Esame di Regolazione e Controllo dei Sistemi Meccanici – 12–4–2001

Nome e Cognome:						
Anno di frequenza:						
Numero di matricola						
	–	–	$= \alpha - 1$	$= \beta - 1$	$= \gamma - 1$	$= \delta - 1$

A (pt. 3) Tracciare i diagrammi di Bode, Nyquist e Nichols relativi al sistema:

$$G(s) = \frac{10\delta}{(\beta s + 1)(0.01\gamma s + 1)}$$

Determinare il valore della pulsazione di taglio.

B (pt. 8) Per il sistema di cui al punto **A**, progettare un controllore che realizzi in prima approssimazione le seguenti specifiche:

- errore a regime al gradino nullo;
- errore a regime alla rampa ≤ 0.01 %;
- margine di fase di circa $\pi/4$;
- banda passante in anello chiuso compresa tra 100 e 200 (rad/sec);

Data la f.d.t. di un sistema tempo discreto

$$G(z) = \frac{z - 2.5}{(z - 0.9)(z + 0.2a)^2},$$

in funzione del parametro a:

C (pt. 3) scrivere le matrici **A**, **B**, **C**, **D** di una realizzazione nello spazio degli stati con dimensione 3;

D-V (pt. 3) discutere la stabilitá del sistema;

D-N (pt. 3) discutere la raggiungibilitá e la osservabilitá del sistema;

Dato il sistema

$$\beta \ddot{x} + \gamma \dot{x}^3 + \sin x = u$$

E (pt. 2) Scrivere una realizzazione del sistema nello spazio degli stati;

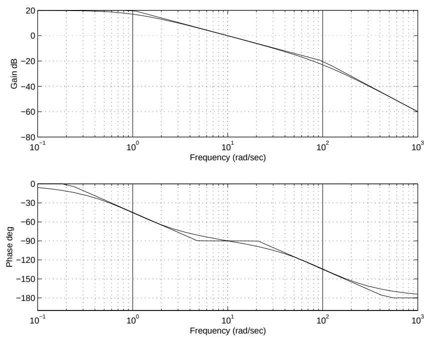
F (pt. 3) Trovare i punti di equilibrio con ingresso nullo e studiarne la stabilità;

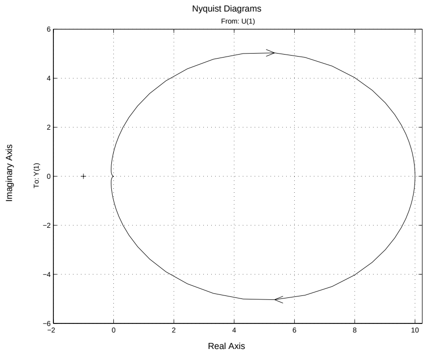
G (pt. 4) Tracciare qualitativamente il luogo delle radici per il sistema $G(s) = \frac{K(s+5)}{s^2(s^2+0.5\delta s+10)}$ nel caso di retroazione unitaria negativa e per guadagni K variabili fra 0 e $+\infty$.

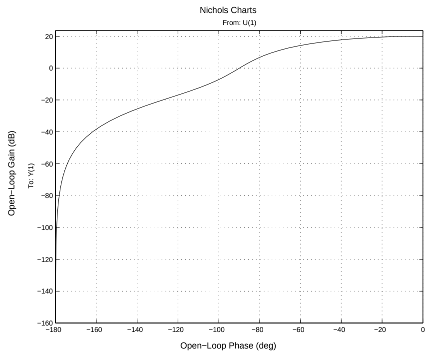
H (pt. 4) Discutere la stabilità della f.d.t. $G(s) = \frac{10s}{(s-1)(s^2+\alpha s+10)}$ in anello chiuso con il criterio di Nyquist.

