

Esercitazione Scritta di Controlli Automatici — 03-06-2003

Si consideri il modello dinamico del sistema di sospensione a levitazione magnetica riportato in fig.1. Il sistema è composto da una sorgente di campo magnetico (schematizzata in figura dalla induttanza L) e da una massa m di materiale ferromagnetico. La massa è sottoposta sia alla forza peso, sia alla forza di attrazione magnetica. La posizione h della massa è misurata mediante opportuni sensori. Il modello

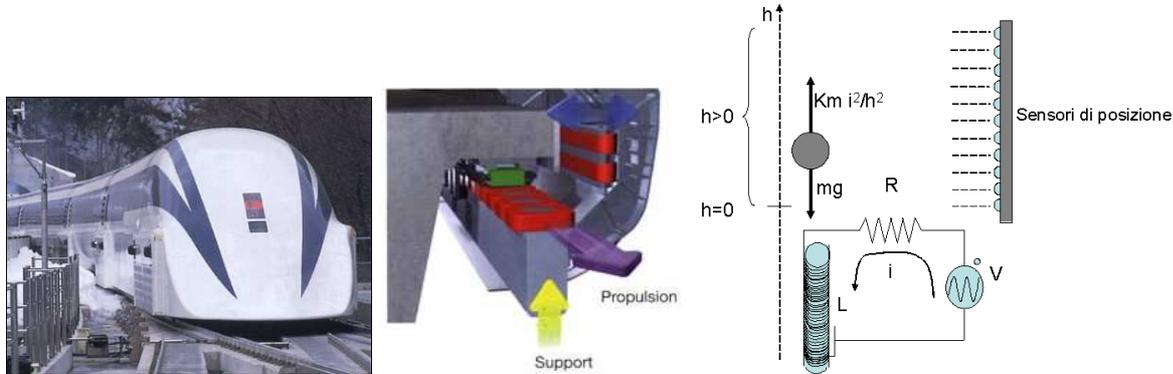


Figura 1: Sistema per la levitazione magnetica e modello relativo.

semplificato del sistema, valido per $h > 0$, è descritto dalla seguente dinamica

$$\begin{cases} L \frac{di}{dt} + Ri & = V \\ m \frac{d^2h}{dt^2} + b \frac{dh}{dt} + K_m \frac{i^2}{h^2} & = mg \end{cases} \quad (1)$$

dove $m = 20 \cdot 10^{-2} [kg]$, $L = (0.5 + \frac{\gamma}{100}) [H]$, $R = 50 [\Omega]$ rappresenta la resistenza del circuito di eccitazione, $K_m = 19.62 [N(m/A)^2]$ è il coefficiente di accoppiamento magnetico, $b = 0.1 [Ns/m]$ il coefficiente di attrito viscoso e V la tensione di controllo del sistema.

- A** Si determini il linearizzato del sistema attorno al punto di equilibrio ad ingresso costante $\bar{V} = 5 [V]$;
- B** Si studi la proprietà di controllabilità del modello linearizzato considerando come ingresso la tensione V . Si studi inoltre se e come varia la osservabilità del modello linearizzato se si considera come uscita la posizione h della massa o la corrente di armatura i .
Si dia infine una interpretazione fisica ai risultati ottenuti.
- C** Indicare se il sistema linearizzato è stabile in anello aperto e stabilizzabile. Si studi inoltre la proprietà di detettabilità del sistema sia per uscita h che per uscita i ;
- D** Alla luce della risposta al punto precedente, indicare se è possibile progettare una rete di controllo che, misurando solo l'altezza h o la corrente i , possa stabilizzare il punto di equilibrio del sistema. In caso affermativo si proceda al progetto di un controllore che garantisca inseguimento asintotico di un ingresso a gradino;
- E** Avvalendosi di strumenti di simulazione, si dia una valutazione del massimo scostamento iniziale della variabile h dalla configurazine di equilibrio (con tensione iniziale al valore nominale e velocità iniziale nulla) per il quale il sistema effettivo (nonlineare), controllato come descritto in precedenza, è ancora n grado di convergere all'equilibrio nominale.

