

Numero di matricola

-	-	-	= $10\alpha - 1$
			= $10\beta - 1$
			= $10\gamma - 1$

- 1) Si consideri la macchina di prova per pneumatici rappresentata in fig.1. Il dispositivo è costituito da un tappeto scorrevole, in moto con velocità costante  $V = 20$  m/s, sul quale viene appoggiato il pneumatico che si desidera testare. Il pneumatico è collegato, per mezzo di un giunto viscoso, ad un volano, sul quale agisce la coppia di controllo  $T$ . Si indichi con  $J_1 = 0.6 + \frac{\alpha}{100}$  kgm<sup>2</sup> il momento di inerzia assiale del pneumatico, con  $\Omega_1$  la sua velocità angolare, con  $J_2 = 1.3 + \frac{\beta}{100}$  kgm<sup>2</sup> il momento di inerzia assiale del volano, con  $\Omega_2$  la sua velocità angolare. Sia  $c = 40 + \frac{\gamma}{10} \frac{\text{Nmms}}{\text{rad}}$  il coefficiente di attrito viscoso del giunto,  $R = 0.4$  m il raggio del pneumatico.

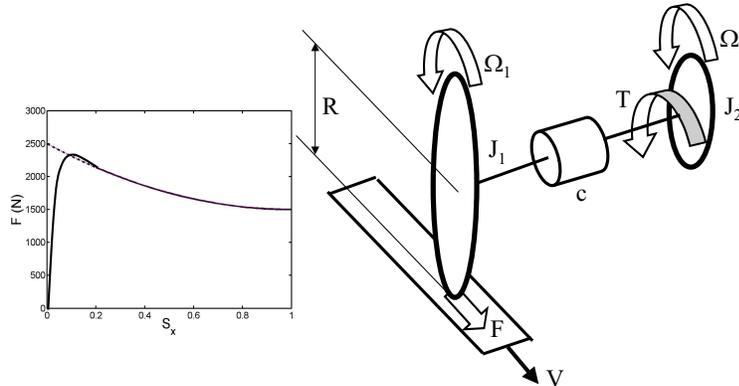


Figure 1: Schema di una macchina di prova per pneumatici.

Il sistema risulta descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} J_1 \dot{\Omega}_1 + c(\Omega_1 - \Omega_2) = FR, \\ J_2 \dot{\Omega}_2 + c(\Omega_2 - \Omega_1) = T. \end{cases}$$

Sia  $S_x$  lo scorrimento del pneumatico, definito come  $S_x = 1 - \frac{\Omega_1 R}{V}$ . In prima approssimazione, per  $0.2 \leq S_x \leq 1$ , la forza  $F$  che il tappeto esercita sul pneumatico è una funzione quadratica dello scorrimento, secondo la relazione  $F = p(S_x - 1)^2 + q$ , con  $p = 1000$  N,  $q = 1500$  N. Si desidera controllare la velocità angolare del pneumatico  $\Omega_1$  agendo sulla coppia di controllo  $T$ .

- A) Si ricavi la configurazioni di equilibrio per il sistema compatibile con la condizione  $0.2 \leq S_x \leq 1$ , nel caso in cui la coppia  $T$  sia costante e pari a  $\bar{T} = -700$  Nm.
- B) Si linearizzi il sistema in un intorno della configurazione di equilibrio ottenuta al punto precedente. Si determini una rappresentazione in forma di stato per il sistema lineare così ottenuto e si discuta la stabilità dell'equilibrio.
- C) Per il sistema linearizzato, si determini la funzione di trasferimento tra la variazione dell'ingresso  $T$  e la variazione dell'uscita  $\Omega_1$  rispetto al punto di equilibrio.
- D) Si traccino i diagrammi di Bode asintotici di ampiezza e fase della funzione di trasferimento ottenuta.
- E) Si consideri il progetto di un controllore in retroazione per la funzione di trasferimento ricavata al punto C) in modo da soddisfare le specifiche riportate nel seguito. Si descriva esplicitamente la procedura di progetto del controllore, commentando adeguatamente i passaggi effettuati; si corredi la trattazione con i diagrammi di Bode utilizzati e si riporti l'espressione analitica del controllore ricavato.
- E1) Partendo dalla configurazione di equilibrio precedentemente ottenuta, il pneumatico raggiunga a regime esattamente la velocità angolare  $\hat{\Omega}_1 = 23$  rad/s. Nel raggiungere questo valore, la velocità angolare del pneumatico non deve assumere valori inferiori a  $\tilde{\Omega}_1 = 22.5$  rad/s. Si deve garantire inoltre che, dopo al più 0.2 secondi, la velocità angolare rimanga confinata nella fascia di  $\pm 5\%$  del valore di regime.
- E2) Si ipotizzi che il trasduttore di misura della velocità angolare  $\Omega_1$  sia affetto da rumore sinusoidale per frequenze superiori a 800 Hz. Si cerchi di attenuare tali disturbi di un fattore pari a  $10^4$ .
- 2) Si consideri il sistema meccanico lineare descritto dalla funzione di trasferimento  $G(s) = \frac{s^2+1}{s^2+2s+1}$ . Si discuta l'effetto sull'uscita a regime di un ingresso sinusoidale  $u(t) = \sin \omega t$ , con  $0 < \omega < +\infty$ .

