

Numero di matricola

-	-	$= \alpha - 1$	$= \beta - 1$
		$= \gamma - 1$	-

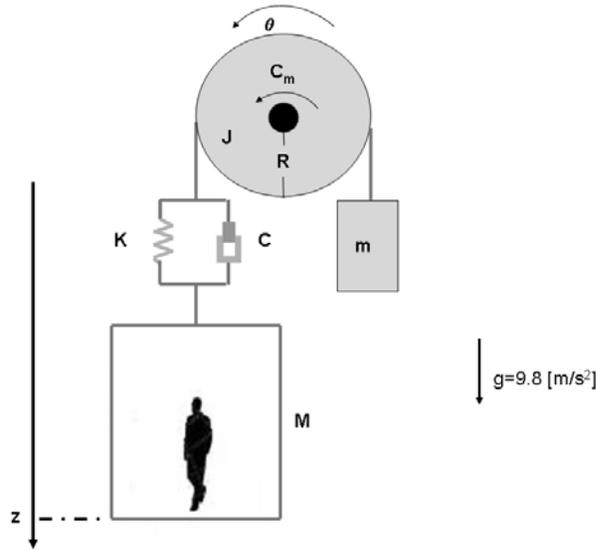


Figure 1: Modello dell' ascensore

Si consideri il modello dinamico di un ascensore illustrato in fig.1 e descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} J\ddot{\theta} = KR(z - \theta R) + CR(\dot{z} - \dot{\theta}R) + C_m(t) - mgR \\ M\ddot{z} = -K(z - \theta R) - C(\dot{z} - \dot{\theta}R) + Mg \end{cases}$$

dove $R = 0.25[m]$ è il raggio della puleggia, $J = 10 + \frac{\alpha}{100}[Kgm^2]$ il suo momento di inerzia, $M = 1000[Kg]$ la massa della cabina, $m = 500 + \frac{\alpha}{10}[kg]$ la massa del contrappeso, $C = 100 + \frac{\beta}{20}[Nsec/m]$ e $K = 500 + \frac{\gamma}{10}[N/m]$ rispettivamente il coefficiente di smorzamento viscoso e la costante elastica del cavo.

Si desidera controllare la quota z della cabina, agendo sulla coppia motrice $C_m(t)$ in modo da compensare la forza di gravità e verificare le seguenti specifiche:

- A Errore a regime nullo nell'inseguimento di riferimenti di posizione e velocità assegnati.
- B Inseguimento di un profilo di accelerazione costante unitario con un errore minore di $0.1 m/sec^2$.
- C Supponendo che la massa M abbia un' incertezza del 10% rispetto al suo valore nominale dovuta, alla presenza di un utente, la quota a regime vari entro $\pm 1cm$.
- D Risposta al gradino con sovraelongazione minore del 5% e con un tempo di assestamento non superiore a $0.15 sec$.
- E Attenuazione di un fattore superiore a 1000 dei disturbi di misura con contenuto frequenziale maggiore di $1.5kHz$.

Soluzione

Il sistema descritto risulta in forma lineare e può essere messo in forma di stato dopo aver valutato il punto di equilibrio facendo attenzione alla presenza dell'accelerazione di gravità. L'ingresso di equilibrio del sistema risulta essere $C_m = gR(m - M)$, che porta il sistema nella configurazione $\theta = 0$ (scelto in modo arbitrario) e $z\grave{e}ta = Mg/K$. Effettuando un opportuno cambiamento di variabili $x_1 = \theta - \bar{\theta}$, $x_2 = z - \bar{z}$, $x_3 = \dot{\theta} = \dot{x}_1$ e $x_4 = \dot{z} = \dot{x}_2$. Si ottiene il seguente sistema dove,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-KR^2}{J} & \frac{KR}{J} & \frac{-CR^2}{J} & \frac{CR}{J} \\ \frac{KR}{M} & \frac{-K}{M} & \frac{CR}{M} & \frac{-C}{M} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{J} \\ 0 \end{bmatrix},$$

e $\mathbf{C} = [0 \ 1 \ 0 \ 0]$.

La funzione di trasferimento per il sistema risulta

$$G(s) = \frac{R(Cs + K)}{s^2[JM s^2 + (JC + CR^2M)s + (KJ + KR^2M)]}$$

Sostituendo i valori numerici (con i parametri α, β, γ nulli) si ottiene:

$$G(s) = 1.25 \cdot 10^{-3} \frac{(s + 10)}{s^2(s^2 + 0.3625s + 3.625)}$$

Il sistema ha uno zero in $s_z = -10$ due poli in $s_p = 0$ e due poli complessi coniugati in $s_{p1,2} = -0.1813 \pm 1.8953j$. Poichè il sistema risulta a fase minima, il progetto del controllore può essere affrontato operando sui diagrammi di Bode.

A L'errore a regime per un riferimento di posizione e di velocità costanti assegnate è nullo essendo il sistema di tipo 2.

