

Numero di matricola

-	-	$= 10\alpha - 1$	$= \beta - 1$	$= 10\gamma - 1$	-
---	---	------------------	---------------	------------------	---

Si consideri il sistema idraulico costituito da tre serbatoi come mostrato in fig.1. I tre serbatoi sono interconnessi fra di loro mediante un sistema di condotti aventi una specifica resistenza idraulica. Il serbatoio i -esimo ($i = 1, 2, 3$) è caratterizzato dall'altezza del battente idrico h_i e dal volume del liquido V_i .

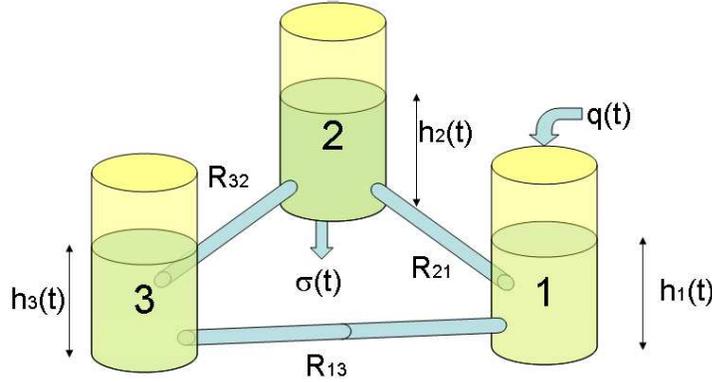


Figure 1: Sistema idraulico da controllare.

Il sistema risulta descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} \frac{dV_1}{dt} = q(t) + q_{21} - q_{13} \\ \frac{dV_2}{dt} = q_{32} - q_{21} - \sigma(t) \\ \frac{dV_3}{dt} = q_{13} - q_{32} \end{cases} \quad (1)$$

La variabile $q(t)$ è la portata in entrata sul serbatoio 1 e rappresenta l'ingresso del sistema mentre q_{13} , q_{32} e q_{21} sono le portate fluenti lungo i vari condotti rispettivamente dal serbatoio 1 al 3, dal serbatoio 3 al 2 e dal serbatoio 2 al 1. Tali portate possono essere espresse, in base alle pressioni esercitate sui vari serbatoi, in funzione dell'altezza del battente idrico e delle resistenze idrauliche dei vari condotti $R_{13} = (300 + \alpha)$ J/Kg, $R_{32} = 200$ J/Kg e $R_{21} = (150 + \gamma)$ J/Kg.

$$\begin{cases} q_{13} = \frac{p_1 - p_3}{R_{13}} = \rho g \frac{h_1 - h_3}{R_{13}} \\ q_{21} = \frac{p_2 - p_1}{R_{21}} = \rho g \frac{h_2 - h_1}{R_{21}} \\ q_{32} = \frac{p_3 - p_2}{R_{32}} = \rho g \frac{h_3 - h_2}{R_{32}} \end{cases} \quad (2)$$

dove $g = 9.8 m/s^2$ e $\rho = 1000 Kg/m^3$.

Si assuma inoltre che ogni serbatoio abbia sezione costante A_i e che il volume di liquido risulti pertanto $V_i = A_i h_i$. In particolare si ponga $A_1 = (300 + \beta) m^2$, $A_2 = 200 m^2$, $A_3 = 250 m^2$.

Si desidera controllare la quota $h_3(t)$ del serbatoio omonimo agendo sull'ingresso $q(t)$ in presenza di una perdita $\sigma(t)$ presente sul serbatoio 2.

A) Portare il sistema in forma di stato e ricavare la funzione di trasferimento considerando come uscita $h_3(t)$ e come ingressi la portata $q(t)$. Valutare inoltre la funzione di trasferimento fra $h_3(t)$ e la perdita $\sigma(t)$ presente sul serbatoio 2.