Soluzione

A) Scelte le variabili di stato $(x_1, x_2, x_3) = (h, \dot{h}, i)$, la dinamica non lineare del levitatore magnetico può essere espressa nella seguente forma di stato

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{b}{m}x_2 - \frac{K_m}{m} \frac{x_3^2}{x_1^2} + g \\ \dot{x}_3 &= -\frac{R}{L}x_3 + \frac{V}{L}\end{aligned}$$

Al fine di trovare il punto di equilibrio con un ingresso pari a 5 [V] si pongono a zero le derivate delle variabili di stato. In tal modo si ottiene $\dot{x}_1 = 0 \rightarrow \bar{x}_2 = 0$, $\dot{x}_3 = 0 \rightarrow \bar{x}_3 = \frac{\bar{V}}{R} = 100[mA]$ ed infine $(\dot{x}_2 = 0) \cap (x_2 = 0) \rightarrow -\frac{K_m}{m} \frac{(\bar{V}/R)^2}{\bar{x}_1^2} + g = 0$ da cui $\bar{x}_1 = \sqrt{\frac{K_m}{m} \frac{\bar{x}_3^2}{g}} = \frac{\bar{V}}{R} \sqrt{\frac{K_m}{mg}} = 31.62[cm]$ (la radice negativa deve essere ovviamente scartata).

Il modello nonlineare, riscritto nelle nuove variabili $z = x - \bar{x}$ e $u = V - \bar{V}$, vale

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= -\frac{b}{m}z_2 - \frac{K_m}{m} \frac{(z_3 + \bar{x}_3)^2}{(z_1 + \bar{x}_1)^2} + g \\ \dot{z}_3 &= -\frac{R}{L}(z_3 + \bar{x}_3) + \frac{V}{L} = -\frac{R}{L}z_3 + \frac{u}{L}.\end{aligned}\tag{2}$$

Calcolando il modello linearizzato si ha

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2\frac{K_m}{m} \frac{(z_3 + \bar{x}_3)^2}{(z_1 + \bar{x}_1)^3} & -\frac{b}{m} & -2\frac{K_m}{m} \frac{(z_3 + \bar{x}_3)}{(z_1 + \bar{x}_1)^2} \\ 0 & 0 & -\frac{R}{L} \end{bmatrix}; \\ \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Valutando le derivate nel punto di equilibrio $z = 0, u = 0$, si hanno le matrici

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2\frac{g}{\bar{x}_1} & -\frac{b}{m} & -2\frac{g}{\bar{x}_3} \\ 0 & 0 & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 62.04 & -0.5 & -196.20 \\ 0 & 0 & -10^2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix},$$

B) La matrice di raggiungibilità $\mathbf{R} = [\mathbf{B} | \mathbf{A}\mathbf{B} | \mathbf{A}^2\mathbf{B}]$ del sistema risulta

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2\frac{gL}{\bar{x}_3} \\ 0 & -2\frac{gL}{\bar{x}_3} & \# \\ \frac{1}{L} & \# & \# \end{bmatrix}$$

dove il simbolo $\#$ identifica termini non influenti ai fini della trattazione. La matrice di raggiungibilità ha chiaramente rango pieno, pertanto il sistema ottenuto è completamente raggiungibile. Ciò significa che, variando in modo opportuno la tensione di controllo V , la massa può raggiungere posizioni e velocità arbitrarie; anche la corrente nella induttanza può essere assegnata a piacimento. Si osservi peraltro che il poter raggiungere in un qualsiasi tempo t un valore assegnato dello stato x , non implica che sia possibile seguire una particolare traiettoria $x(t)$ dello stato nel tempo, come è evidente ad esempio per qualsiasi traiettoria con massa ferma al di fuori della condizione di riposo e corrente nulla.

Per quel che riguarda la proprietà di osservabilità, nel caso in cui l'uscita sia $y = h = x_1$ si ottiene $\mathbf{C}_h = [1 \ 0 \ 0]$, da cui la matrice di osservabilità $\mathbf{O}_h = [\mathbf{C}_h | \mathbf{C}_h\mathbf{A} | \mathbf{C}_h^2\mathbf{A}]^T$

$$\mathbf{O}_h = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2\frac{g}{\bar{x}_1} & -\frac{b}{m} & -2\frac{g}{\bar{x}_3} \end{bmatrix}$$

che ha rango pieno. Pertanto il sistema così ottenuto è completamente osservabile. Ciò significa che misurando la posizione della massa h e conoscendo l'ingresso V al sistema, è possibile stimare sia la velocità della massa che la corrente i che scorre nel circuito magnetico. Ciò concorda con la intuizione fisica, per la quale la conoscenza della funzione $h(t)$ determina quella della velocità e

della accelerazione della massa, quindi anche dell'andamento delle forze che agiscono su di essa, ed in ultima analisi della corrente che tali forze genera.

