

Figure 1:

Si considerino le equazioni dinamiche del sistema rappresentato in figura:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = \frac{mg \cos \theta \sin \theta - ml \sin \theta \dot{\theta}^2 + K(x_2 - x_1 - r)}{m \sin^2 \theta + M} + \frac{\cos \theta}{(m \sin^2 \theta + M)l} \tau; \\ \ddot{x}_2 = \frac{-K(x_2 - x_1 - r)}{M} + \frac{F}{M}; \\ \ddot{\theta} = \frac{(m+M)g \sin \theta - ml \cos \theta \sin \theta \dot{\theta}^2 + K \cos \theta (x_2 - x_1 - r)}{(m \sin^2 \theta + M)l} + \frac{M+m}{(m \sin^2 \theta + M)m l^2} \tau, \end{cases} \quad (1)$$

dove  $M = 10 \text{ kg}$  è la massa di ogni carrello,  $m = 1 \text{ kg}$  la massa del pendolo,  $l = 1 \text{ m}$  la lunghezza del pendolo.  $K = 20 \text{ kgm/s}^2$  è la costante elastica della molla e  $r = 1 \text{ m}$  è la lunghezza di riposo della molla. Siano  $x_1$  e  $x_2$  le posizioni delle masse mobili e  $\theta$  l'angolo che forma il pendolo rispetto alla verticale.

Il sistema può disporre alternativamente di due diversi attuatori, uno che applica una forza  $F$  alla seconda massa mobile e un secondo che applica una coppia  $\tau$  al fulcro del pendolo. Si dispone inoltre alternativamente di due sensori, che misurano rispettivamente la posizione  $x_2$  e l'angolo  $\theta$ .

- A** Si determinino tutti i moti (che considereremo di riferimento) corrispondenti a ingressi nulli ( $F \equiv 0$ ,  $\tau \equiv 0$ ) e tali per cui rimanga  $\theta \equiv 0$ . Si fornisca una spiegazione al risultato ottenuto.
- B** Si determini la matrice dinamica del sistema linearizzato intorno ai moti di riferimento ottenuti (Suggerimento: si considerino le seguenti variabili di stato  $w_1 = x_2 - x_1$ ,  $w_2 = \frac{(M+m)x_1 + Mx_2 - m\theta l}{2M+m}$ ,  $w_3 = \theta$ ,  $w_4 = \dot{w}_1$ ,  $w_5 = \dot{w}_2$ ,  $w_6 = \dot{w}_3$ ).
- C** Si considerino tutti i sistemi realizzabili con un solo sensore ed un solo attuatore e si studino le proprietà di controllabilità e osservabilità di questi sistemi. Si fornisca una interpretazione fisica dei risultati ottenuti.
- D** Per ognuno dei sistemi si determini se è possibile progettare un regolatore che renda il sistema asintoticamente stabile. Nel un caso di ingresso  $F$  e uscita  $x_2$  si progetti, se possibile, un compensatore basato su regolatore in modo tale che il sistema retroazionato sia asintoticamente stabile.
- E** Si realizzi una simulazione numerica del comportamento del sistema ottenuto connettendo il compensatore ottenuto al passo precedente con il sistema non lineare e si commentino le simulazioni ottenute.
- F** Dato il sistema lineare regolato ottenuto al punto *D* e supponendo che durante degli esperimenti siano disponibili le letture sulla posizione  $x_2$  della seconda massa ottenute ogni  $\Delta T = 0.05 \text{ s}$ , determinare se è possibile implementare una procedura che permetta di ricostruire completamente lo stato iniziale del sistema compensato. Nel caso affermativo descrivere la procedura.

