

Numero di matricola

-	-	$= 10\alpha - 1$	$= 10\beta - 1$	$= 10\gamma - 1$	-

Si consideri il sistema meccanico di fig.1 che rappresenta una sospensione, costituito da due masse mobili (pari rispettivamente a $m_1 = 50 + \alpha$ kg e $m_2 = 500 + \beta$ kg), collegate tra loro e al pneumatico dagli elementi elastici $k = 4000$ N/m, $k_0 = 8000$ N/m e da un dissipatore meccanico $c = 200$ N s/m. Il sistema è attuato da una forza F applicata sulla massa m_2 , mentre un disturbo δ agisce sulla massa m_1 a causa della irregolarità del terreno. Il sistema è descritto dalle seguenti equazioni dinamiche:

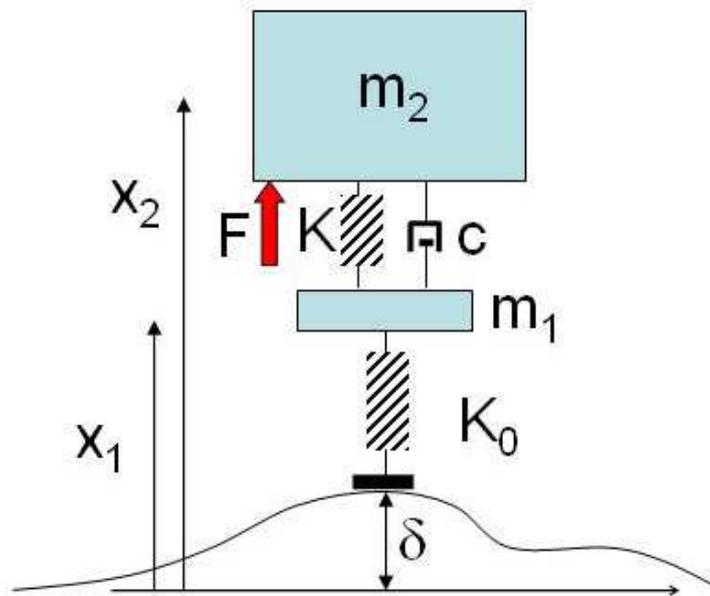


Figure 1: Sospensione

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + k_0(x_1 - \delta) + k(x_1 - x_2) + c(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) = 0 \\ m_2 \ddot{x}_2 + k(x_2 - x_1) + c(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) = F \end{cases} \quad (1)$$

- A) Si determinino le due funzioni di trasferimento tra la posizione della massa m_2 e la forza F e tra la posizione della massa m_2 e il disturbo δ .
- B) Si progetti un controllore in retroazione che usi la misura della posizione della massa m_2 e il controllo F , in modo da soddisfare le seguenti specifiche:
- l'errore a regime nell'inseguimento di riferimenti a gradino sia nullo;
 - il tempo di assestamento del sistema controllato sia $T_a \leq 0.03$ s e la sovraelongazione sia minore del 20%;
 - le componenti del disturbo δ di ampiezza unitaria con pulsazioni minori di 10^{-3} rad/sec siano attenuate di un fattore 100;
- C) Si riporti lo schema a blocchi del sistema di controllo progettato.

Si commentino i passaggi effettuati durante le fasi di progetto del controllore e si corredi la trattazione con i diagrammi di Bode asintotici.

Soluzione

- A) Le funzioni di trasferimento si possono ottenere mediante la forma di stato del sistema, scegliendo come stato $x = (x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2)$. Alternativamente, essendo il sistema lineare, si può direttamente procedere ad applicare la trasformata di Laplace alle due equazioni differenziali, calcolando $X_1(s)$ dalla prima equazione e sostituendo nella seconda equazione.

