

## Esercitazione Scritta di Controlli Automatici — 12-2-2008

Si consideri il sistema meccanico in figura 1.

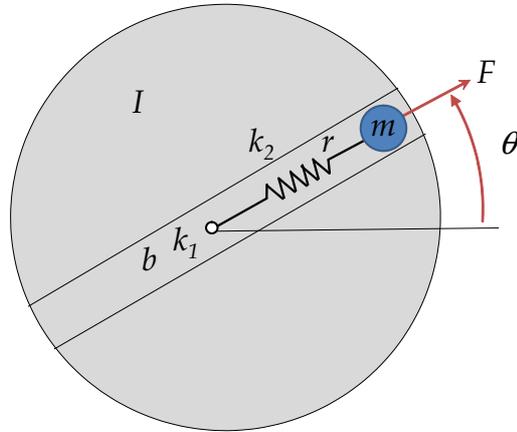


Figura 1: Modello del sistema.

Esso è costituito da un disco di inerzia  $I$ , al cui interno, in una scanalatura diametrale, è posta una massa  $m$  ancorata al centro del disco mediante una molla di costante elastica  $k_2$  e lunghezza a riposo nulla. Il disco è libero di ruotare in un piano orizzontale intorno al suo asse centrale ed è soggetto ad una coppia elastica di costante  $k_1$  e ad una coppia di attrito viscoso di costante  $b$ . Indicando con  $\theta$  l'angolo formato dalla scanalatura rispetto ad un riferimento dato, con  $r$  l'elongazione della molla e con  $F$  la forza di controllo sulla massa, la dinamica del sistema può essere espressa dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} (I + mr^2) \ddot{\theta} + 2mr\dot{\theta} + b\dot{\theta} + k_1\theta &= 0 \\ m\ddot{r} - m\dot{\theta}^2 r + k_2 r &= F. \end{aligned}$$

Si dispone della misura dell'elongazione  $r$ .

- A** Si calcolino gli equilibri del sistema e le corrispettive forze e si linearizzi il sistema rispetto all'equilibrio studiandone raggiungibilità ed osservabilità. Si dia una interpretazione fisica dei risultati.
- B** Dati i seguenti valori numerici:  $m = 1$  kg,  $I = 10^{-3}$  kg/m<sup>2</sup>,  $k_1 = 100$  N m/rad,  $k_2 = 50$  N/m,  $b = 1$  N m s/rad e  $\bar{F} = 12.5$  N, si porti il sistema in forma standard di Kalman e se ne studi la stabilizzabilità e la detettabilità. Si riporti esplicitamente il sottosistema raggiungibile e osservabile;
- C** Si progetti un compensatore che, usando solo la misura dell'uscita, stabilizzi asintoticamente il sistema nell'equilibrio dato precedentemente;
- D** Si effettui una simulazione del sistema a ciclo chiuso ottenuto connettendo il controllore con il modello non lineare del sistema.

## Soluzione

A. Imponendo le condizioni di equilibrio si ottiene:

$$\begin{aligned} 0 &= k_1 \theta \\ 0 &= -k_2 r + F, \end{aligned}$$

da cui si ha che qualunque valore dell'elongazione  $r$  può essere punto di equilibrio a patto che vi sia una forza di controllo in grado di bilanciare quella della molla. In particolare il punto di equilibrio è dato da

$$[\theta \quad r \quad \dot{\theta} \quad \dot{r}]^T = [0 \quad \bar{r} \quad 0 \quad 0]^T,$$

cui corrisponde una forza  $\bar{F} = k_2 \bar{r}$ .