B) Si consideri il progetto di un controllore per la $G_1(s)$ che soddisfi le seguenti specifiche:

- B1) assegnato un riferimento a gradino di $10 m$ la quota $h_3(t)$ insegua il riferimento assegnato garantendo un errore a regime minore del 1% nonostante la presenza di un disturbo $\bar{\sigma}$ costante;
- B2) la quota $h_3(t)$ deve raggiungere a regime il valore richiesto nel punto B1 senza traboccare dal serbatoio avente un'altezza di $12 m$, con un tempo di assestamento di 3 s;
- B3) il rumore di misura sull'uscita $h_3(t)$ di tipo sinusoidale deve essere attenuato di un fattore 100 per frequenze superiori a 12 Hz.

Si riporti lo schema a blocchi complessivo del sistema ottenuto.

- B4) La posizione raggiunta a regime dal sistema non deve essere alterata per più di $\pm 0.1 m$ dall'effetto di un disturbo $\sigma(t)$ sinusoidale di ampiezza limitata $|\bar{\Sigma}| < 1 m$ con componenti frequenziali non superiori a 0.1 rad/sec.

Soluzione

- A) Essendo il sistema lineare, considerando come ingresso $u(t) = q(t)$, uscita $h_3(t)$ e $\sigma(t)$ come disturbo, indicando con $C_i = \frac{A_i}{\rho g}$ ($i = 1, 2, 3$) la capacità di ogni serbatoio e scegliendo come vettore stato $h = (h_1, h_2, h_3)^T$ risulta:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B_1 u + B_2 \sigma = \begin{pmatrix} -\frac{1}{C_1}(\frac{1}{R_{13}} + \frac{1}{R_{21}}) & \frac{1}{C_1 R_{21}} & \frac{1}{C_1 R_{13}} \\ \frac{1}{C_2 R_{21}} & \frac{1}{C_2 R_2} - \frac{1}{C_2 R_3} & \frac{1}{C_2 R_3} \\ \frac{1}{C_3 R_1} & \frac{1}{C_3 R_3} & -\frac{1}{C_3 R_3} - \frac{1}{C_3 R_1} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \frac{1}{C_1 \rho g} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{C_2 \rho g} \\ 0 \end{pmatrix} \sigma \\ y = Cx + Du = (0 \ 0 \ 1) x \end{cases}$$

Le funzioni di trasferimento richieste risultano:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1} B_1 = \frac{sC_2 R_{32} R_{21} + (R_{21} + R_{32} + R_{13})}{\rho g s [d_2(s)s^2 + d_1(s)s + d_0(s)]}$$

e

$$D(s) = C(sI - A)^{-1} B_2 = \frac{-s[C_1 R_{21} R_{13} + (R_{21} + R_{32} + R_{13})]}{\rho g s [d_2(s)s^2 + d_1(s)s + d_0(s)]}$$

avendo posto

$$d_2(s) = C_1 R_{21} R_{13} C_2 R_{32} C_3$$

$$d_1(s) = C_2 R_{32} C_3 R_{13} + C_1 R_{13} C_2 R_{21} + C_2 R_{21} C_3 R_{32} + C_1 R_{21} C_2 R_{32} + C_1 R_{21} C_3 R_{13} + C_1 R_{13} C_3 R_{32}$$

$$d_0(s) = R_{21} C_3 + C_2 R_{13} + C_3 R_{13} + C_1 R_{13} + C_1 R_{32} + C_2 R_{32} + C_3 R_{32} + C_2 R_{21} + C_1 R_{21}$$

Alternativamente le stesse fdt possono essere ricavate L-trasformando e risolvendo il sistema lineare.

