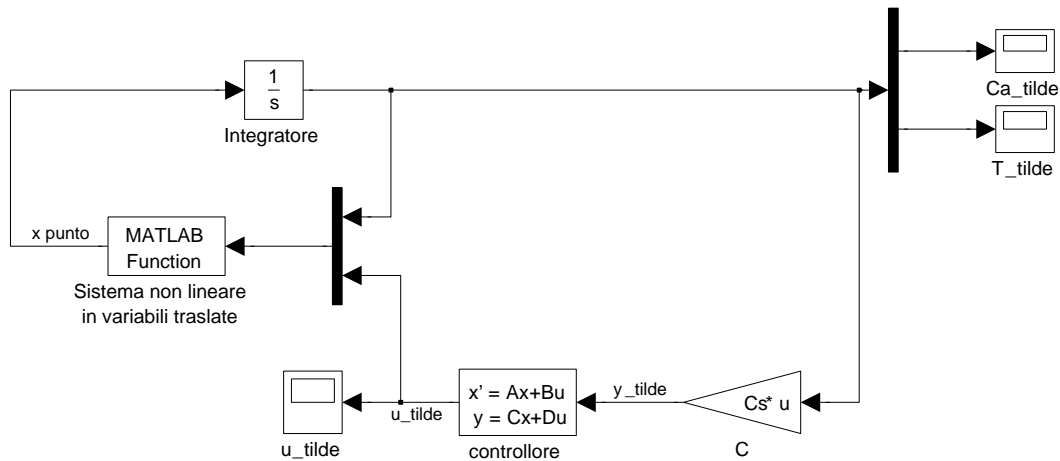


Figura 2: Schema Simulink del sistema non lineare stabilizzato con controllore lineare. Il sistema è rappresentato rispetto a variabili traslate.

Il blocco Simulink `Sistema non lineare in variabili traslate` contiene la seguente funzione:

```
function out = SistemaNONLineare(in)

% Ingressi del blocco
x1_tilde = in(1);
x2_tilde = in(2);
u_tilde = in(3);

% Costanti del sistema e punto di equilibrio
ParametriSistema;

% Dinamica del sistema
dot_x1_tilde = FoverV*(Caf-x1_tilde-Cabar)-k0*exp(-DeltaE/(R*(x2_tilde+Tbar)))* ...
    (x1_tilde+Cabar);
dot_x2_tilde = FoverV*(Tf-x2_tilde-Tbar)+(mDeltaH/rho_cp)* ...
    k0*exp(-DeltaE/(R*(x2_tilde+Tbar)))*(x1_tilde+Cabar)- ...
    U_AoverV/rho_cp*(x2_tilde+Tbar-Tjbar-u_tilde);

% Uscite del blocco
out(1) = dot_x1_tilde;
out(2) = dot_x2_tilde;
```

dove lo *script* `ParametriSistema` contiene i valori numerici di tutti i parametri del sistema e il punto di equilibrio. Il blocco `controllore` contiene le matrici del regolatore precedentemente progettato. Per valutare il controllore lineare, consideriamo l'evoluzione del sistema a ciclo chiuso a partire da condizioni iniziali  $[\tilde{C}_A, \tilde{T}]^T = [\tilde{x}_1, \tilde{x}_2]^T = [1, -15]^T$ . Le figure 3 e 4 riportano l'andamento dello scostamento dal punto di equilibrio delle variabili  $C_A$  e  $T$  rispettivamente.

Nella figura 5, invece, è riportato l'andamento della temperatura della camicia  $T_j$  rispetto al suo valore di equilibrio.

1.D Per progettare un controllore alla Lyapunov facciamo uso della candidata  $V = \frac{1}{2} (\tilde{x}_1^2 + \tilde{x}_2^2)$ , che è radialmente illimitata. Ricordando che  $\dot{V} = L_f V + L_g V \tilde{u}$ , cerchiamo di progettare  $\tilde{u}$  in modo che  $\dot{V}$  risulti definita negativa.