La funzione di trasferimento del sistema risulta:

$$X_2(s) = G_F(s)F(s) + G_\delta(s)\Delta(s)$$

Dove

$$G_F(s) = \frac{(m_1 s^2 + cs + k + k_0)}{(m_1 m_2 s^4 + c(m_1 + m_2)s^3 + (k(m_1 + m_2) + m_2 k_0)s^2 + ck_0 s + kk_0)}$$

$$G_\delta(s) = \frac{ck_0 s + kk_0}{(m_1 m_2 s^4 + c(m_1 + m_2)s^3 + (k(m_1 + m_2) + m_2 k_0)s^2 + ck_0 s + kk_0)}$$

Sostituendo i valori numerici, per $\alpha = \beta = 0$ si ha

$$G_F(s) = \frac{50s^2 + 200s + 12000}{25000s^4 + 110000s^3 + 6200000s^2 + 1600000s + 32000000}$$

$$G_\delta(s) = \frac{1600000s + 32000000}{25000s^4 + 110000s^3 + 6200000s^2 + 1600000s + 32000000}$$

- B) Le due funzioni di trasferimento $G_F(s)$ e $G_\delta(s)$ hanno lo stesso denominatore e sono asintoticamente stabili in anello aperto. I rispettivi diagrammi di Bode sono riportati in fig.2 e fig.3. Si consideri

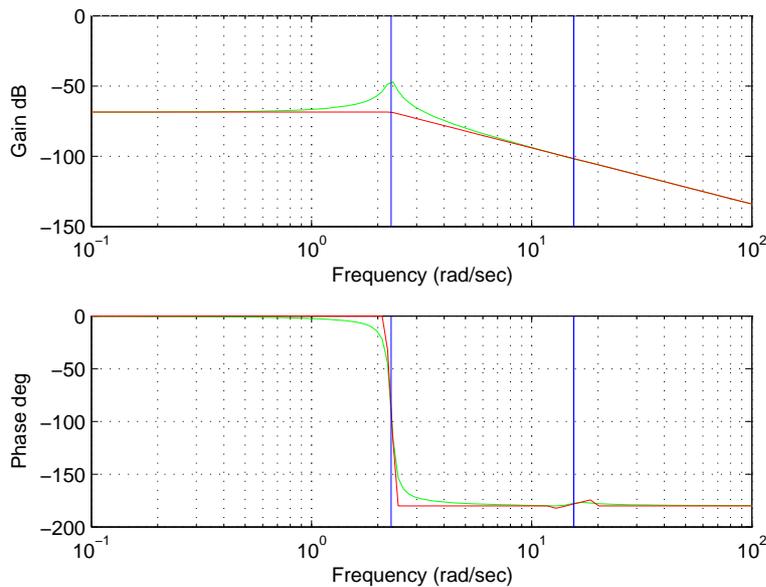


Figure 2: Diagrammi di Bode della funzione di trasferimento $G_F(s)$

ora lo schema di controllo di fig.4. Essendo la funzione di trasferimento $G_F(s)$ asintoticamente stabile in anello aperto e a fase minima, il progetto di un controllore che permetta al sistema chiuso in retroazione di soddisfare le specifiche può essere affrontato direttamente sul diagramma di Bode delle ampiezze.

Si consideri un controllore del tipo $C(s) = \frac{K}{s^r} C_1(s)$, con $C_1(0) = 1$. Per soddisfare la specifica statica, è necessario scrivere la funzione di trasferimento tra l'errore $E(s)$ e il riferimento $R(s)$ e tra l'errore e il disturbo $\Delta(s)$

$$E(s) = \frac{1}{1 + C(s)G_F(s)} R(s) - \frac{G_\delta(s)}{1 + C(s)G_F(s)} D(s).$$

- La prima specifica è soddisfatta inserendo nel controllore un polo nell'origine.