## Soluzione

**A** Il moto del sistema con ingressi nulli e angolo del pendolo identicamente nullo sono caratterizzati da  $\theta = \dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0$ , quindi (dalla terza equazione differenziale) deve valere  $x_2(t) - x_1(t) - r = 0$ , condizione che, sostituita nelle prime due equazioni, implica  $\ddot{x}_1 = 0$  e  $\ddot{x}_2 = 0$ . Si ha anche ovviamente  $\dot{x}_1 = \dot{x}_2$ . Poste le velocità dei carrelli pari a  $v$ , il moto di riferimento è dunque dato da

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x_1(0) + vt \\ x_2(t) &= x_1(0) + r + vt \\ \dot{x}_1(t) &= v \\ \dot{x}_2(t) &= v \\ \theta(t) &= 0 \\ \dot{\theta}(t) &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Il moto di riferimento vede quindi un moto uniforme di traslazione dell'intero sistema dei due carrelli e del pendolo. Per il principio di relatività di Galilei, la fisica del sistema è invariata rispetto a tale moto rigido uniforme, il che comporterà che la dinamica del linearizzato attorno a questo moto dovrà risultare tempo invariante.

**B** Le variabili di stato  $w_1$  e  $w_2$  suggerite corrispondono rispettivamente alla elongazione della molla e alla posizione del baricentro dell'intero sistema meccanico (nella approssimazione che la massa del pendolo trasli orizzontalmente di  $\theta l$  relativamente al carrello). Nelle nuove coordinate, il sistema non lineare risulta

$$\begin{cases} \ddot{w}_1 = \frac{1}{M}F - \frac{\cos w_3}{l(m \sin^2 w_3 + M)}\tau - \frac{K(w_1 - r)}{M} + \frac{ml \sin^2 w_3 w_6^2 - mg \sin w_3 \cos w_3 - K(w_1 - r)}{m \sin^2 w_3 + M} \\ \ddot{w}_2 = \frac{1}{2M+m}F + \frac{(\cos w_3 - 1)(M+m)}{(2M+m)l(m \sin^2 w_3 + M)}\tau + \frac{(-M+m) + m \cos w_3}{(2M+m)(m \sin^2 w_3 + M)}ml \sin w_3 w_6^2 + \\ \frac{(w_1 - r)(\cos w_3 - 1) \cos w_3 m K}{(2M+m)(m \sin^2 w_3 + M)} + \frac{m(M+m)(\cos w_3 - 1)g \sin w_3}{(2M+m)(m \sin^2 w_3 + M)} \\ \ddot{w}_3 = \frac{m+M}{l^2 m(m \sin^2 w_3 + M)}\tau + \frac{(m+M)g \sin w_3 - ml \cos w_3 \sin w_3 w_6^2 + K \cos w_3 (w_1 - r)}{l(m \sin^2 w_3 + M)} \end{cases} \quad (3)$$

Sostituendo i valori del moto di riferimento (2), si ottengono le matrici (costanti, come anticipato)

$$A = \frac{\partial f(\mathbf{w}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{w}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2\frac{K}{M} & 0 & -\frac{mg}{M} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{K}{Ml} & 0 & \frac{(m+M)g}{Ml} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & -0.98 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 10.78 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

**C Ingresso  $F$**  Nelle nuove variabili di stato il vettore di ingresso  $B_F$  vale

$$B_F = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{M} \\ \frac{1}{2M+m} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.1 \\ 0.0476 \\ 0 \end{bmatrix},$$

Calcolando il rango della matrice di raggiungibilità per l'ingresso  $F$  si ottiene che il sistema è completamente raggiungibile. Ciò significa che l'attuatore sul carrello è in grado di far raggiungere qualsiasi configurazione al sistema (e.g. posizione e velocità angolare del pendolo, posizione del baricentro ed elongazione della molla) in un tempo arbitrariamente piccolo (si noti bene: si può imporre la configurazione ad un istante arbitrario, ma solo per un tempo infinitesimo; è fisicamente chiaro che ad esempio uno stato di quiete con molla elongata non sarà mai realizzabile con questo solo ingresso).