Fissando i parametri α, β, γ nulli si ottiene numericamente:

$$G(s) = \frac{0.00043556(s + 1.062)}{[s(s + 0.7809)(s + 0.4441)]}$$

$$D(s) = -\frac{0 - 0.00098(s + 0.4719)}{[s(s + 0.7809)(s + 0.4441)]}$$

- B) Si consideri il progetto di un controllore in grado di garantire le specifiche statiche e dinamiche richieste. Ci si riferisce ad un sistema a blocchi in retroazione negativa come riportato in fig.2. Essendo

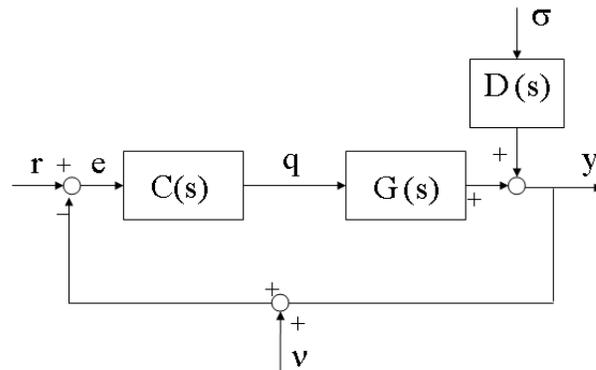


Figure 2: Schema a blocchi utilizzato per il controllo del sistema comprensivo di rumore di misura e disturbo σ .

l'impianto ad anello aperto stabile, per progettare il controllore è possibile operare direttamente sui diagrammi di Bode (fig.3).

Per le specifiche statiche si può fare riferimento al progetto di un controllore del tipo

$$C(s) = \frac{K}{s^t} \hat{C}(s), \quad \text{con} \quad \hat{C}(0) = 1,$$

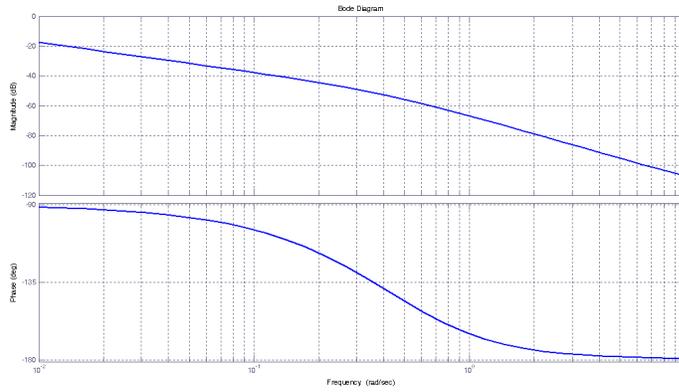


Figure 3: Diagrammi di Bode di ampiezza e fase della funzione di trasferimento $G(s)$ calcolata al punto **B**).

si consideri la scelta del tipo t e della costante di guadagno K del controllore.

Si osservi essendo $G(s)$ ha un polo nell'origine e quindi l'inseguimento del riferimento a gradino è garantito con errore nullo. Tuttavia pur essendo $D(s)$ di tipo 1 per annullare l'effetto del disturbo a gradino è necessario considerare il suo effetto sulla risposta a regime.

Utilizzando il teorema del valore finale si deve avere

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)|_{r=0} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{D(s)}{1 + C(s)G(s)} \frac{\bar{\Sigma}}{s} = 0$$

Tale specifica è garantita con $C(s) = \frac{1}{s} \hat{C}(s)$. Con tale compensazione si ottiene diagramma di Bode riportato in fig.4. La specifica **B2** si traduce in una specifica sulla sovraelongazione e sul tempo di

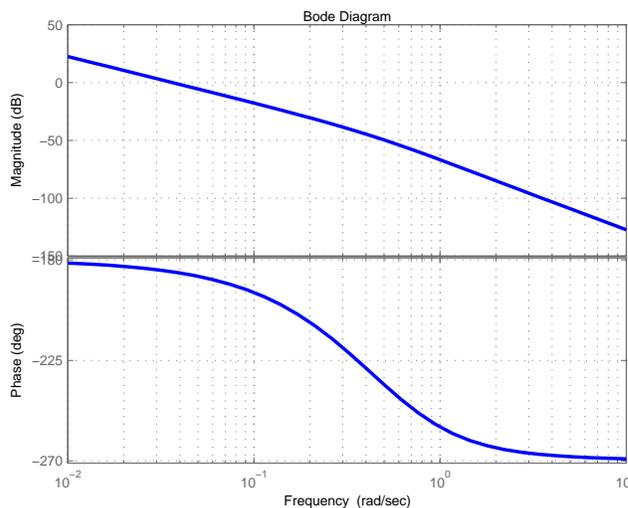


Figure 4: Diagrammi di Bode ottenuti con il controllore $C(s) = \frac{1}{s}$.