# Soluzione

## Esercizio 1

A) Scelte come variabili di stato  $x_1 = \Omega_1$  e  $x_2 = \Omega_2$ , il sistema può essere espresso dalle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= \frac{c}{J_1}(x_2 - x_1) + \frac{FR}{J_1}, \\ \dot{x}_2 &= \frac{c}{J_2}(x_1 - x_2) + \frac{T}{J_2}. \end{cases}$$

Adottando una simbologia più compatta, il sistema è descritto dalle equazioni:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u), \\ y &= h(x, u), \end{aligned}$$

con  $x = [x_1 \ x_2]^T$ ,  $y = x_1$ ,  $u = T$ ,  $h(x, u) = x_1$ .

Al fine di trovare il punto di equilibrio richiesto con un ingresso pari a  $T = \bar{T}$  si pongono a zero le derivate delle variabili di stato. Partendo dalla seconda equazione si ha  $\dot{x}_2 = 0 \Rightarrow c(\bar{\Omega}_2 - \bar{\Omega}_1) = \bar{T}$ . Sostituendo nella prima si ottiene  $\dot{x}_1 = 0 \Rightarrow -\bar{T} = \bar{F}R$ . In particolare dall'ultima relazione considerando l'espressione della forza  $F$  si ha:

$$\frac{\bar{x}_1^2 p R^3}{V^2} = -\bar{T} - Rq. \quad (1)$$

Si ottiene che

$$\bar{x}_1 = \pm \sqrt{\frac{V^2}{pR^3} (-\bar{T} - Rq)} = \pm 25 \text{ rad/s}. \quad (2)$$

Tra le due velocità di equilibrio ricavate, solamente  $\bar{x}_1 = 25 \text{ rad/s}$  è compatibile con la condizione  $0.2 \leq S_x \leq 1$ . In base a questo valore, si ottiene infine

$$\bar{x}_2 = \frac{\bar{T}}{c} + \bar{x}_1 = 7.5 \text{ rad/s}. \quad (3)$$

I valori numerici riportati valgono nel caso  $\alpha, \beta, \gamma$  nulli.

B) Il sistema linearizzato può essere ottenuto introducendo le variabili traslate:  $\tilde{x} = x - \bar{x}$ ,  $\tilde{u} = u - \bar{u} = T - \bar{T}$ ,  $\tilde{y} = y - \bar{y} = \Omega_1 - \bar{\Omega}_1$  e le matrici  $A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(\bar{x}, \bar{u})}$ ,  $B = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{(\bar{x}, \bar{u})}$ ,  $C = \left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{(\bar{x}, \bar{u})}$ ,  $D = \left. \frac{\partial h}{\partial u} \right|_{(\bar{x}, \bar{u})}$ . Si ottengono le seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= A\tilde{x} + B\tilde{u}, \\ \tilde{y} &= C\tilde{x} + D\tilde{u}, \end{aligned}$$

dove

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{c}{J_1} + \frac{2p\bar{x}_1 R^3}{J_1 V^2} & \frac{c}{J_1} \\ \frac{c}{J_2} & -\frac{c}{J_2} \end{bmatrix};$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J_2} \end{bmatrix};$$

$$C = [1 \ 0];$$

$$D = 0.$$

Per discutere la stabilità del punto di equilibrio è sufficiente valutare gli autovalori della matrice  $A$ . Il polinomio caratteristico della matrice è dato da:

$$\lambda^2 + \left( \frac{c}{J_1} + \frac{c}{J_2} - \frac{2p\bar{x}_1 R^3}{J_1 V^2} \right) \lambda - \frac{2p\bar{x}_1 R^3 c}{J_1 J_2 V^2} = 0.$$