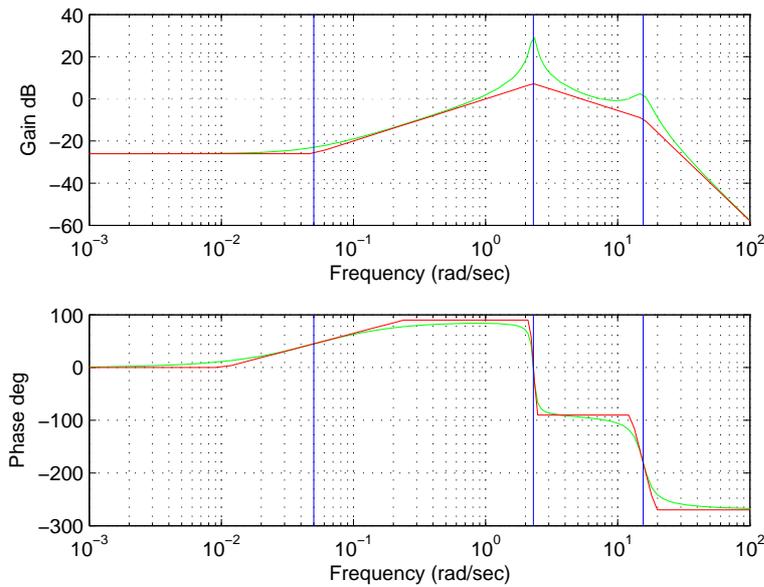


Figure 3: Diagrammi di Bode della funzione di trasferimento $G_\delta(s)$

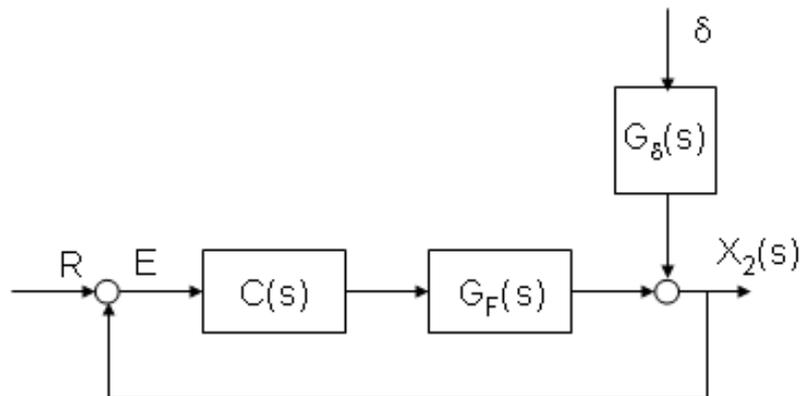


Figure 4: Schema del sistema di controllo

- Per soddisfare la specifica sul tempo di assestamento e sulla sovraelongazione, è sufficiente fare in modo che il sistema in retroazione si comporti come un sistema a un solo polo a pulsazione $\omega_n \geq \frac{3}{T_n} = 100$ rad/s, cioè possa essere approssimato come un sistema ad un polo dominante. È quindi sufficiente che il diagramma delle ampiezze della funzione di trasferimento di anello $C(s)G_f(s)$ tagli l'asse 0 db ad una pulsazione superiore a 100 rad/s, con pendenza di -20 db/dec.

Per far sì che la specifica sia verificata è sufficiente inserire due zeri, ad esempio in -0.02, -0.2, e scegliere di conseguenza $k = 300$; in questo modo si ottiene un sistema asintoticamente stabile in anello chiuso, con margine di fase di circa 90 gradi e con pulsazione di taglio superiore ai 100 rad/s. I diagrammi di Bode della funzione di anello $C(s)G_f(s)$ che soddisfa la specifica sono riportati in fig.5.

- Il legame tra disturbo $\Delta(s)$ e uscita $X_2(s)$ vale, in anello chiuso:

$$X_2(s) = \frac{G_\delta(s)}{1 + C(s)G_f(s)} \Delta(s).$$

Applicando il teorema della risposta armonica, per avere un'attenuazione di un fattore 100 delle componenti del disturbo con pulsazione pari o inferiore a 10^{-3} rad/sec è necessario che sia soddisfatta la relazione $\frac{|G_\delta(j\omega)|}{|1 + C(j\omega)G_f(j\omega)|} \leq \frac{1}{100}$ per $\omega \leq 10^{-3}$ rad/s. Dal momento che, a bassa frequenza, il