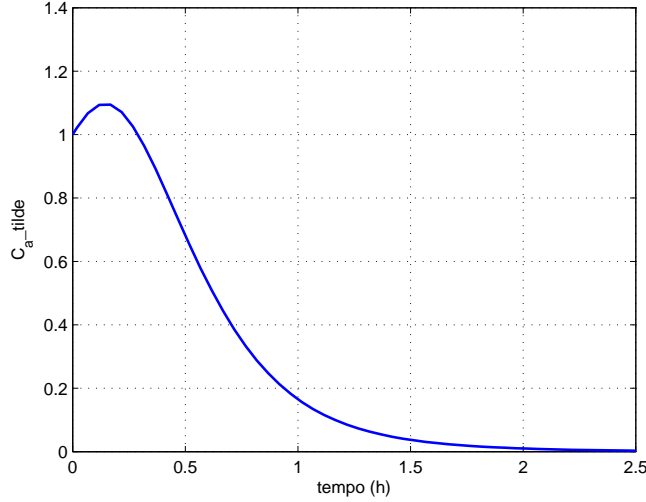


Figura 3: Andamento dello scostamento di  $C_A$  rispetto al valore di equilibrio.

Nel nostro caso, riordinando opportunamente i termini, si ha  $L_f V = - \left( \frac{F}{V} + k_0 \exp \left( \frac{-\Delta E}{R(\tilde{x}_2 + \bar{T})} \right) \right) \tilde{x}_1^2 - \left( \frac{F}{V} + \frac{UA}{V\rho c_p} \right) \tilde{x}_2^2 + \alpha(\tilde{x}_2)\tilde{x}_1 + \beta(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)\tilde{x}_2$  con  $\alpha(\tilde{x}_2) = \left( \frac{F}{V} (C_{Af} - \bar{C}_A) - k_0 \bar{C}_A \exp \left( \frac{-\Delta E}{R(\tilde{x}_2 + \bar{T})} \right) \right)$  e  $\beta(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = \left( \frac{F}{V} (T_f - \bar{T}) + \left( \frac{-\Delta H}{\rho c_p} \right) k_0 (\tilde{x}_1 + \bar{C}_A) \exp \left( \frac{-\Delta E}{R(\tilde{x}_2 + \bar{T})} \right) - \frac{UA}{V\rho c_p} (\bar{T} - \bar{T}_j) \right)$  e  $L_g V = \frac{UA}{V\rho c_p} \tilde{x}_2$ . Si fa notare che il termine  $\frac{F}{V} + k_0 \exp \left( \frac{-\Delta E}{R(\tilde{x}_2 + \bar{T})} \right)$  risulta essere sempre positivo.  $L_f V$  ha, quindi, già dei termini utili per la costruzione di una  $\dot{V}$  definita negativa. Procederemo eliminando solo i termini che la renderebbero non definita. La legge di controllo sarà dunque:

$$\tilde{u} = - \frac{\alpha(\tilde{x}_2)\tilde{x}_1 + \beta(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)\tilde{x}_2}{L_g V}.$$

È importante sottolineare che la precedente legge di controllo è ben definita anche nell'origine poiché

$$\lim_{\tilde{x}_2 \rightarrow 0} \frac{\alpha(\tilde{x}_2)}{\tilde{x}_2}$$

esiste finito (come ricordato nel suggerimento). La  $\dot{V}$  risulta quindi definita negativa:

$$\dot{V} = - \left( \frac{F}{V} + k_0 \exp \left( \frac{-\Delta E}{R(\tilde{x}_2 + \bar{T})} \right) \right) \tilde{x}_1^2 - \left( \frac{F}{V} + \frac{UA}{V\rho c_p} \right) \tilde{x}_2^2,$$

e il sistema a ciclo chiuso asintoticamente globalmente (nell'intervallo di validità del modello) stabile.

**1.E** Uno schema Simulink del sistema stabilizzato con il controllore alla Lyapunov è riportato in figura 6.

Il blocco Simulink **Sistema non lineare** è identico a quello del precedente schema, mentre il blocco **controllore Lyapunov** contiene la seguente funzione:

```
function out = ControlloreLyapunov(in)

% Ingressi del blocco
x1_tilde = in(1);
x2_tilde = in(2);
```

