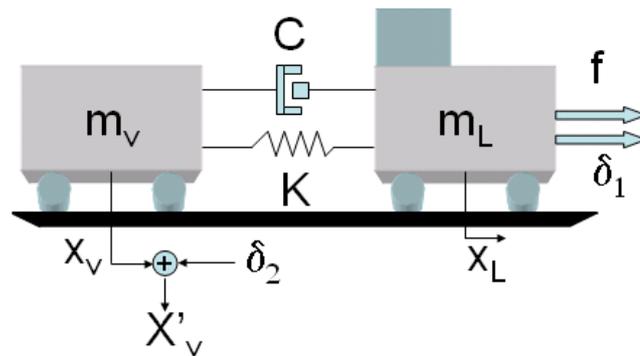


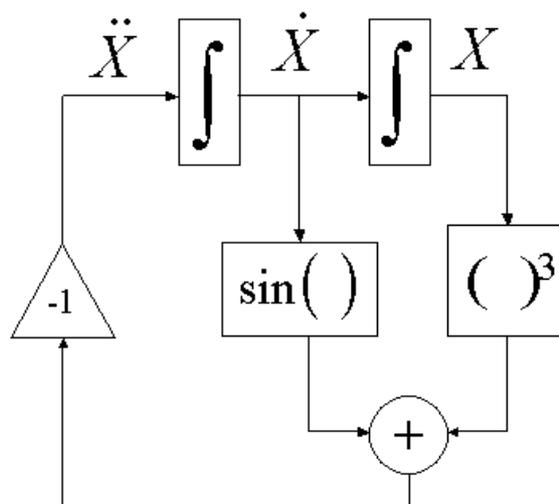
- (NO/VO) Dato il sistema di un veicolo trattore ed un rimorchio descritto in figura



sia f la forza di trazione (che e' controllabile), δ_1 una forza di disturbo ignota ma costante (legata agli attriti coulombiani), e siano $m_V = 1$, $m_L = 2$, $K = 2$, $C = 2$. Si vuole controllare la velocita' del rimorchio, utilizzando la misura della velocita' stessa (affetta però da rumore di misura δ_2).

A Progettare un sistema di controllo che garantisca le seguenti specifiche:

1. La velocità del rimorchio deve ottenere un valore costante assegnato come riferimento in modo esatto almeno a regime, nonostante il disturbo δ_1 ;
 2. Quando sia richiesta una accelerazione unitaria e costante al rimorchio, esso deve garantire un errore di inseguimento inferiore a 0.1
 3. Qualora il sistema presenti delle variazioni parametriche, garantire che la sensibilità dell'anello sia $\leq 1\%$ per ingressi con pulsazioni inferiori a $1rad/sec$.
 4. Nella risposta al gradino, si chiede tempo di assestamento inferiore a $0.1sec$ e sovraelongazione percentuale massima inferiore a 30% ;
 5. Reiezione del rumore di misura a frequenze maggiori o uguali di $160Hz$, nella misura di almeno lo 0.01;
- VO Dato il sistema non lineare rappresentato in figura



B Trovare i punti di equilibrio e discuterne la stabilità (suggerimento: determinare una funzione di Lyapunov del tipo $V = x_1^4 + \alpha x_2^2$).

Soluzione

A Al fine di ricavare la funzione di trasferimento del sistema scriviamo le equazioni della dinamica ottenendo:

$$\begin{cases} M_V \ddot{x}_V = K(x_L - x_V) + C(\dot{x}_L - \dot{x}_V) \\ M_L \ddot{x}_L = K(x_V - x_L) + C(\dot{x}_V - \dot{x}_L) + f + \delta_1. \end{cases}$$

Se trasformiamo entrambe le equazioni della dinamica nel dominio della variabile complessa s , e supponendo il sistema inizialmente rilassato, si ottiene:

$$\begin{cases} M_V s^2 X_V = K(X_L - X_V) + Cs(X_L - X_V) \\ M_L s^2 X_L = K(X_V - X_L) + Cs(X_V - X_L) + F + \Delta_1. \end{cases}$$