Le equazioni del sistema non lineare in variabili di stato traslate  $\tilde{x} = [\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \tilde{x}_4]^T = [x_1 - \bar{x}_1, x_2 - \bar{x}_2, x_3 - \bar{x}_3, x_4 - \bar{x}_4]^T = [\theta, r - \bar{r}, \dot{\theta}, \dot{r}]^T$ , sono le seguenti:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_1 &= \tilde{x}_3 \\ \dot{\tilde{x}}_2 &= \tilde{x}_4 \\ \dot{\tilde{x}}_3 &= \frac{1}{I + m(\tilde{x}_2 + \bar{x}_2)^2} [-2m(\tilde{x}_2 + \bar{x}_2)(\tilde{x}_3)(\tilde{x}_4) - b(\tilde{x}_3) - k_1(\tilde{x}_1)] \\ \dot{\tilde{x}}_4 &= (\tilde{x}_3)^2(\tilde{x}_2 + \bar{x}_2) - \frac{k_2}{m}(\tilde{x}_2 + \bar{x}_2) + \frac{\tilde{F} + \bar{F}}{m}. \end{aligned}$$

Il sistema linearizzato nell'equilibrio precedente è dato da:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= A\tilde{x} + B\tilde{u} \\ \tilde{y} &= C\tilde{x}, \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_1}{I+m\bar{x}_2^2} & 0 & -\frac{b}{I+m\bar{x}_2^2} & 0 \\ 0 & -\frac{k_2}{m} & 0 & 0 \end{bmatrix}, & B &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix}, \\ C &= [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0]. \end{aligned}$$

Valutiamo la raggiungibilità del sistema:

$$R = [B \quad AB \quad A^2B \quad A^3B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m} & 0 & -\frac{k_2}{m^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{m} & 0 & -\frac{k_2}{m^2} & 0 \end{bmatrix}.$$

La matrice di raggiungibilità ha rango 2, quindi il sistema non è completamente raggiungibile tramite la forza  $F$ . È fisicamente evidente che il sottospazio di raggiungibilità non contiene moti che coinvolgono le rotazioni del disco, che non sono controllabili dall'ingresso radiale  $F$ .

La matrice di osservabilità è data da:

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{k_2}{m} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{k_2}{m} \end{bmatrix},$$

che ha evidentemente rango 2. Il sistema non è quindi completamente osservabile dalla misura dell'uscita  $r$ . Dalla analisi dello spazio inosservabile risulta che la posizione e la velocità angolare del disco non hanno influsso sulla variabile misurata  $r$ . Questo coincide con la intuizione fisica solo nelle ipotesi in cui è valida la linearizzazione, cioè di basse velocità angolari.

**B** Sostituendo i valori numerici in  $A$ ,  $R$  e  $O$ , e tenendo conto che  $\bar{r} = \frac{\bar{F}}{k_2} = 0.25$ , si ha:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1.5748 \cdot 10^3 & 0 & -15.748 & 0 \\ 0 & -50 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -50 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -50 & 0 \end{bmatrix},$$

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -50 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -50 \end{bmatrix}.$$

Allo scopo di portare il sistema in forma canonica, consideriamo i sottospazi di raggiungibilità e di inosservabilità. Dalla matrice di raggiungibilità si ha che il sottospazio di raggiungibilità può essere descritto come segue:

$$\mathcal{R} = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\},$$

mentre il sottospazio di inosservabilità:

$$\bar{\mathcal{O}} = \ker(O) = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Si vede che  $\mathcal{R} \cap \bar{\mathcal{O}} = \{\emptyset\}$ , quindi gli stati raggiungibili sono anche osservabili. Si ha quindi che la matrice di cambio di base in grado di portare il sistema in forma canonica è semplicemente

$$T = [ T_{\mathcal{R}\mathcal{O}} \mid T_{\bar{\mathcal{R}}\bar{\mathcal{O}}} ] = \left[ \begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Il sistema in forma di Kalman risulta

$$\hat{A} = T^{-1}AT = \left[ \begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -50 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -15.748 & -1.5748 \cdot 10^3 \end{array} \right], \quad \hat{B} = T^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{C} = CT = [ 1 \quad 0 \mid 0 \quad 0 ].$$

Da cui si vede che il sistema raggiungibile e osservabile è dato da:

$$A_{\mathcal{R}\mathcal{O}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -50 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_{\mathcal{R}\mathcal{O}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C_{\mathcal{R}\mathcal{O}} = [1 \quad 0].$$