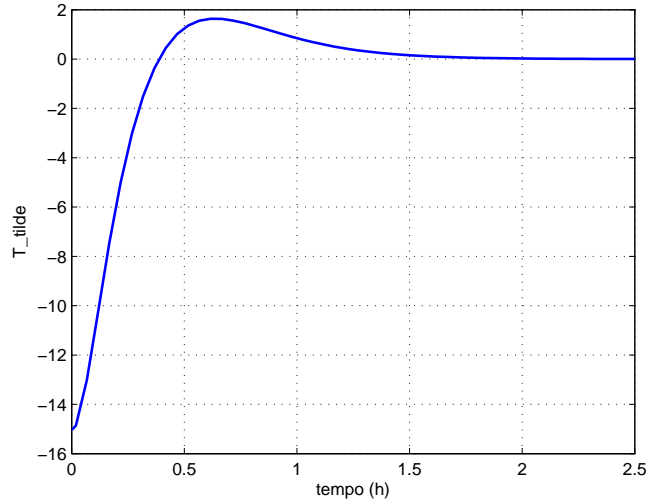


Figura 4: Andamento dello scostamento di  $T$  rispetto al valore di equilibrio.

```
% Costanti del sistema e punto di equilibrio
ParametriSistema;

% Uscita del sistema traslata
u_tilde = Tbar - Tjbar - inv(U_AoverV/rho_cp)*(FoverV*(Tf-Tbar)+ ...
    (mDeltaH/rho_cp)*k0*exp(-DeltaE/(R*(x2_tilde+Tbar)))* ...
    (x1_tilde+Cabar)+(FoverV*(Caf-Cabar)-k0* ...
    Cabar*exp(-DeltaE/(R*(x2_tilde+Tbar))))/x2_tilde*x1_tilde);

% Uscite del blocco
out = u_tilde;
```

Per valutare l'andamento del controllore alla Lyapunov consideriamo l'evoluzione del sistema a ciclo chiuso a partire da condizioni iniziali  $[\tilde{C}_A, \tilde{T}]^T = [\tilde{x}_1, \tilde{x}_2]^T = [1, -15]^T$ . Le figure 7 e 8 riportano l'andamento dello scostamento dal punto di equilibrio delle variabili  $C_A$  e  $T$  rispettivamente.

Nella figura 9, invece, è riportato l'andamento della temperatura della camicia  $T_j$  rispetto al suo valore di equilibrio.

Il comportamento dei due sistemi a ciclo chiuso (con il controllore lineare e con il controllore alla Lyapunov) è sostanzialmente analogo. Le differenze che si possono notare nella prontezza e nella sovralongazione dipendono dalla specificità del progetto e possono essere alterate da progetti differenti. In particolare, entrambi i controllori risultano avere una RAS estesa all'intero spazio di validità del modello. Nel caso del controllore alla Lyapunov tale risultato è dovuto alla scelta di una funzione radialmente illimitata e alla successiva procedura di progettazione. Nel caso del controllore lineare, invece, si può giungere a tale conclusione per via simulativo-grafica. Il sistema senza controllo, infatti, ha dimensione 2 ed è quindi possibile darne una rappresentazione efficace nello spazio delle fasi. È possibile, cioè, tracciare il grafico dell'evoluzione del sistema controllato a partire da diverse condizioni iniziali e dedurne informazioni circa l'estensione della RAS. In figura 10 si riportano gli andamenti, nello spazio delle fasi, dell'evoluzione del sistema a ciclo chiuso con il controllore lineare, mentre in figura 11 quelli relativi al sistema con il controllore alla Lyapunov. Si nota come l'unico equilibrio presente sia quello nell'origine. Entrambi i controllori hanno alterato le caratteristiche del sistema originale cancellando gli altri due equilibri presenti (asintoticamente stabili), rendendo quello nell'origine (punto di sella) asintoticamente stabile ed estendendone il bacino di attrazione a tutto lo spazio. Si confrontino, a tal fine, i precedenti grafici con quello dello spazio delle fasi del sistema senza controllo (figura 12).