**Ingresso  $\tau$**  Il vettore di ingresso  $B_\tau$  è

$$B_\tau = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{Ml} \\ 0 \\ \frac{M+m}{Mml^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.1 \\ 0 \\ 1.1 \end{bmatrix};$$

Calcolando la matrice di raggiungibilità si ottiene che il sistema non è completamente raggiungibile, essendo il suo rango pari a 4. Per individuare quali modi non sono raggiungibili, si può

porre il sistema in forma standard di raggiungibilità, usando la opportuna base di coordinate, come descritto negli appunti.

Si osserva che il sottosistema non raggiungibile ha due autovalori in zero, associati alle variabili  $w_2$  e  $w_5$ . Si ha quindi che l'attuatore alla base del pendolo non è in grado di influenzare posizioni e velocità del baricentro del sistema composto dai due carrelli, come fisicamente evidente.

**Uscita  $x_2$**  Il vettore di uscita  $C_{x_2}$  risulta

$$C_{x_2} = \begin{bmatrix} \frac{M+m}{2M+m} & 1 & \frac{ml}{2M+m} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5238 & 1 & 0.0476 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

la matrice di osservabilità ha rango 6. Fisicamente il fatto è spiegabile notando che la posizione e la velocità angolare del pendolo sono ricostruibili dalla conoscenza della posizione e dalla velocità del secondo carrello.

**Uscita  $\theta$**  Il vettore di uscita  $C_\theta$  è

$$C_\theta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

la matrice di osservabilità ha rango 4. Si nota facilmente che una base del nullo della matrice di osservabilità è formata dai vettori  $(010000)^T$  e  $(000010)^T$  che rappresentano le variabili  $w_2$  e  $w_5$ . Fisicamente il fatto è spiegabile notando che la posizione e la velocità del centro di massa del sistema non è ricostruibile dalla conoscenza dell'angolo  $\theta$  e delle sue derivate successive, esattamente come succede nel caso del pendolo inverso su un carrello mobile.

**D** È possibile progettare compensatori basati sul regolatore che rendono i sistemi asintoticamente stabili solo per il sistema che hanno ingresso  $F$  e uscita  $x_2$  in quanto completamente raggiungibile e osservabile. Negli altri sistemi infatti non sono raggiungibili o osservabili autovalori nulli.

Si consideri ora il sistema con ingresso  $F$  e uscita  $x_2$ , sia  $sys = ss(A, B_F, C_{x_2}, 0)$ , il progetto del compensatore basato sul regolatore si ottiene con i seguenti comandi matlab:

- Retroazione: la matrice di retroazione  $K$  tale che gli autovalori di  $A - BK$  siano in  $p = -34.9174, -3.2844+0.2585i, -3.2844-0.2585i, -1.0018, -0.6909+1.0747i, -0.6909-1.0747i$  è ottenibile dal comando matlab

```
>>p = [ -34.9174 -3.2844+0.2585i -3.2844-0.2585i -1.0018
        -0.6909+1.0747i -0.6909-1.0747i];
>>K=acker(As,Bs,p)
K =
    1.0e+004 *
    0.3640    0.0812    2.7793    0.8503   -0.0316   -0.0784
```

- Stimatore: la matrice  $L$  di iniezione delle uscite sugli stati tale che gli autovalori di  $A - LC$  siano in  $1.0e + 002(-3.5730, -0.0326 + 0.0002i, -0.0326 - 0.0002i, -0.0044 + 0.0180i, -0.0044 - 0.0180i, -0.0100)$  è ottenibile dal comando matlab

```
>>q= 1.0e+002 *[-3.5730 -0.0326+0.0002i -0.0326-0.0002i
               -0.0044+0.0180i -0.0044-0.0180i -0.0100]
>>L=transpose(acker(A',C',q))
L =
    1.0e+005 *
   -0.0613
   -0.1956
    0.8755
    2.8560
   -0.0059
   -0.0032
```