Numericamente, si ottiene:

$$\lambda^2 + 84.1\lambda - 410.3 = 0.$$

Si osservi che essendoci una variazione di segno ed essendo il polinomio di grado 2, un autovalore è reale positivo mentre l'altro è reale negativo. Infatti, gli autovalori sono:

$$\lambda_1 = -88.7264, \quad \lambda_2 = 4.6238.$$

Il punto di equilibrio risulta perciò instabile.

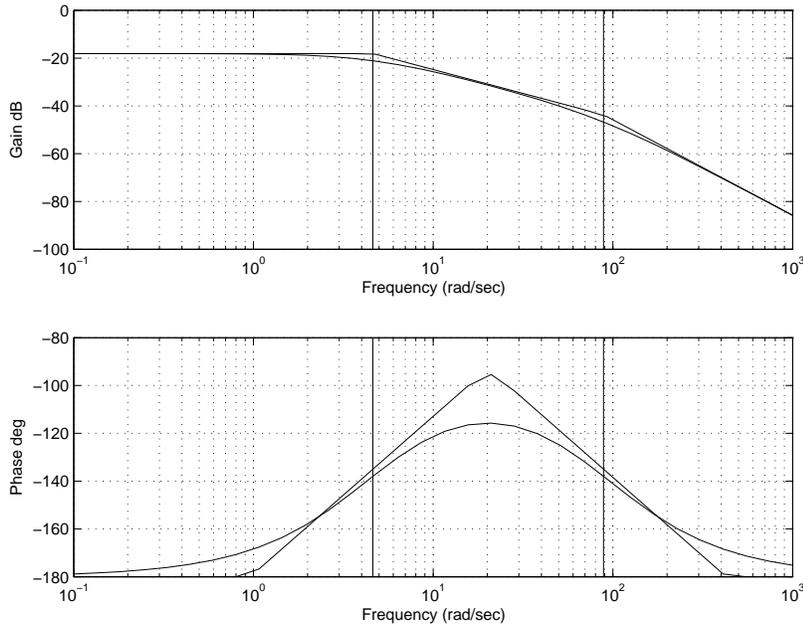


Figure 2: Diagrammi di Bode della f.d.t.  $G(s)$

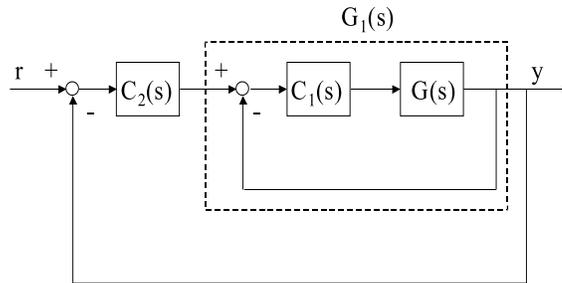


Figure 3: Schema del sistema di controllo da progettare con la tecnica del doppio anello di retroazione

C) Essendo la matrice  $D$  nulla, il calcolo della  $G(s)$  simbolica può essere fatto in base alla relazione:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1} B.$$

Alternativamente la f.d.t. può essere valutata L-trasformando il sistema originario. Si ottiene che:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\frac{c}{J_1 J_2}}{s^2 + \left( \frac{c}{J_1} + \frac{c}{J_2} - \frac{2p\bar{x}_1 R^3}{J_1 V^2} \right) s - \frac{2p\bar{x}_1 R^3 c}{J_1 J_2 V^2}}.$$

La funzione di trasferimento è valutabile numericamente con il comando Matlab  $\mathbf{G}=\mathbf{tf}(\mathbf{SS}(\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C},\mathbf{D}))$ . Si ottiene:

$$\mathbf{G}(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{51.28}{s^2 + 84.1s - 410.3}$$

D) I diagrammi di Bode della f.d.t.  $G(s)$  sono riportati in fig.2.