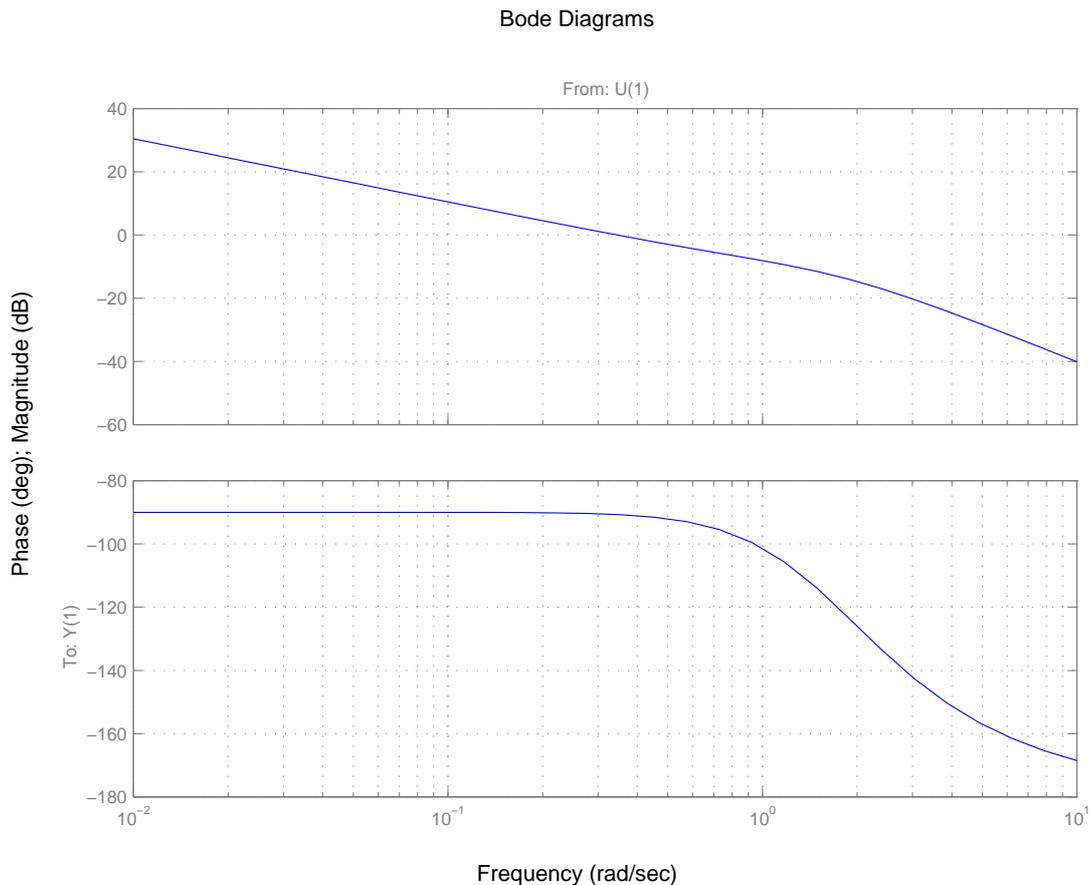
Ricavando $X_L = \frac{(M_V s^2 + Cs + K)}{(K + Cs)} X_V$ dalla prima equazione e sostituendolo nella seconda abbiamo:

$$\frac{(M_L s^2 + Cs + K)(M_V s^2 + Cs + K)}{(K + Cs)} X_V - (K + Cs) X_V = F + \Delta_1$$

dalla quale prendendo come uscita la velocità della massa m_V ($y(t) = \frac{dx_V}{dt}$), e sostituendo i valori numerici, si ottiene

$$Y(s) = \frac{(K + Cs)s}{(M_L s^2 + Cs + K)(M_V s^2 + Cs + K) - (K + Cs)^2} (F(s) + \Delta_1(s)) = \frac{(1 + 1s)}{3s(\frac{1}{3}s^2 + 1s + 1)} (F(s) + \Delta_1(s)).$$

I diagrammi di Bode della f.d.t. $G(s) = Y(s)/F(s)$ sono riportati di seguito:



Essendo l'impianto dato stabile e a fase minima, il progetto di prima massima può essere condotto supponendo una semplice configurazione dell'anello con un controllore $C(s)$ in catena diretta (da progettare), ed una retroazione unitaria negativa, ed operando direttamente sul diagramma di Bode delle ampiezze del sistema in catena aperta, cioè di $C(s)G(s)$ (vedi figura)