Tale sistema è metastabile avendo autovalori immaginari puri in  $\pm\sqrt{50}i$ , mentre gli altri autovalori (relativi al sottosistema non raggiungibile o non osservabile) sono a parte reale negativa. Quindi il sistema risulta non asintoticamente stabile ma stabilizzabile e detettabile. In particolare, il sistema raggiungibile e osservabile, è l'unico a partecipare al rapporto ingresso-uscita, quindi

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = C_{\mathcal{R}\mathcal{O}}(sI - A_{\mathcal{R}\mathcal{O}})^{-1}B_{\mathcal{R}\mathcal{O}} = \frac{1}{(s + 50)^2}.$$

**C** Progettiamo il compensatore basato su regolatore direttamente sul sottosistema raggiungibile e osservabile. Calcoliamo la matrice  $K_{\mathcal{R}\mathcal{O}}$  di retroazione degli stati in modo da allocare i poli del sistema

a ciclo chiuso, cioè gli autovalori della matrice  $A_{RO} - B_{RO}K_{RO}$ , in  $p = [-10 \quad -15]$ . Utilizzando il comando Matlab  $K_{RO} = \text{place}(A_{RO}, B_{RO}, p)$  si ottiene:

$$K_{RO} = [100 \quad 25].$$

Si può realizzare un osservatore di Luenberger per ricostruire lo stato. La matrice  $L_{RO}$  di iniezione delle uscite è calcolata in modo che la matrice dinamica dello stimatore  $A_{RO} - L_{RO}C_{RO}$  abbia autovalori  $q = 2p$ . Sempre impiegando il comando Matlab  $L_{RO} = \text{transpose}(\text{place}(A_{RO}', C_{RO}', q))$ , si ottiene:

$$L_{RO} = \begin{bmatrix} 50 \\ 550 \end{bmatrix}.$$

Il compensatore basato sul regolatore appena progettato ha dinamica  $K_{RO}(sI - A_{RO} + B_{RO}K_{RO} + L_{RO}C_{RO})^{-1}L_{RO}$  e si costruisce col comando  $\text{rsys} = \text{reg}(\text{Sysro}, K_{RO}, L_{RO})$ , dove  $\text{Sysro} = \text{ss}(A_{RO}, B_{RO}, C_{RO}, 0)$ .

**D** Uno schema Simulink del sistema stabilizzato, rappresentato rispetto a variabili traslate, è riportato in figura 2.

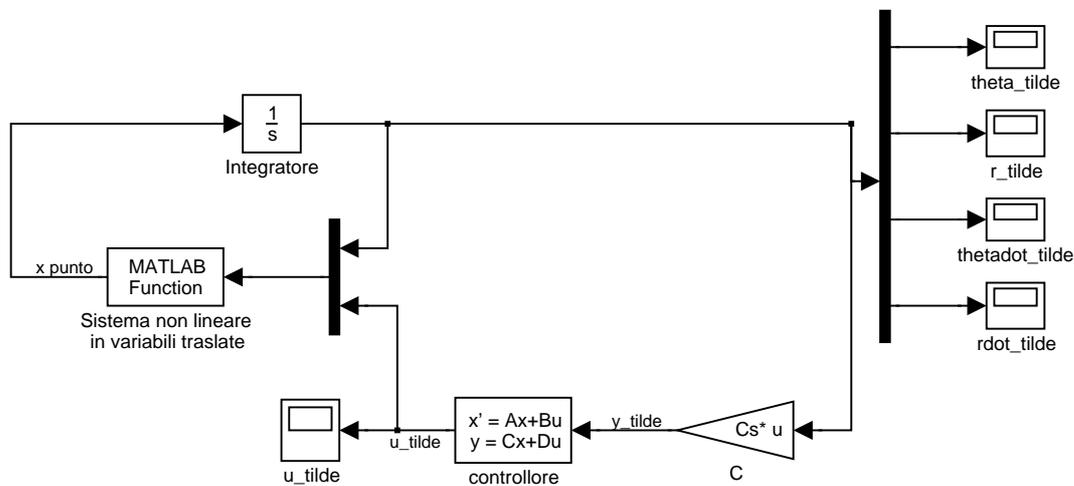


Figura 2: Schema Simulink del sistema non lineare stabilizzato con controllore lineare. Il sistema è rappresentato rispetto a variabili traslate.