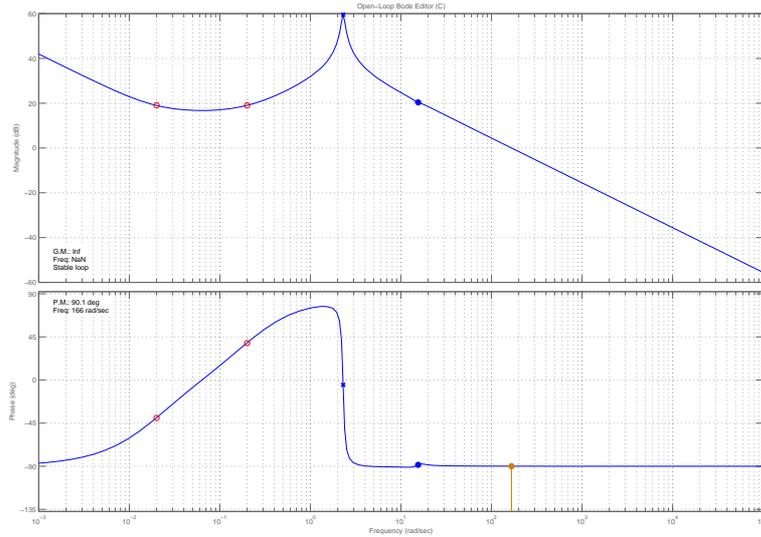


Figure 5: Diagrammi di Bode della funzione di trasferimento di anello $C(s)G_F(s)$

modulo $|C(j\omega)G_F(j\omega)|$ è elevato, la relazione appena scritta può essere sostituita dalla seguente:

$$\frac{|C(j\omega)G_F(j\omega)|}{|G_\delta(j\omega)|} \geq 100$$

La specifica è quindi soddisfatta se per $\omega \leq 10^{-3}$ rad/s vale la condizione:

$$|C(j\omega)G_F(j\omega)|_{db} \geq 40 + |G_\delta(j\omega)|_{db}$$

Se infine si considera che, per $\omega \leq 10^{-3}$ rad/s, $|G_\delta(j\omega)|$ è costante e pari a -26 db (vedere figura 3) la relazione da verificare è:

$$|C(j\omega)G_F(j\omega)|_{db} \geq 14.$$

Come si osserva in fig.5 questa specifica risulta già soddisfatta.

È necessario ora rendere il controllore causale aggiungendo un polo in alta frequenza in modo tale che le specifiche rimangano verificate. Inseriamo, ad esempio un polo in -10^4 .

Il controllore ottenuto risulta quindi:

$$C(s) = 300 \frac{(50s + 1)(5s + 1)}{s(1 + 10^{-4}s)}$$

I diagrammi di bode di $C(s)G_F(s)$ sono riportati in figura 6

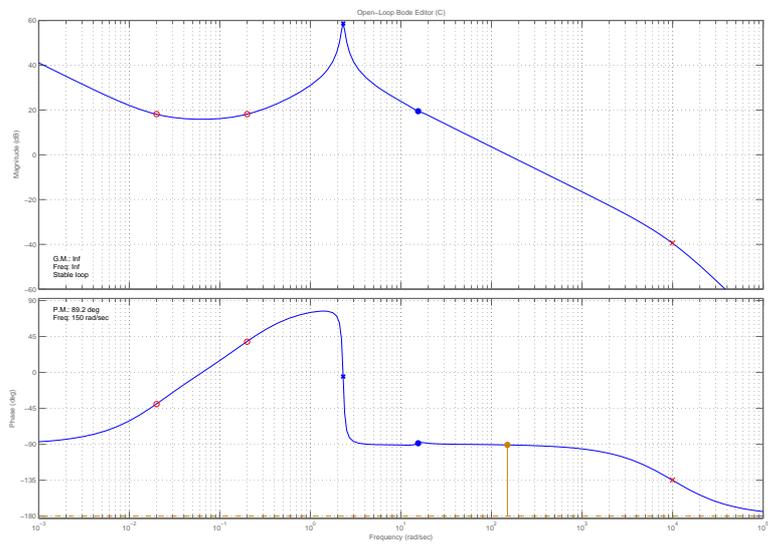


Figure 6: Diagrammi di Bode della funzione di trasferimento di anello $C(s)G_F(s)$