assestamento. In particolare risulta che:

$$S = \frac{|h_{3max} - \bar{h}_3|}{|\bar{h}_3|} = 20\%.$$

Ciò ammette che il sistema in anello chiuso sia approssimabile con un sistema del secondo ordine con smorzamento dei poli dominanti pari a 0.4559. Sul diagramma di Bode, questo significa che si ammette un margine di fase $\phi_M \approx 45^\circ$.

La specifica sul tempo di assestamento, per il caso di sistema in anello chiuso a due poli dominanti indica che la pulsazione naturale dei due poli deve essere $\omega_N \geq 3/\delta T_a \approx 2.2 \text{ rad/sec}$. Questa specifica in particolare si riflette nel chiedere che il diagramma delle ampiezze di $C(j\omega)G(j\omega)$ intersechi l'asse a 0 db a pulsazioni superiori a 2.2 rad/sec .

Tale condizione non è rispettata avendo attualmente una pulsazione di taglio di 0.5 rad/sec (fig.4).

Per migliorare la pulsazione di taglio e garantire la stabilità del sistema risulta opportuno aumentare il guadagno ed utilizzare una doppia azione anticipatrice. Ponendo ad esempio due zeri reali, entrambi in -0.5 e aumentando il guadagno del controllore fino a 2600 si ottengono i diagrammi di Bode riportati fig.5. In tal caso si hanno un margine di fase di 79.8° e una pulsazione di taglio di

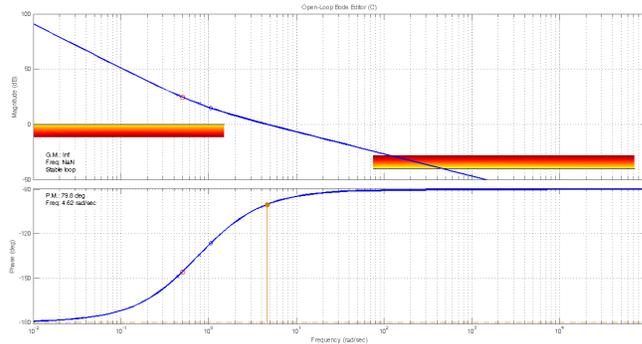


Figure 5: Diagramma di Bode del sistema dopo la compensazione $C(s) = 2600 \frac{(1+2s)^2}{s}$

4.62 rad/sec e quindi entrambe le specifiche risultano rispettate.

Per imporre la specifica di reiezione dei disturbi in alta frequenza bisogna fare in modo che nelle pulsazioni di interesse $|C(s)G(s)| < 10^{-2} |1 + C(s)G(s)|$.

Ciò equivale approssimativamente a chiedere che sia $|C(j\omega)G(j\omega)|_{\text{db}} \leq -40 \text{ db}, \forall \omega > 2\pi \cdot 12 \approx 75 \text{ rad/s}$. Si garantisce questa specifica inserendo nel compensatore un polo pulsazioni maggiori della pulsazione di taglio necessario per garantire la causalità del controllore. Aggiungendo un polo in -10 , si ottiene il diagramma di Bode riportato in fig.6.

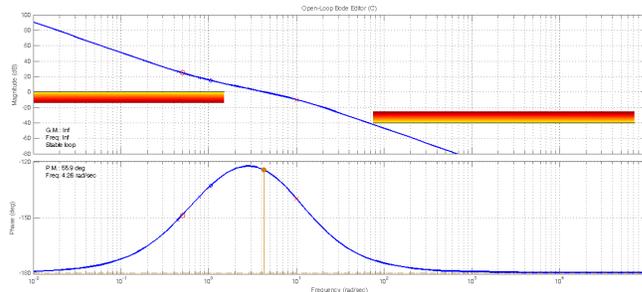


Figure 6: Diagrammi di Bode relativi al sistema con la compensazione del disturbo di misura.