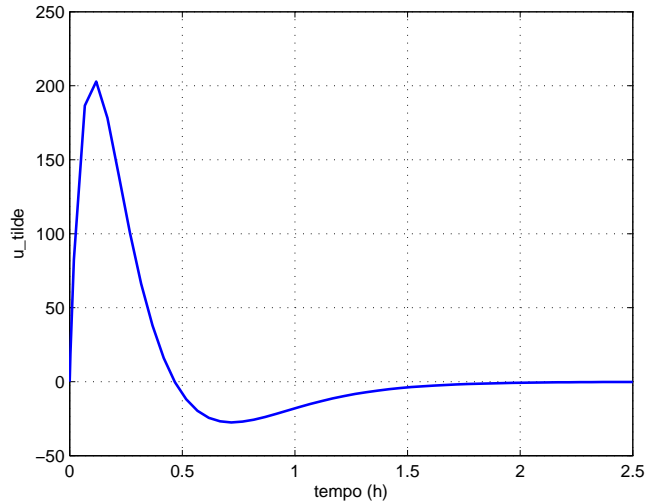


Figura 5: Andamento della temperatura della camicia  $T_j$  rispetto al suo valore di equilibrio.

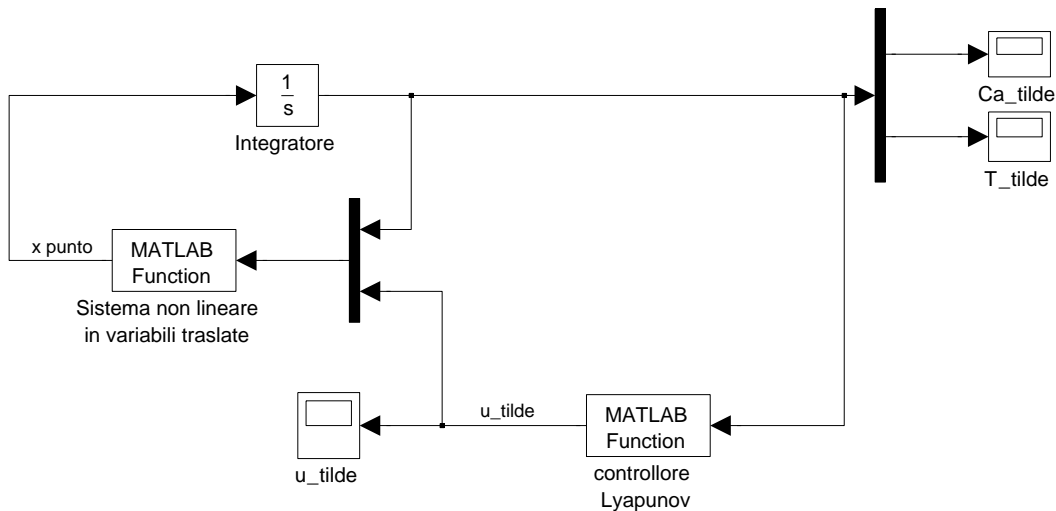


Figura 6: Schema Simulink del sistema non lineare stabilizzato con controllore alla Lyapunov.

È importante sottolineare che il sistema a ciclo chiuso con il controllore lineare ha dimensione 4 per via della dinamica del controllore. Il grafico delle evoluzioni è relativo alle sole variabili di stato del sistema ( $\tilde{C}_A, \tilde{T}$ ) ed è stato realizzato a partire da condizioni iniziali nulle per lo stato del controllore. L'intersezione reciproca di alcune traiettorie non rappresenta una violazione dell'unicità della soluzione delle equazioni differenziali in oggetto, ma è giustificata dall'aver rappresentato solo 2 delle 4 variabili. Lo spazio delle fasi è in questo caso il risultato di una proiezione nel sottospazio  $\tilde{C}_A, \tilde{T}$ .

I grafici precedenti possono essere disegnati impiegando gli schemi Simulink già realizzati per simulare il sistema a ciclo chiuso a partire da un insieme dato di condizioni iniziali. Si può ad esempio definire una cornice di punti iniziali equispaziati e invocare, per ognuno di essi, lo schema Simulink del sistema. Un esempio di *script* in grado di produrre il grafico del sistema con il controllore di Lyapunov è il seguente:

```
% Inizializzazione cornice di condizioni iniziali
xmin = -5;
xmax = 5;
```