Nel caso in cui la misura disponibile sia invece la corrente $y = i = x_3$, la matrice delle uscite risulta $C_i = [001]$. La matrice di osservabilità del sistema $O_i = [C_i | C_i A | C_i^2 A]$ è ora

$$O_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{R}{L} \\ 0 & 0 & \frac{R^2}{L^2} \end{bmatrix},$$

che ha rango uguale a 1. Ciò indica che, conoscendo esclusivamente la corrente di armatura i , non è possibile stimare nè la posizione h , nè la velocità \dot{h} della pallina: questo concorda con la intuizione fisica, in quanto il moto della massa evolve diversamente, a parità della forza ad essa applicata (quindi a pari andamento della $i(t)$) a seconda della posizione e velocità iniziali.

C) Il sistema linearizzato ha i seguenti autovalori

```
>> autov = eig(A)
ans =
    1.0e+002 *
    0.07630760603679
   -0.08130760603679
   -1.00000000000000
```

pertanto risulta instabile in anello aperto. Dalla instabilità del sistema si deduce l'instabilità del punto di equilibrio precedentemente trovato. La proprietà di raggiungibilità implica che il sistema sia stabilizzabile, poichè risulta possibile, mediante retroazione dello stato, allocare opportunamente tutti gli autovalori (non ci sono autovalori instabili appartenenti al sottospazio non raggiungibile).

Per quanto riguarda la detettabilità, il sistema con uscita h è osservabile, quindi detettabile, mentre il sistema con uscita i non lo è. Si può infatti vedere che dei due autovalori interni al sottospazio di non osservabilità, uno corrisponde all'autovalore instabile: la verifica può essere fatta ad esempio ponendosi in forma standard di osservabilità, oppure mediante il lemma PBH sull'unico autovalore instabile:

```
>>rank([A-autov(1)*eye(3),C])
ans = 2
```

D) Poichè il levitatore magnetico risulta un sistema instabile a catena aperta, il progetto del controllore non può procedere direttamente con i metodi in frequenza (come il progetto sul diagramma di Bode), ma si deve innanzitutto progettare un compensatore stabilizzante. A questo scopo, si può usare la tecnica del luogo delle radici, o le più sistematiche tecniche di allocazione mediante retroazione degli stati, e stima degli stati stessi, come faremo nel seguito.

Per prima cosa assicuriamo che il sistema controllato in retroazione sia tale da reiettare i disturbi costanti. A tal fine inseriamo un polo nell'origine in serie all'impianto con il comando `sys0 = series(sys, tf(1,[1 0]))`. Quindi il nuovo sistema da controllare avrà ordine quattro e forma di stato ottenuta mediante comando `[A, B, C, D] = ssdata(sys0)`.

Al fine di garantire un inseguimento del gradino piuttosto pronto, scegliamo di allocare i poli del sistema in anello chiuso mediante retroazione dello stato in $p = [-30, -40, -50, -60]$. Il vettore K tale che $eig(A - BK) = p$ si ottiene tramite il comando Matlab

```
>>K=acker(A,B,p)
K=10^3 [-9.17 -0.89 -0.03 0.03]
```

Non potendo disporre di tutto lo stato, è poi necessario progettare uno stimatore, al quale si assegnerà una dinamica piuttosto veloce per non degradare le performance del sistema di controllo. Com è stato mostrato al punto C), è possibile progettare uno stimatore nel caso in cui venga misurata la posizione h della massa. In tal caso, supponiamo di voler porre i poli dello stimatore in $q = -2p = [-110, -120, -130, -140]$. Il valore corrispondente della matrice L di

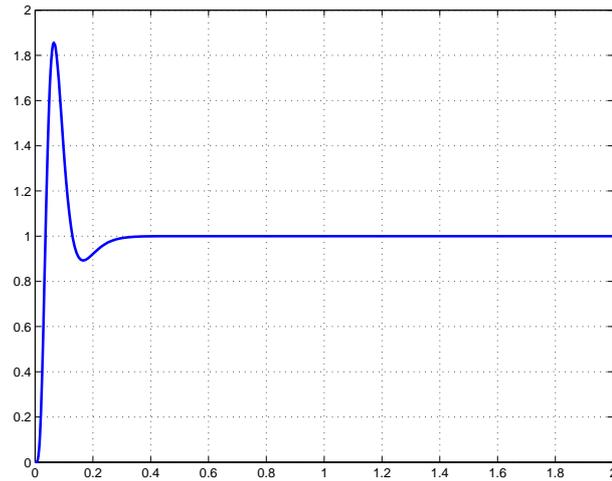


Figura 2: Risposta al gradino del sistema controllato.