E) La funzione di trasferimento del sistema  $G(s)$  ha un polo a parte reale positiva. È quindi opportuno impiegare la tecnica del doppio anello di retroazione, schematizzata in fig.3. Per prima cosa, utilizzando il luogo delle radici della f.d.t.  $G(s)$  si progetta un controllore  $C_1(s)$  tale che la f.d.t. dell'anello chiuso più interno  $G_1(s) = \frac{C_1(s)G(s)}{1+C_1(s)G(s)}$  sia asintoticamente stabile.

Come si osserva in fig.4, la f.d.t.  $G_1(s) = \frac{C_1(s)G(s)}{1+C_1(s)G(s)}$  può essere resa asintoticamente stabile con un controllore  $C_1(s)$  puramente proporzionale. Scegliendo  $C_1(s) = 50$ , si ottiene la f.d.t.  $G_1(s)$

$$G_1(s) = \frac{2564.1026}{s^2 + 84.1s + 2154},$$

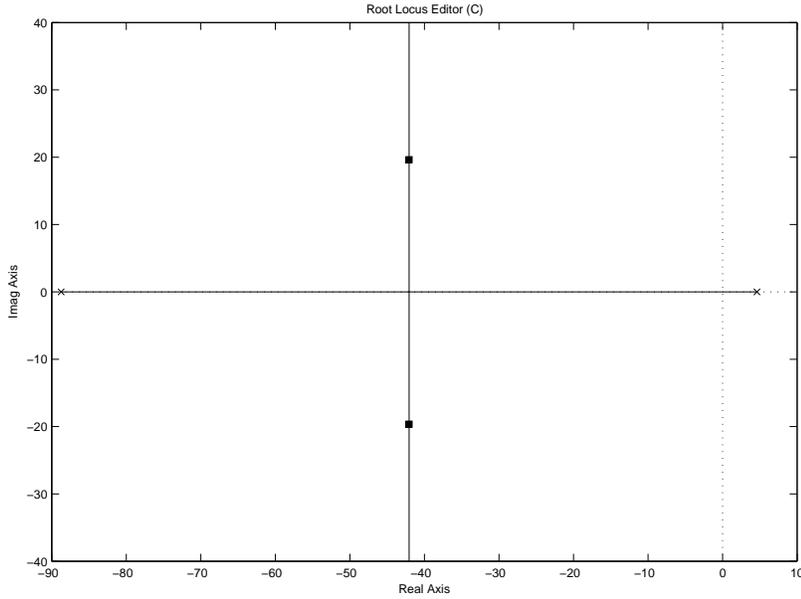


Figure 4: Luogo delle radici della f.d.t.  $G(s)$

i cui poli sono in  $-42.0513 \pm 19.6351 i$ .

A questo punto, il sistema  $G_1(s)$  viene chiuso in retroazione con il controllore  $C_2(s)$ , il cui compito è quello di soddisfare le specifiche e il cui progetto può essere fatto sui diagrammi di Bode della f.d.t. di anello  $C_2(s)G_1(s)$ .

Facendo riferimento al progetto di un controllore nella forma:

$$C_2(s) = \frac{K}{s^t} \hat{C}(s), \quad \text{con} \quad \hat{C}(0) = 1,$$

la scelta del *tipo*  $t$  e della costante di guadagno  $K$  del controllore  $C_2(s)$  può essere fatta in base alle specifiche statiche. Affinché l'errore a regime per un riferimento a gradino sia nullo, è sufficiente introdurre un polo nell'origine. I diagrammi di Bode della f.d.t.  $C_2(s)G_1(s)$ , con  $C_2(s) = \frac{1}{s}$ , vengono riportati in fig.5.

La seconda specifica richiede che il sistema in anello chiuso abbia una sovralongazione massima pari a:

$$S_{max} = \frac{(\tilde{\Omega}_1 - \bar{\Omega}_1) - (\hat{\Omega}_1 - \bar{\Omega}_1)}{(\hat{\Omega}_1 - \bar{\Omega}_1)} = \frac{(22.5 - 25) - (23 - 25)}{(23 - 25)} = 0.25.$$

Tale specifica si traduce nell'imporre che il sistema in anello chiuso sia approssimabile ad un sistema del secondo ordine con uno smorzamento dei poli dominanti pari o superiore a  $\delta = 0.4037$  (come si ricava dall'espressione della sovralongazione per i sistemi del secondo ordine  $S = e^{-\frac{\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}}$ ). Sul piano di Bode, questo significa che si ammette un margine di fase  $\phi_M \approx 40^\circ$ . La specifica sul tempo di assestamento, per il caso di sistema in anello chiuso a due poli dominanti stabilito sulla base della precedente specifica, indica che la pulsazione naturale dei due poli deve essere  $\omega_N \geq \frac{3}{\delta T_a} \approx 37 \text{ rad/s}$ . Questa specifica si traduce nel chiedere che il diagramma di Bode delle ampiezze di  $C_2(j\omega)G_1(j\omega)$  intersechi l'asse a  $0db$  per pulsazioni superiori a  $37 \text{ rad/s}$ .