B Applicando il teorema del valore finale nel caso di un profilo costante di accelerazione assegnato si ottiene:

$$\lim_{s \rightarrow 0} sE(s) < 0.1;$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + CG} \frac{1}{s^3} < 0.1;$$

Poichè il sistema possiede due poli nell'origine la relazione precedente diventa:

$$K_c > 2900$$

C La specifica sull'incertezza del parametro M può essere studiata mediante la valutazione della funzione sensibilità. Visto che la variabile M rientra solo nel denominatore della $G(s)$ riscriviamo $G(s) = \frac{N_G(s)}{D_G(s, M)}$.

Partendo dall'espressione nominale dell'uscita del sistema ad anello chiuso $Y_c = G_c R = \frac{CG}{1+CG} R$ e considerandone la perturbazione $Y_c + \Delta Y_c = (G_c R + \Delta G_c) R = G_c R + \Delta G_c R$ da cui si ottiene

$$\Delta G_c = \frac{\partial G_c}{\partial M} \Delta M$$

$$\Delta G_c = - \frac{C \frac{\partial G}{\partial M}}{(1 + CG)^2}$$

Si noti che

$$\frac{\partial G}{\partial M} = N_G \frac{\partial \frac{1}{D_G}}{\partial M} = -N_G \frac{1}{D_G^2} \frac{\partial D_G}{\partial M} = -G \frac{Js^2 + CR^2s + KR^2}{JM s^2 + (JC + CR^2M)s + (KJ + KR^2M)}$$

La presenza dei due poli nell'origine nella derivata di G rispetto ad M vengono a cancellare due dei quattro zeri nell'origine di $\frac{1}{(1+CG)^2}$. La funzione ΔG_c ha quindi due zeri nell'origine e di conseguenza

$$\lim_{s \rightarrow 0} \left| \frac{C \frac{\partial G}{\partial M}}{(1 + CG)^2} \right| \frac{M}{100} = 0 < \frac{0.01}{0.11}.$$

La specifica risulta quindi verificata per ogni valore di K_c .

D La specifica sulla sovraelongazione ammette che il sistema in anello chiuso sia approssimabile con un sistema del secondo ordine con un coefficiente di smorzamento pari a $\delta \approx 0.7$ (valutabile dalla relazione $s = e^{\frac{-\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}}$). Sul diagramma di Bode significa imporre approssimativamente un margine di fase di 70° . Inoltre la condizione sul tempo di assestamento impone che la pulsazione naturale dei poli dominanti sia $\omega_n = \frac{3}{\delta T_d} \approx 30 \text{ rad/sec}$. Tale specifica si riflette nell'imporre che il diagramma di Bode delle ampiezze di $\tilde{C}(j\omega)G(j\omega)$ intersechi l'asse a 0 db per pulsazioni superiori a 30 rad/sec . Il controllore finora progettato non verifica questa specifica come si può notare dai diagrammi di Bode riportati in figura 2

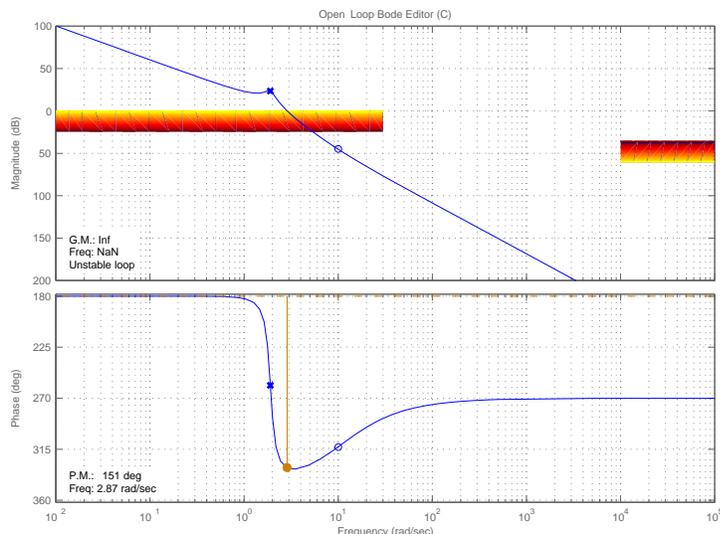


Figure 2: Diagramma di Bode del guadagno di anello con controllore costituito da un guadagno $K_c = 3000$.

Per rispettare questa specifica introduciamo una coppia di zeri complessi coniugati in $-0.2 \pm j0.2$ (rete anticipatrice). Il controllore progettato fino a questo punto ha la forma:

$$C(s) = K_c \frac{1 + 5s + (3.5s)^2}{d(s)}$$

dove il denominatore $d(s)$ è necessario per rendere il controllore causale. Tale controllore rispetta la specifica come si può notare dalla figura 3.