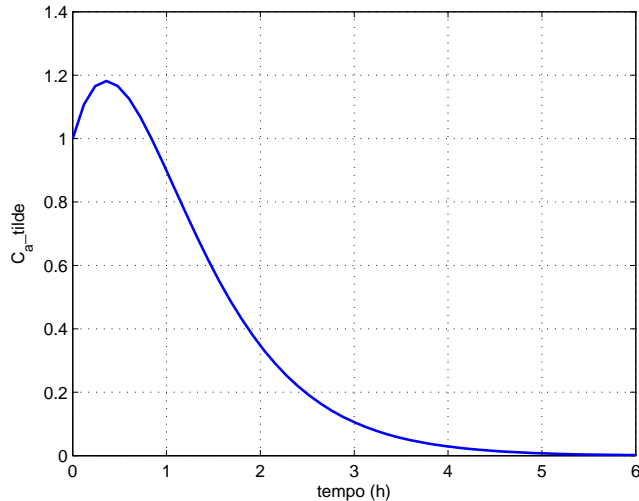


Figura 7: Andamento dello scostamento di  $C_A$  rispetto al valore di equilibrio.

```

ymin = -120;
ymax = 120;
Nx = 10;
Ny = 40;
stepx = (xmax-xmin)/(Nx-1);
stepy = (ymax-ymin)/(Ny-1);

xx = xmin:stepx:xmax;
yy = ymin:stepy:ymax;

% Vettore di condizioni iniziali
TotInitCond = [xx xx xmin*ones(1,Ny-2) xmax*ones(1,Ny-2);
               ymin*ones(1,Nx) ymax*ones(1,Nx) yy(2:end-1) yy(2:end-1)];

figure;
hold on
for i = 1 : 2*(Nx-1)+2*(Ny-1)
    myoptions = simset('InitialState',TotInitCond(:,i));
    [time,curves] = sim('SistemaNonLineareLyapunov',6,myoptions);
    plot(curves(:,1),curves(:,2),'LineWidth',.75);
end
hold off;
grid;
xlabel('C_A\tilde');
ylabel('T\tilde');

```

La variabile `TotInitCond` contiene l'intera cornice di condizioni iniziali. In un ciclo `for` si estrae da essa la singola condizione iniziale e si costruisce una struttura, chiamata `myoptions`, con il comando `simset`, impostandone la proprietà `InitialState` a tale valore. Tale struttura servirà a fornire la condizione iniziale allo schema Simulink `SistemaNonLineareLyapunov` invocato dal comando `[time,curves] = sim('SistemaNonLineareLyapunov',6,myoptions)`. Tale comando effettuerà la simulazione del sistema per un tempo pari a 6 unità temporali nella scala definita dalle equazioni del sistema (ore in questo caso) e fornirà nella variabile `time` il vettore degli istanti temporali e in `curves` il valore delle due variabili di stato in ogni stante temporale.

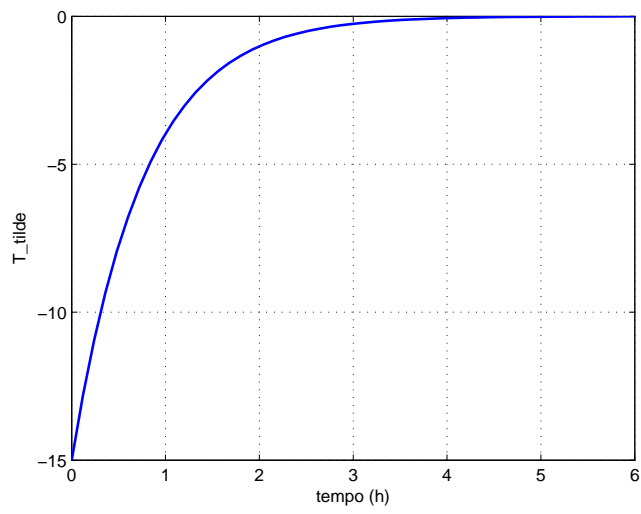


Figura 8: Andamento dello scostamento di  $T$  rispetto al valore di equilibrio.