Il blocco Simulink *Sistema non lineare in variabili traslate* contiene la seguente funzione:

```
function out = SistemaNONLineare(in)

% Ingressi del blocco
x1_tilde = in(1);
x2_tilde = in(2);
x3_tilde = in(3);
x4_tilde = in(4);
u_tilde = in(5);

% Costanti del sistema e punto di equilibrio
ParametriSistema;

% Dinamica del sistema
dot_x1_tilde = x3_tilde;
dot_x2_tilde = x4_tilde;
dot_x3_tilde = inv(I+m*(x2_tilde+x2_bar)^2)*(-2*m*(x2_tilde+x2_bar)* ...
(x3_tilde+x3_bar)*(x4_tilde+x4_bar)-b*(x3_tilde+x3_bar)- ...
k1*(x1_tilde+x1_bar));
```

```

dot_x4_tilde = (x3_tilde+x3_bar)^2*(x2_tilde+x2_bar)-k2/m*(x2_tilde+x2_bar)+ ...
              (u_tilde+u_bar)/m;

% Uscite del blocco
out(1) = dot_x1_tilde;
out(2) = dot_x2_tilde;
out(3) = dot_x3_tilde;
out(4) = dot_x4_tilde;

```

dove lo *script* `ParametriSistema` contiene i valori numerici di tutti i parametri del sistema e il punto di equilibrio. Il blocco `controllore` contiene le matrici del regolatore precedentemente progettato. Per valutare il controllore lineare, consideriamo l'evoluzione del sistema a ciclo chiuso a partire da condizioni iniziali  $[\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \tilde{x}_4]^T = [1, 0.4, 0, 0]^T$ . Le figure 3, 4, 5 e 6 riportano l'andamento dello scostamento dal punto di equilibrio delle variabili  $\theta$ ,  $r$ ,  $\theta$  e  $\dot{r}$  rispettivamente.

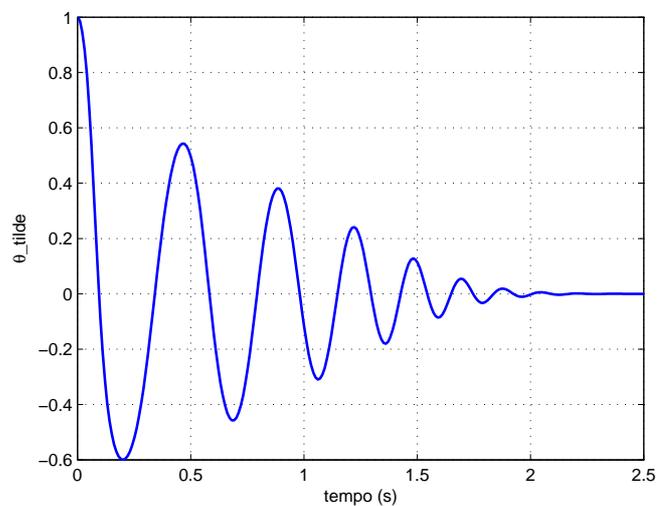


Figura 3: Andamento dello scostamento di  $\theta$  rispetto al valore di equilibrio.

Nella figura 7, invece, è riportato l'andamento della forza  $F$  rispetto al suo valore di equilibrio.

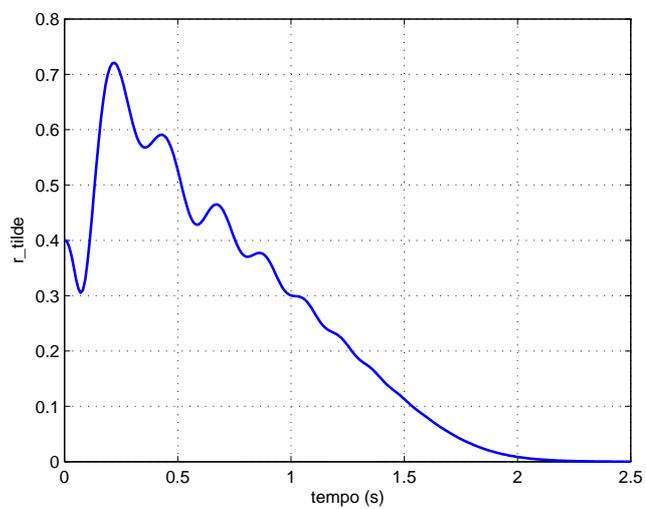


Figura 4: Andamento dello scostamento di  $r$  rispetto al valore di equilibrio.