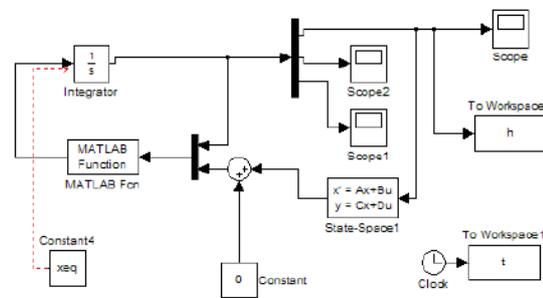


Figura 3: Schema a blocchi per la simulazione

iniezione delle uscite sugli stati, che impone $eig(A - LC) = q$, è calcolato mediante il comando $L=transpose(acker(A',C',q))$.

Il compensatore basato sul regolatore appena progettato si costruisce in due passi. Il primo passo consiste nell'utilizzare il comando $rsys=reg(sys0,K,L)$ che realizza il regolatore. Il secondo passo consiste infine nello spostare il polo nell'origine, precedentemente inserito nell'impianto, all'interno del controllore. In fig.2) è riportata la risposta al gradino del sistema ottenuto.

E Uno schema Simulink del sistema stabilizzato e' riportata in fig.3. dove il blocco Simulink *Matlab Function* contiene la seguente funzione:

```
function out=levitor(in)
m=20*10^-2;
b=0.1;
K_m= 19.62;
L=0.5;
R=50;
g=9.81;

x1_eq = (5/R)*sqrt(K_m/(m*g));
x2_eq = 0;
x3_eq = (5/R);

x1=in(1);
x2=in(2);
```

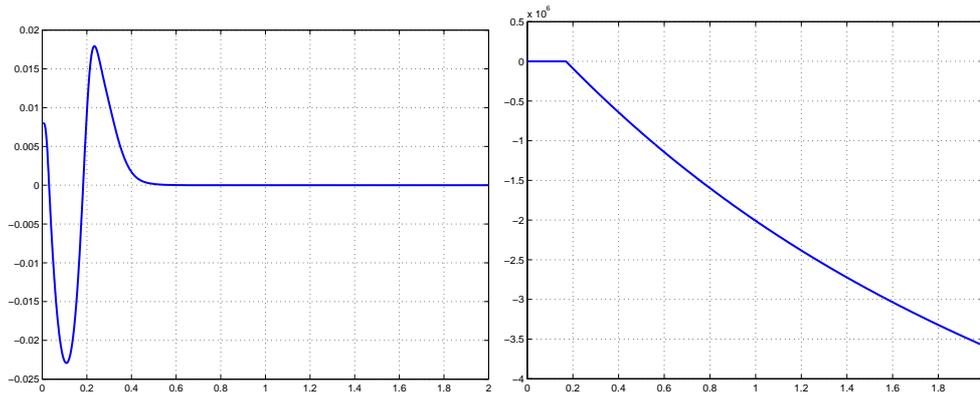


Figura 4: Grafici delle risposte del sistema 2 con condizioni iniziali $(0.008, 0, 0)$ (sinistra) e $(0.0085, 0, 0)$ (destra). Come si nota, per velocità e correnti iniziali nominali, il massimo scostamento iniziale tollerabile risulta di circa $8[mm]$.

```
x3=in(3);
V=in(4);

%Caso lineare
out(1)=x2;
out(2)=2*K_m*x3_eq^2*x1/(m*x1_eq^3)-b*x2/m-2*K_m*x3_eq*x3/(m*x1_eq^2);
out(3)=-R*x3/L+V/L;
%Caso non lineare
% out(1)=x2;
% out(2)=-b*x2/m -(K_m/m)*(((x3+x3_eq)^2)/((x1+x1_eq)^2))+g;
% out(3)=-R*x3/L+V/L;
```

mentre il blocco *State-Space* contiene le matrici del regolatore precedentemente progettato.

Effettuando varie simulazioni con condizioni iniziali $z(0) = (z_1(0), 0, 0)$ al variare dello scostamento iniziale $z_1(0) = h(0) - 31.62$, si verifica che il sistema converge all'equilibrio $z = 0$ per scostamenti iniziali inferiori agli $8[mm]$, e diverge per scostamenti superiori (si veda la fig.2): in quel campo, il controllore progettato sul linearizzato non è più in grado di controllare il sistema nonlineare.