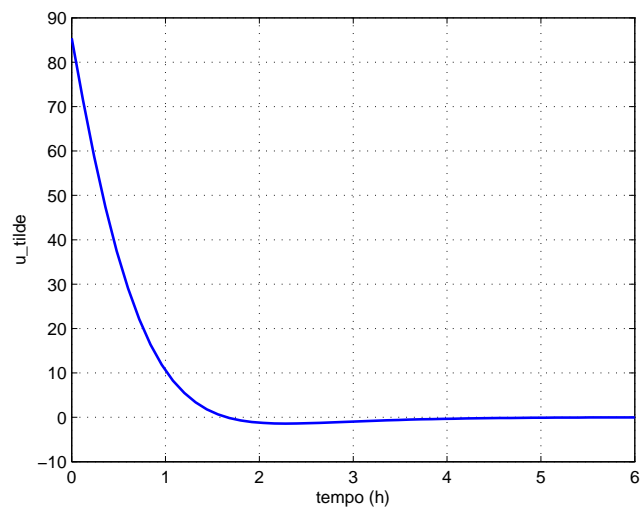


Figura 9: Andamento della temperatura della camicia  $T_j$  rispetto al suo valore di equilibrio.



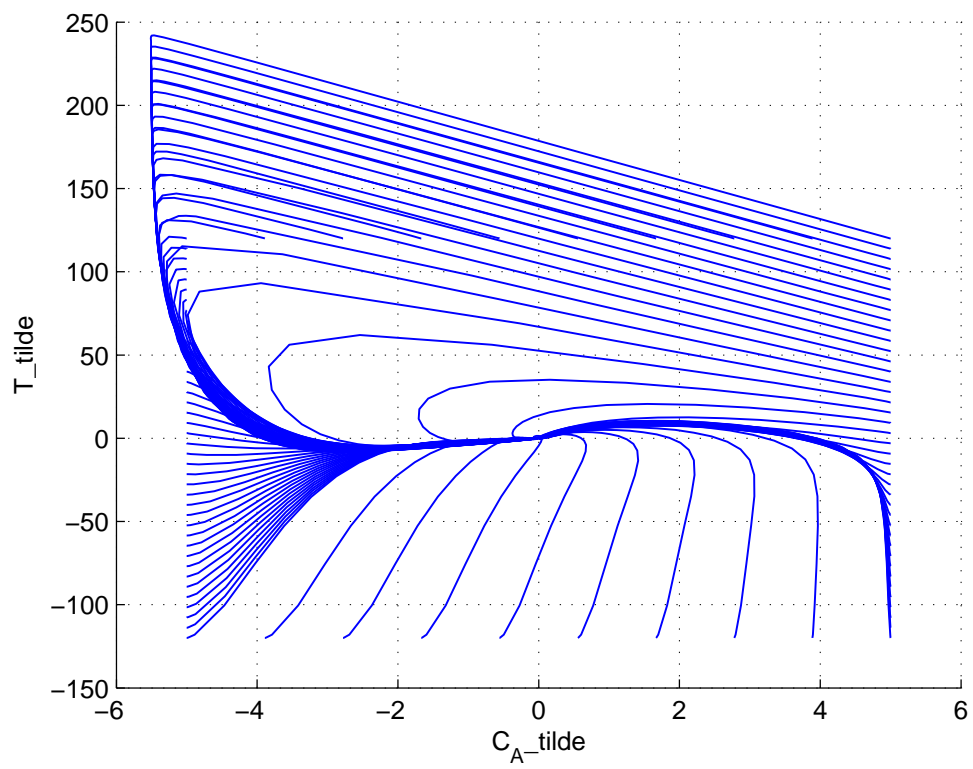


Figura 10: Evoluzione nello spazio delle fasi del sistema a ciclo chiuso con controllore lineare a partire da diverse condizioni iniziali.