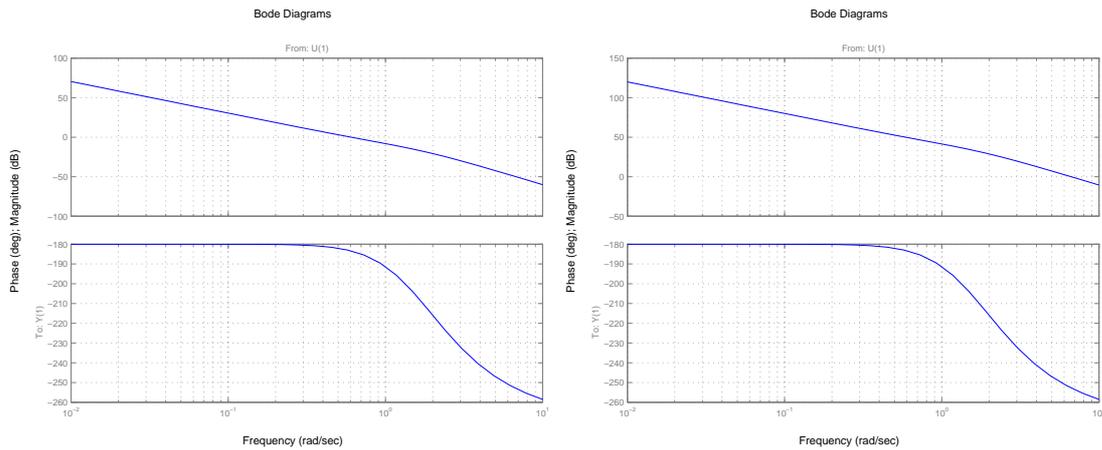
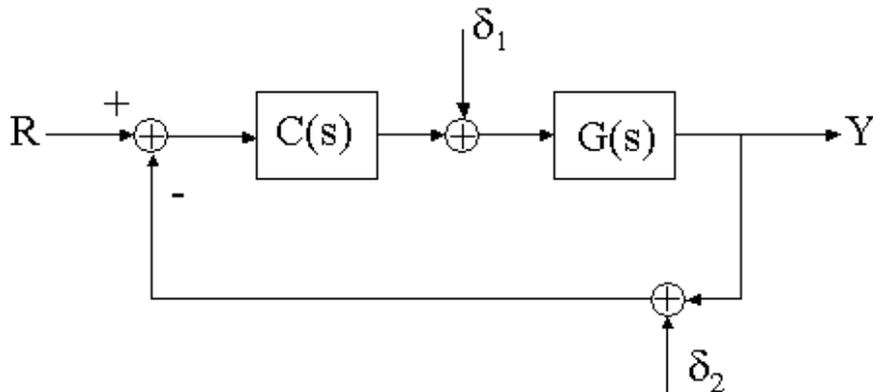


Figure 1: Diagrammi di Bode per i sistemi $\frac{1}{s}G(s)$ (sinistra) e $\frac{300}{s}G(s)$ (destra).



La trasformata dell'uscita in funzione di tutti i segnali presenti (riferimento e disturbi), risulta

$$Y = \frac{CG}{1 + CG}R - \frac{CG}{1 + CG}\delta_2 + \frac{G}{1 + CG}\delta_1.$$

Facciamo riferimento al progetto di un controllore del tipo

$$C(s) = \frac{K}{s^t}\hat{C}(s), \quad \text{con } \hat{C}(0) = 1$$

Iniziamo considerando la scelta del *tipo* t e della costante di guadagno K del controllore basandoci sulle specifiche statiche

Per verificare la prima specifica é necessario introdurre un polo nell'origine a monte del disturbo δ_1 . Da notare che l'inserimento del polo garantisce anche la seconda specifica. I diagrammi di Bode del sistema cosí ottenuto sono riportati in fig.1 (a sinistra).

Da questo diagramma si nota che il modulo in decibel del guadagno di anello alla pulsazione $\omega = 1 \text{ rad/sec}$ é insufficiente (minore di uno) ai fini della terza specifica. Per soddisfare la specifica sulla robustezza é comunque sufficiente incrementare il guadagno del controllore al valore $K = 300$ (cui corrisponde il diagramma di fig.1, a destra).

La specifica sulla sovralongazione ammette che il sistema in anello chiuso sia approssimabile con un sistema del secondo ordine con smorzamento dei poli dominanti dell'ordine di 0.35 (come si ricava dalla espressione della sovralongazione dei sistemi di secondo ordine $s = e^{-\frac{\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}}$). Sul piano di Bode, questo significa che si ammette un margine di fase $\phi_M \approx 35^\circ$. In termini del solo diagramma delle ampiezze, questa specifica si riflette grossolanamente nel richiedere che l'attraversamento dell'asse a 0 db avvenga con pendenza pari anche a -2 , purché non lontano da un precedente tratto a pendenza -1 o 0 .