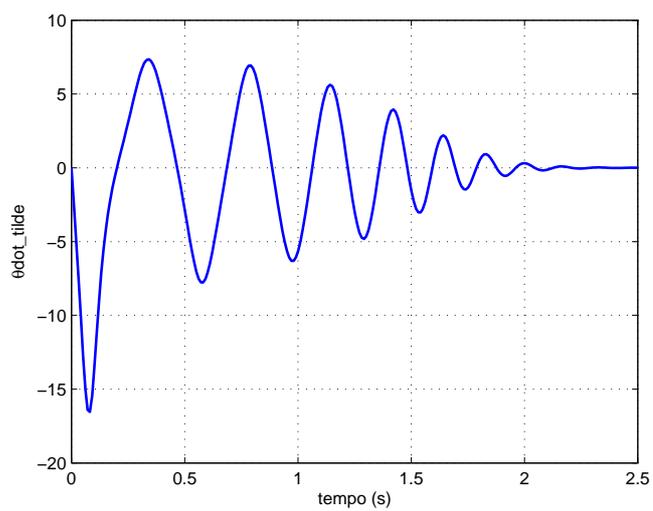


Figura 5: Andamento dello scostamento di  $\dot{\theta}$  rispetto al valore di equilibrio.

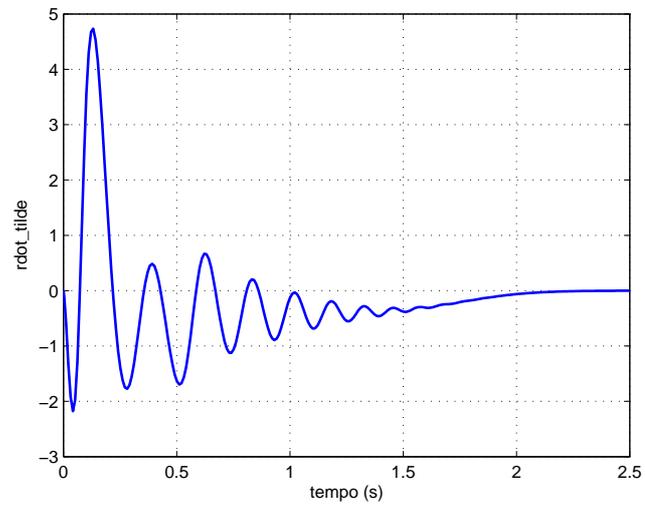


Figura 6: Andamento dello scostamento di  $\dot{r}$  rispetto al valore di equilibrio.

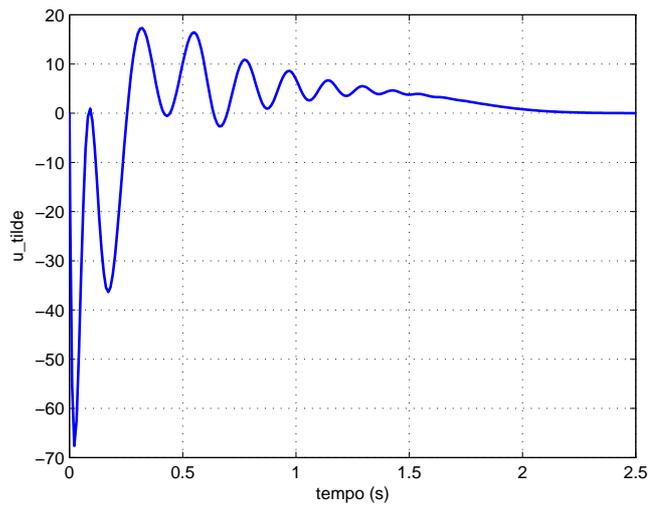


Figura 7: Andamento della forza  $F$  rispetto al suo valore di equilibrio.