- Compensatore: il compensatore basato sul regolatore si ottiene con il comando matlab `rsys=reg(sys,K,L)`. La funzione di trasferimento  $R(s)$  del regolatore (ottenibile con il comando `tf(rsys)`) risulta

$$R(s) = \frac{-4.824, 10^9 s^5 - 1.574, 10^{10} s^4 - 1.864, 10^{10} s^3 - 6.085, 10^{10} s^2 + 1.791, 10^7 s + 4.116, 10^6}{s^6 + 409.6s^5 + 1.942, 10^4 s^4 - 4.821, 10^8 s^3 - 1.572, 10^9 s^2 - 8.896, 10^8 s - 2.899, 10^9}$$

**E** Lo schema simlink per la simulazione del sistema non lineare controllato con il regolatore progettato sul sottosistema osservabile e raggiungibile del linearizzato è riportato in figura 2. Nel blocco *Sistema non lineare* si trova la dinamica non lineare traslata nelle variabili di stato  $w$ . Nel blocco *Compensatore* ci sono le matrici del compensatore basato sul regolatore.

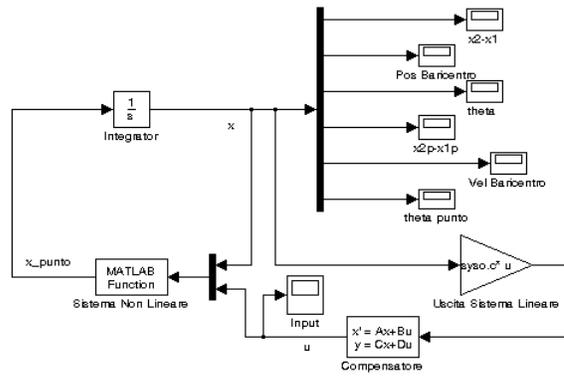


Figure 2: Schema Simulink del sistema non lineare controllato con il regolatore che ha come ingresso  $F$  e come uscita  $x_2$ .

Se nell'integratore le condizioni iniziali vengono poste a zero si ha che gli stati convergono all'origine a meno di errori di ordine di  $10^{-17}$ . Considerando la condizione iniziale  $\theta(0) = 0.01$  si ha che è al di fuori della regione di asintotica stabilità perchè l'andamento delle variabili diverge. Con la condizione iniziale  $\theta(0) = 0.001$  si vede dalle simulazioni che le variabili di stato convergono all'origine.

**F** Il sistema regolato risulta osservabile ed è quindi possibile ricostruire le condizioni iniziali del sistema nel seguente modo: siano  $A_f, B_f, C_f, D_f$  le matrici dinamiche del sistema regolato. Si chiede di discretizzare il sistema con tempo di campionamento di  $\Delta T = 0.005sec$ . Con la tecnica di integrazione di Eulero in avanti si ottiene che le matrici del sistema discretizzato risultano  $A_k = A_f \Delta T + eye(12)$ ,  $B_k = B_f \Delta T$ ,  $C_k = C_f$  e  $D_k = 0$ . Anche il sistema discretizzato risulta completamente osservabile è quindi possibile ricostruire lo stato iniziale del sistema a partire dagli ingressi e dalle uscite in al più 12 passi.

Infatti le letture nei vari passi sono date da

$$\begin{aligned}
 y(0) &= C_t x_0 \\
 y(1) &= C_t x(1) = C_t A_t x_0 + C_t B_t u(0) \\
 &\vdots \\
 y(11) &= C_t x(11) = C_t A_t^1 x_0 + C_t A_t^1 B_t u(0) + \dots + C_t B_t u(10)
 \end{aligned}$$

Lo stato iniziale  $x_0$  si ottiene come soluzione del sistema lineare di 12 equazioni in 12 incognite:  $W = O_t x_0$ , dove  $O_t$  è la matrice di osservabilità in 12 passi e la matrice  $W$  contiene tutti i termini noti. La completa osservabilità del sistema discretizzato assicura che la soluzione del sistema lineare esiste ed è unica:  $x_0 = O_t^{-1} W$ .