Per soddisfare queste specifiche non è sufficiente aumentare il guadagno, ma è necessario introdurre un'opportuna azione anticipatrice. Ad esempio fissando il guadagno  $k = 40$  e piazzando uno zero in  $-15$  si ottengono i diagrammi di Bode riportati in fig.6. Così facendo si ottengono un margine di fase di  $50.8^\circ$  e una pulsazione di taglio di  $73.5 \text{ rad/sec}$ .

A questo punto rimane da imporre la specifica di reiezione dei disturbi in alta frequenza:

$$|C_2(j\omega)G_1(j\omega)|_{db} \leq -80 \text{ db}$$

per  $\omega \geq 5027 \text{ rad/s}$ . Si garantisce questa specifica inserendo nel compensatore un polo in alta frequenza. Ponendo il polo in  $-800$ , si ottiene il diagramma di Bode riportato in fig.7. Le specifiche relative a margine di fase e pulsazione di taglio rimangono verificate.

Il controllore finale ottenuto risulta:

$$C_2(s) = 40 \frac{(0.067s + 1)}{s(0.0013s + 1)}.$$

Come si vede in fig.8, la risposta al gradino del sistema in anello chiuso rispetta le specifiche assegnate.

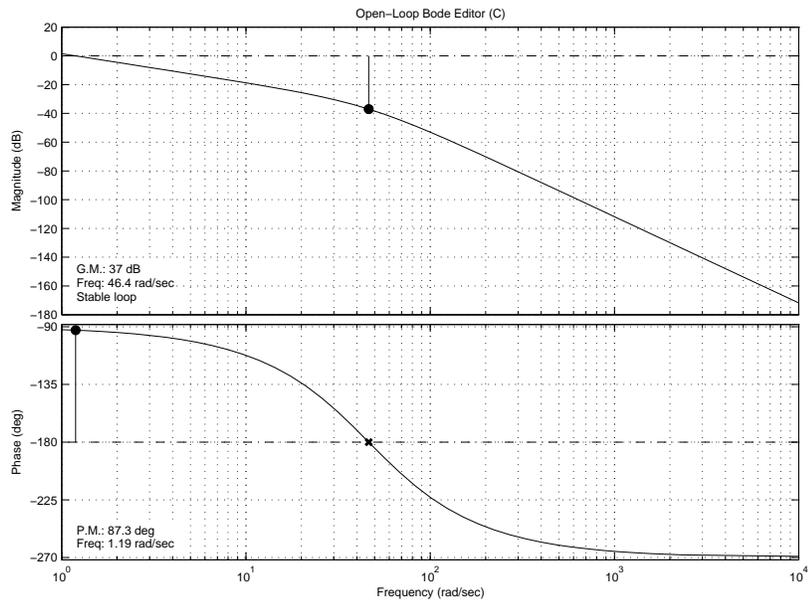


Figure 5: Diagrammi di Bode della f.d.t.  $C_2(s)G_1(s)$  con  $C_2(s) = \frac{1}{s}$