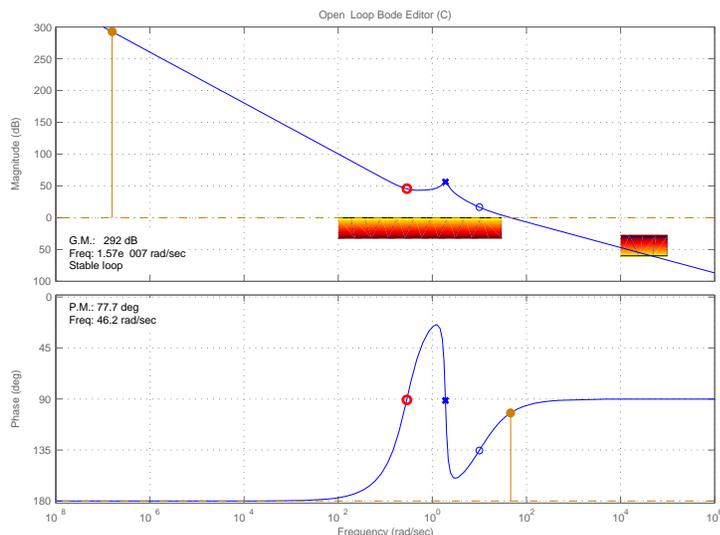


Figure 3: Diagramma di Bode del guadagno di anello con controllore costituito da un guadagno K_c ed una rete anticipatrice.

E Per soddisfare questa specifica occorre che $|C(j\omega)G(j\omega)| < 10^{-3} |1 + C(j\omega)G(j\omega)|$ e quindi $|C(j\omega)G(j\omega)| < -60\text{db}$ per pulsazioni superiori a $\omega \approx 10000\text{rad/sec}$.

Tale condizione può essere verificata introducendo un'azione attenuatrice con un polo in $s_{p3} = -1000$. In figura 4 si può notare che la specifica in alta frequenza è rispettata.

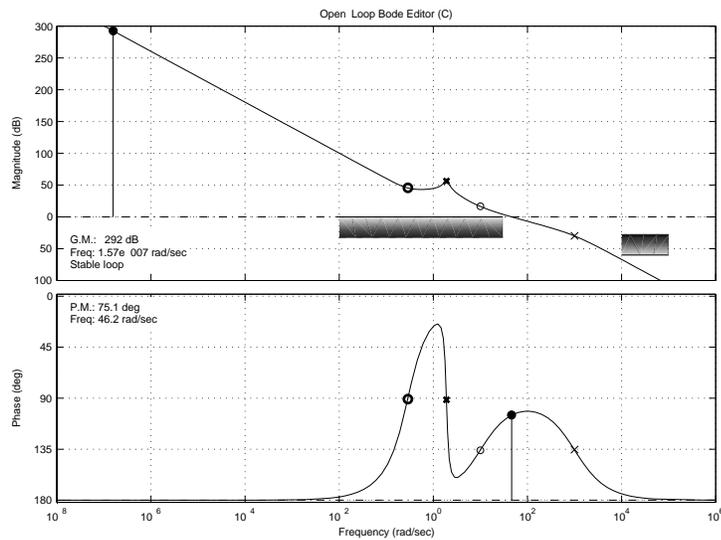


Figure 4: Diagramma di Bode del guadagno di anello con controllore costituito da un guadagno K_c , una rete anticipatrice e un polo in $s = -1000$.

Infine per garantire la causalità del controllore senza violare le specifiche già soddisfatte è necessario inserire un ulteriore polo ad alta frequenza ($s = -10000$). Pertanto il controllore finale ha la seguente forma:

$$C(s) = 3000 \frac{1 + 5s + (3.5s)^2}{(1 + 0.001s)(1 + 0.0001s)};$$

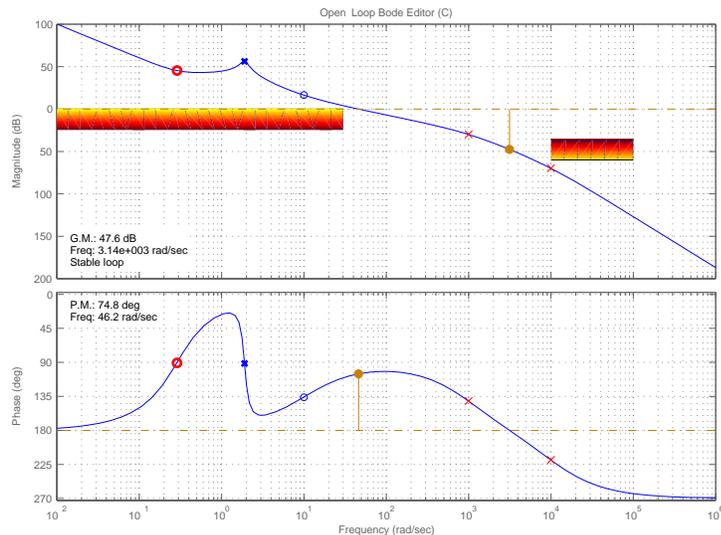


Figure 5: Diagramma di Bode del guadagno di anello con il controllore finale.