Il controllore risultante è dato da

$$C(s) = 2600 \frac{(1 + 2s)^2}{s(1 + 0.1s)}$$

A verifica finale del progetto del controllore, viene riportata la risposta al gradino del sistema in anello chiuso in fig.7.

- B3)** Per quanto riguarda l'ultimo punto basta considerare la funzione di trasferimento fra il disturbo $\sigma(t)$ sinusoidale a bassa frequenza e l'uscita. Essendo il sistema considerato asintoticamente stabile, è possibile applicare il teorema della risposta armonica. La specifica richiede che per pulsazioni minori di 0.1 rad/sec si abbia: $|D(j\omega)1 + C(j\omega)G(j\omega)|_{\text{db}} < -20 \text{ db}$. Essendo per basse frequenze $CG \gg 1$ si ha che $|CG|_{\text{db}} > 20 \text{ db} + |D|_{\text{db}}$. Si richiede quindi che $|C|_{\text{db}} + |G|_{\text{db}} > 20 \text{ db} + |D|_{\text{db}}$, da cui $|C|_{\text{db}} > 20 \text{ db}$ essendo $|G| < 0 \text{ db}$ (fig.3) e $|D| < 0 \text{ db}$ (fig.8) per le pulsazioni di interesse.

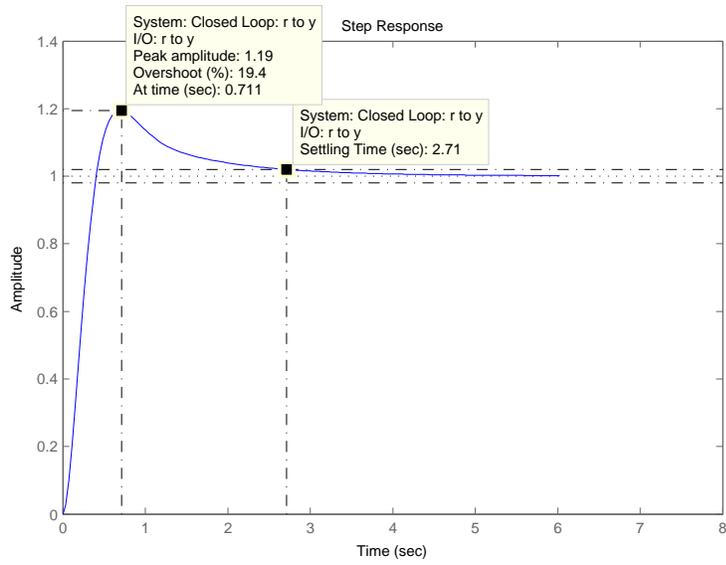


Figure 7: Risposta al gradino del sistema chiuso in retroazione.

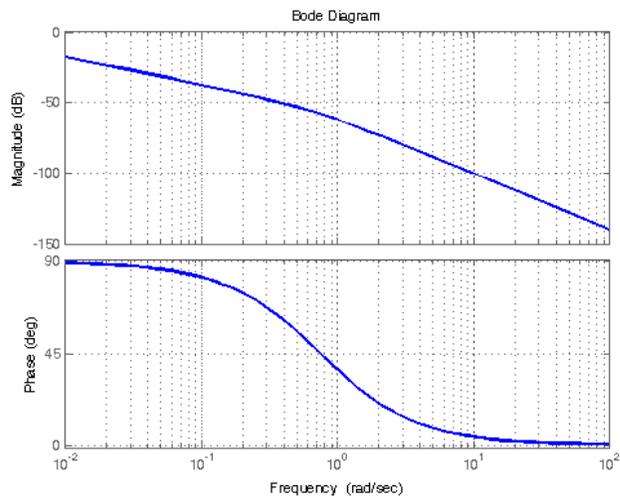


Figure 8: Diagrammi di Bode della fdt $D(s)$.

Tale condizione risulta già verificata.