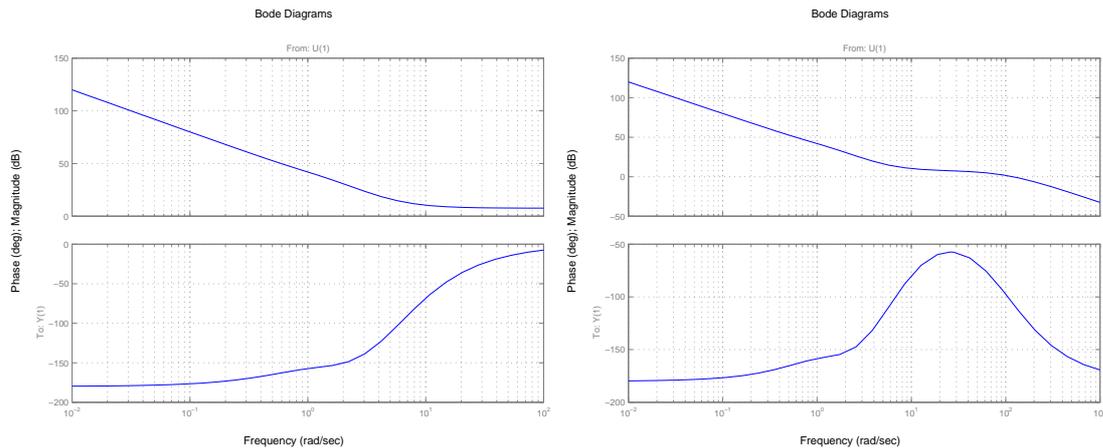


Figure 2: Diagrammi di Bode per le fasi successive del progetto

La specifica sul tempo di assestamento, per il caso di sistema in anello chiuso a due poli dominanti stabilito sulla base della precedente specifica, indica che la pulsazione naturale dei due poli deve essere $\omega_N \geq 3/\delta T_a \approx 100 \text{ rad/sec}$. Questa specifica si riflette nel chiedere che il diagramma delle ampiezze di $C(j\omega)G(j\omega)$ intersechi l'asse a 0 db a pulsazioni superiori a 100 rad/sec .

Per soddisfare queste specifiche, é possibile procedere ad esempio nel seguente modo: inserire tre zeri alla pulsazione $\omega = 5 \text{ rad/sec}$ in modo da introdurre un termine di anticipo in fase ottenendo i diagrammi di Bode in fig.2 (sinistra). Per avere un margine di fase superiore a 35° , si può poi inserire due poli alla pulsazione $\omega = 100 \text{ rad/sec}$, ottenendo il diagramma di Bode riportato in fig.2 a destra.

Dal diagramma si può leggere che il margine di fase é sicuramente superiore a 35° . La banda a 0 db risulta circa 100 rad/sec che comporta un tempo di assestamento inferiore a quello richiesto nella specifica (5). Il controllore sinora progettato ha la seguente funzione di trasferimento