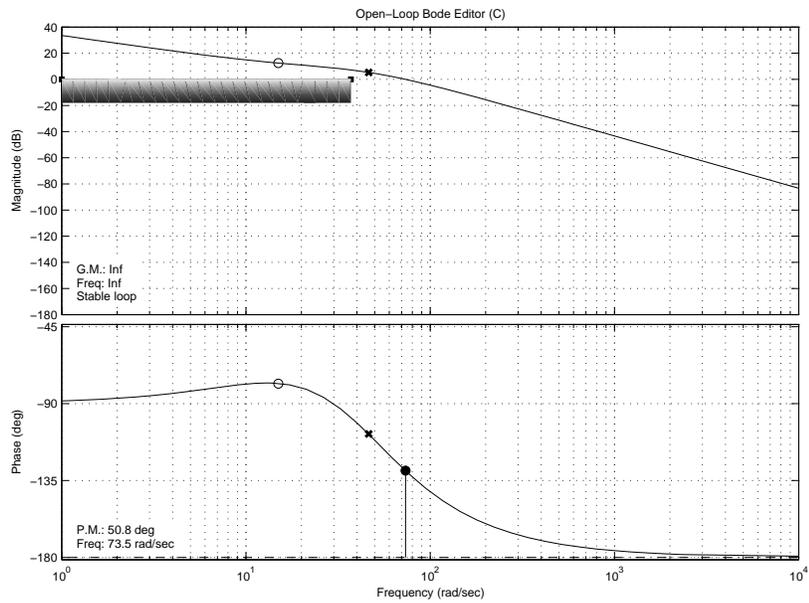


Figure 6: Diagrammi di Bode della f.d.t.  $C_2(s)G_1(s)$  con  $C_2(s) = 40 \frac{(0.067s+1)}{s}$

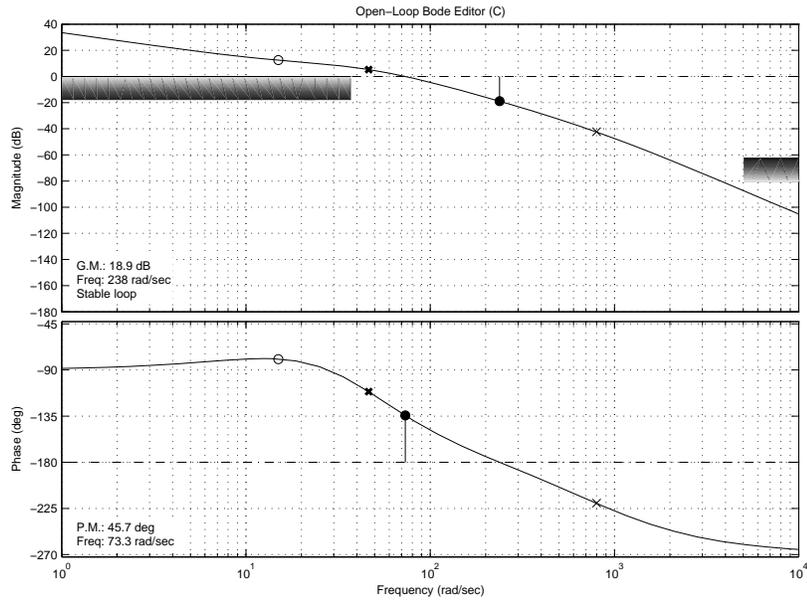


Figure 7: Diagramma di Bode della f.d.t.  $C_2(s)G_1(s)$  con  $C_2(s) = 40 \frac{(0.067s+1)}{s(0.0013s+1)}$

## Esercizio 2

In base al teorema della risposta armonica, la risposta a regime di un sistema  $G(s)$  asintoticamente stabile ad un ingresso sinusoidale del tipo  $u(t) = \sin \omega t$  è  $y_R(t) = M \sin(\omega t + \phi)$ , con  $M = |G(j\omega)|$ ,  $\phi = \arg(G(j\omega))$ .

Per discutere l'effetto a regime di un ingresso sinusoidale per il sistema proposto, si considerino i relativi diagrammi di Bode riportati in fig.9. Si noti che la f.d.t. ha due zeri immaginari puri in  $\pm j$  e due poli reali coincidenti in  $-1$ . A causa della presenza degli zeri immaginari puri, per  $\omega = \omega_n = 1$  il modulo  $|G(j\omega)|_{db} = -\infty$ . In base ai diagrammi di Bode riportati in fig.9, si deduce che:

- per pulsazioni  $\omega \ll \omega_n = 1$  e per pulsazioni  $\omega \gg \omega_n = 1$ ,  $|G(j\omega)|_{db} \simeq 0$  e  $\arg(G(j\omega)) \simeq 0$  gradi; quindi, a regime la risposta del sistema coincide, con buona approssimazione, con la forzante. In questo range di frequenze, a regime il sistema lascia passare in uscita il segnale di ingresso quasi inalterato.
- per  $\omega = \omega_n = 1$ , a regime il segnale in uscita ha ampiezza che tende a zero ( $-\infty$  in db); in pratica, per pulsazioni molto vicine alla pulsazione  $\omega_n$ , a regime il segnale in uscita dal sistema presenta un'ampiezza molto piccola e, quindi, trascurabile in confronto a quella del segnale in ingresso.