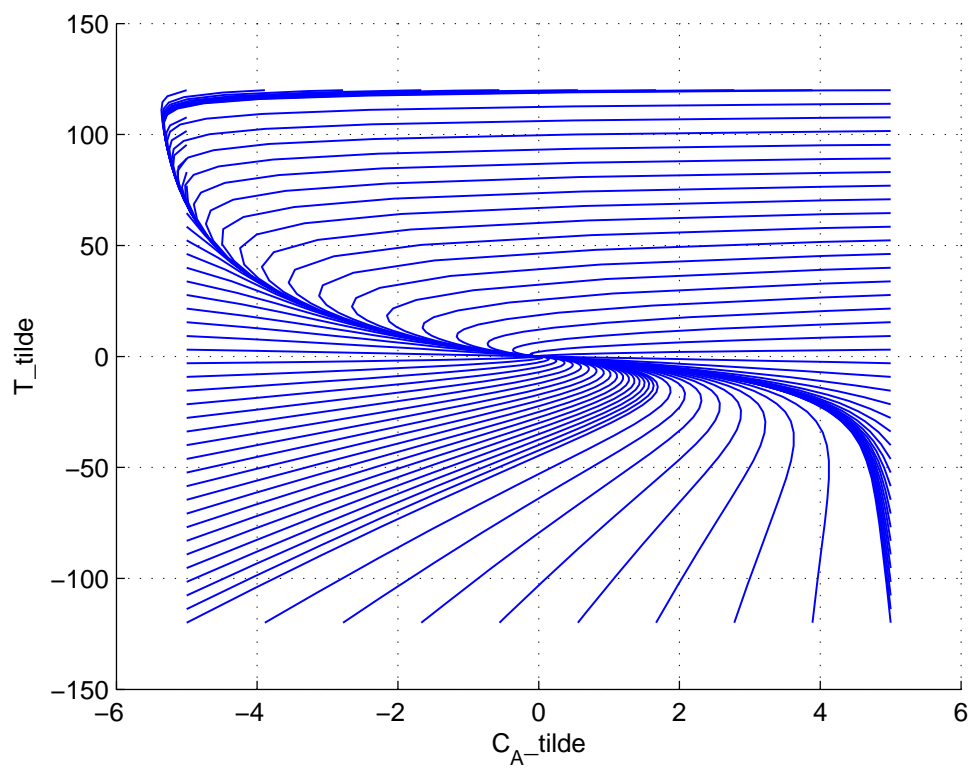


Figura 11: Evoluzione nello spazio delle fasi del sistema a ciclo chiuso con controllore alla Lyapunov a partire da diverse condizioni iniziali.

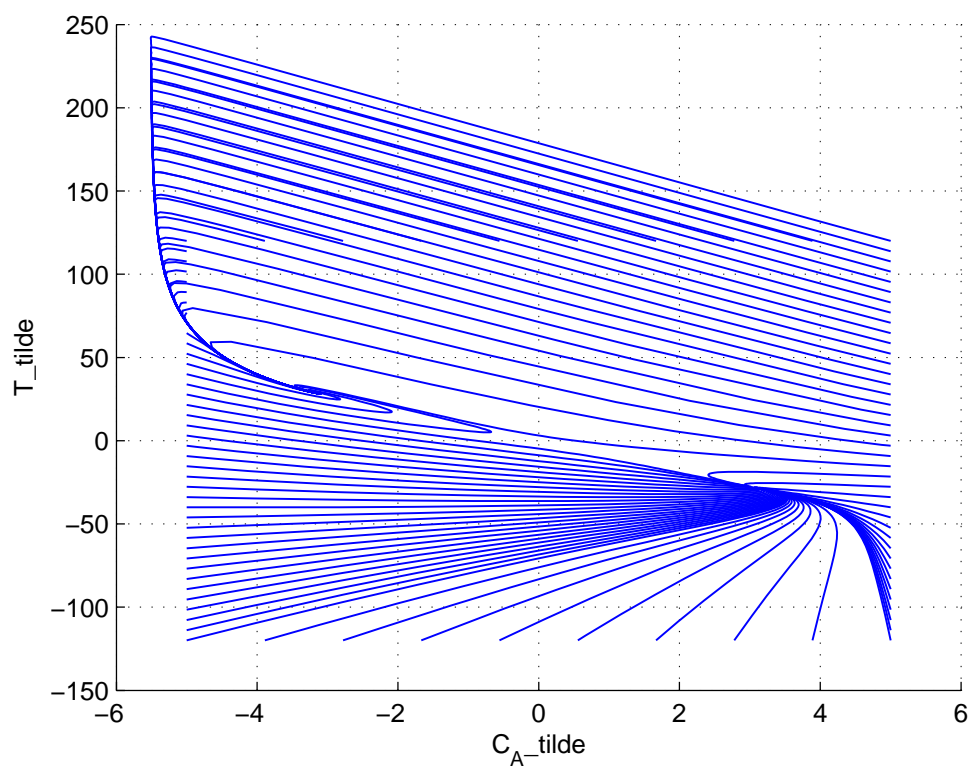


Figura 12: Evoluzione nello spazio delle fasi del sistema senza controllo.