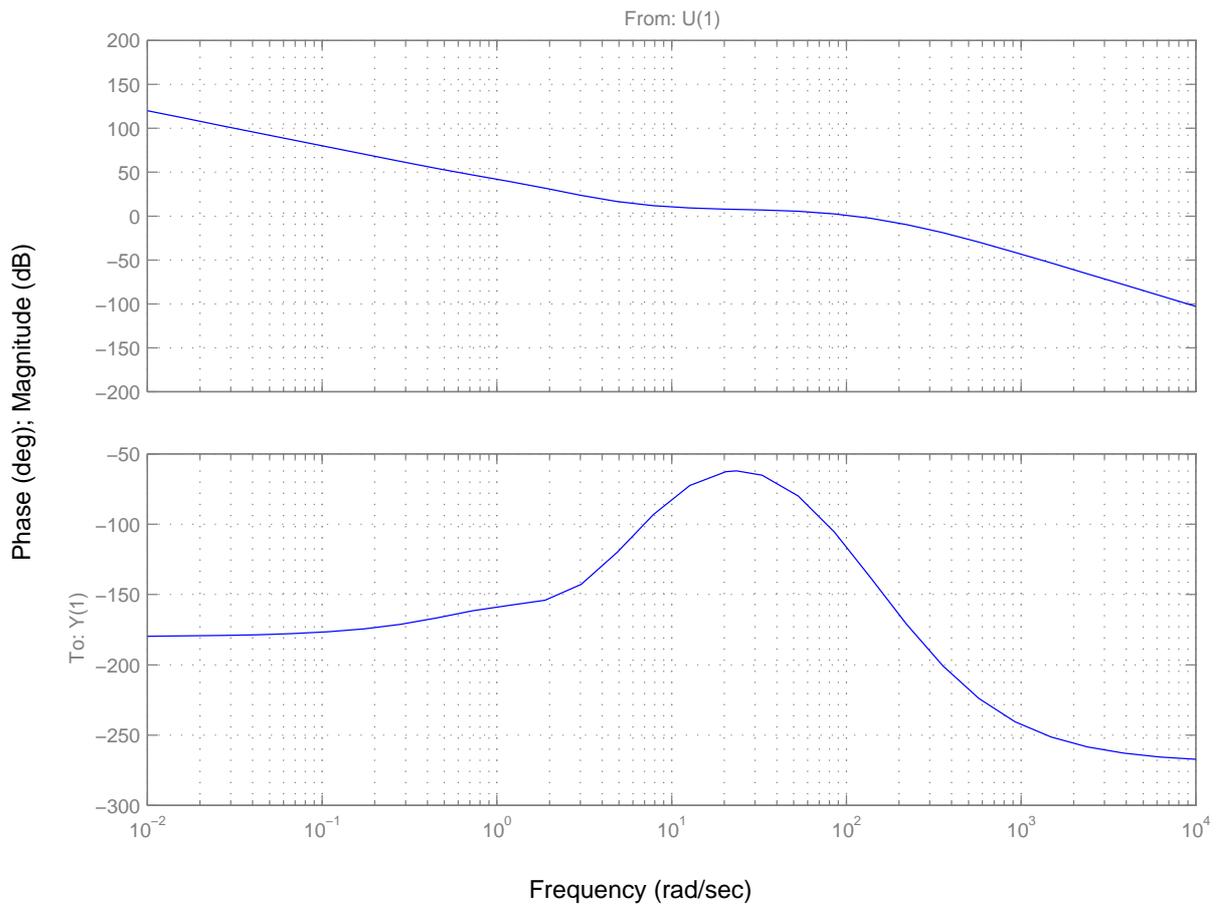
$$C(s) = 300 \frac{\left(1 + \frac{s}{5}\right)^3}{s \left(1 + \frac{s}{100}\right)^2}$$

Osservando il diagramma di Bode si nota che alla pulsazione $\omega = 1000 \text{ rad/sec}$ (circa 160 Hz) il modulo del guadagno d'anello risulta superiore a quello richiesto nella specifica sulla reiezione dei rumori di misura. Per ridurre ulteriormente il guadagno d'anello introduciamo un polo alla pulsazione $\omega = 300 \text{ rad/sec}$. Il controllore finale ottenuto risulta:

$$C(s) = 300 \frac{\left(1 + \frac{s}{5}\right)^3}{s \left(1 + \frac{s}{100}\right)^2 \left(1 + \frac{s}{300}\right)}$$

con i digrammi di Bode seguenti del guadagno d'anello

Bode Diagrams



B L'equazione che descrive il sistema risulta:

$$\ddot{X} = -X^3 - \sin(\dot{X}),$$

Scelto come vettore di stato $x = (X, \dot{X}) = (x_1, x_2)$, si ottiene la relativa forma di stato:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1^3 - \sin(x_2) \end{cases}$$

L'unico punto di equilibrio risulta l'origine $x = (0, 0)$. Il linearizzato del sistema é il seguente:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3x_1^2 & -\cos(x_2) \end{pmatrix}$$

che, calcolato nell'origine, vale

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Il linearizzato ha autovalori $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$. La presenza dell'autovalore nullo non ci permette di dedurre alcunché riguardo alla stabilità del sistema.

Ricorriamo alla seguente funzione di Lyapunov:

$$V(x_1, x_2) = x_1^4 + \alpha x_2^2,$$

la cui derivata risulta:

$$\dot{V} = 4x_1^3 x_2 + 2\alpha x_2 (-x_1^3 - \sin(x_2)),$$

e, ponendo $\alpha = 2$, si ha

$$\dot{V} = -4x_2 \sin(x_2).$$

Essendo il segno di $\sin(x_2)$ concorde a quello di x_2 per $-\pi < x_2 < \pi$, in tale intervallo la derivata della funzione di Lyapunov risulta semidefinita negativa. Sempre in tale intervallo i punti in cui si annulla sono del tipo $\Sigma = \{(0, K)\}$. Utilizzando il teorema di Ljapunov/Krasovskij in tale insieme, e notando che l'unica traiettoria contenuta in Σ è l'origine, possiamo dedurre l'asintotica stabilità del punto di equilibrio.