In base alle precedenti considerazioni, si può affermare che a regime il sistema lascia passare in uscita quasi inalterati ingressi sinusoidali con pulsazione sufficientemente diversa dalla pulsazione  $\omega_n$ , mentre attenua fortemente in uscita ingressi sinusoidali con pulsazione vicina alla pulsazione  $\omega_n$ . In pratica, un sistema di questo tipo realizza un filtraggio molto selettivo nei confronti di pulsazioni prossime a una data pulsazione critica. Per queste sue caratteristiche e per la particolare forma che assume il diagramma di Bode delle ampiezze, un filtro di questo tipo viene detto "filtro a spillo".

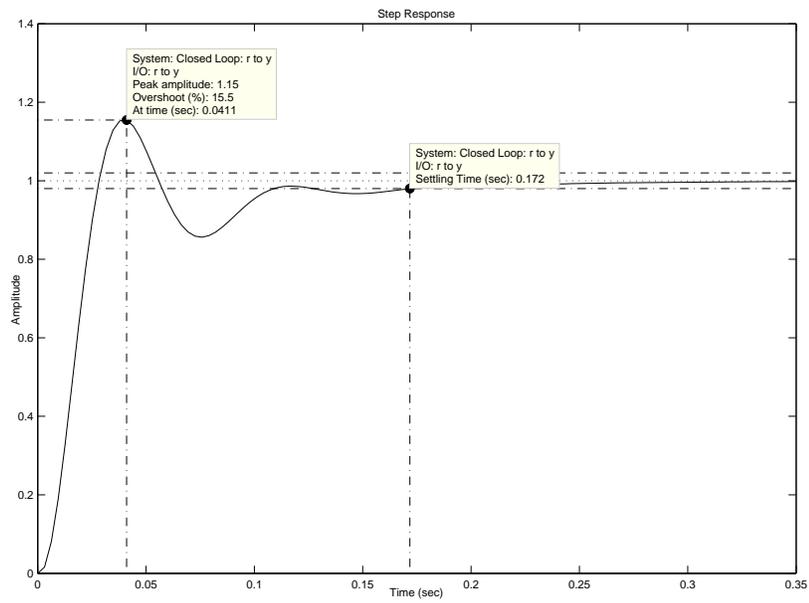


Figure 8: Risposta al gradino della f.d.t. di anello chiuso

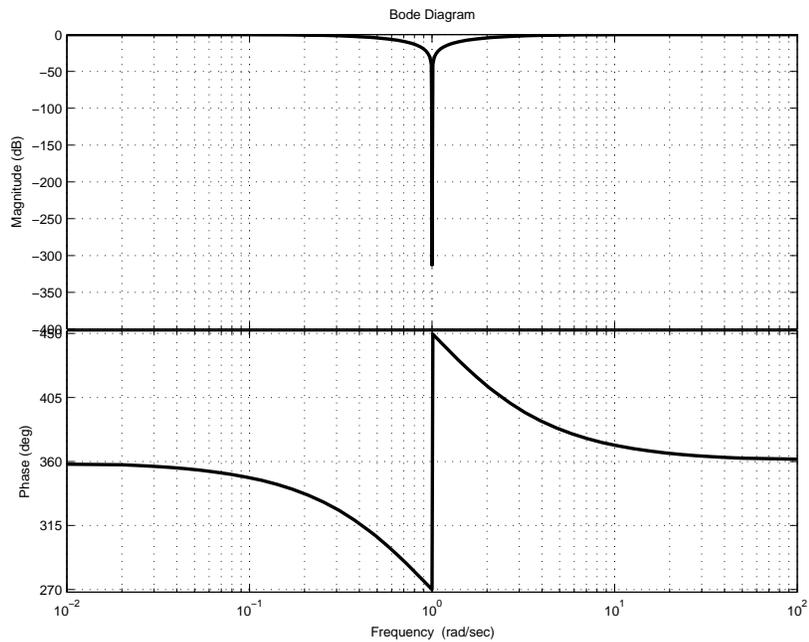


Figure 9: Diagrammi di Bode della f.d.t.  $G(s) = \frac{s^2+1}{s^2+2s+1}$