Soluzione

A) Il sistema e' gia' in forma di Bode. Il diagramma asintotico di Bode contiene un contributo costante pari a 10δ (in db), e due poli a parte reale negativa. Il tracciamento dei diagrammi è immediato. Le figure seguenti riportano esempi di diagrammi di Bode, Nyquist e Nichols per $\beta = \gamma = \delta = 1$.







La pulsazione di taglio è ottenuta facilmente considerando che il valore di $|G(\jmath 100/\gamma)| = 20\ \mathsf{Log}\,(10\delta) - 20(\ \mathsf{Log}\,100/\gamma - \mathsf{Log}\,1/\beta)$. Se quindi $0.1\gamma\delta < \beta$, la pulsazione di taglio è data da $\frac{10\delta}{\beta}$. Se altrimenti $0.1\gamma\delta \geq \beta$, $\omega_T = 100\sqrt{\frac{0.1\delta}{\beta\gamma}}$.

B) Il sistema presenta un polo in $-\frac{1}{\beta}$ ed un polo in $-\frac{100}{\gamma}$; poiché entrambi i poli hanno parte reale negativa, si puo' procedere semplicemente con la sintesi sul diagramma delle ampiezze di Bode o con il metodo della sintesi diretta. Fissiamo un controllore $C(s) = \frac{K}{s^t}C_0(s)$, con $C(0) = 1$. Le specifiche statiche richiedono un integratore ($t = 1$); la costante K viene determinata in base al requisito sull'errore a regime sulla rampa: tale errore è pari a $\frac{1}{K10\delta}$, quindi occorre che sia $K \geq \frac{10}{\delta}$. Con un valore di $K = \frac{10}{\delta}$ e $t = 1$, il diagramma viene ad attraversare l'asse a zero db con pendenza -3 ad una pulsazione inferiore alla banda richiesta.

Per rispettare il requisito sul margine di fase e la banda passante, si può fare in modo che il polo non nullo a modulo minore coincida proprio con la pulsazione di taglio. Quindi $C_0(s)$ deve avere due zeri coincidenti coi poli della $G(s)$. Per $K = \frac{10}{\delta}$ la pulsazione di taglio, avendo cancellato le singolarità a pulsazione $< 100 rad/sec$ sarebbe appunto $100 rad/sec$. Essendo questa una approssimazione per difetto della banda passante reale, il dato può essere accettabile: in ogni caso, si può aumentare la banda semplicemente utilizzando un guadagno più alto di quello strettamente necessario alle precedenti specifiche. Scegliendo $\frac{10}{\delta} < K < \frac{20}{\delta}$ si ottiene una pulsazione di taglio compresa tra 100 e 200 rad/sec. Ad esempio, scegliendo $K = \frac{15}{\delta}$ si ottiene una pulsazione di taglio pari a 150 rad/sec. In corrispondenza di tale pulsazione si può collocare un polo, cosicchè il diagramma di Bode del sistema complessivo $G(s)C(s)$ in anello aperto presenti un "ginocchio" in corrispondenza della pulsazione di taglio. Per motivi di fisica realizzabilità, si può poi porre un ulteriore a frequenze alte, tali da non alterare il progetto sin qui fatto (ad esempio, una decade dopo la pulsazione di ginocchio). La funzione di trasferimento complessiva del controllore è quidni la seguente:

$$C(s) = \frac{15/\delta(\beta s + 1)(0.01\gamma s + 1)}{s(\frac{s}{150} + 1)(\frac{s}{1500} + 1)}$$

C) Esprimendo la funzione di trasferimento nella forma:

$$G(z) = \frac{z - 2.5}{z^3 + (0.4a - 0.9)z^2 + (0.04a^2 - 0.36a)z - 0.036a^2}$$

si puó scrivere una rappresentazione di stato nella forma canonica di controllo, ossia

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0.036a^2 & 0.36a - 0.04a^2 & 0.9 - 0.4a \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -2.5 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{D} = 0$$

D-V) Il sistema presenta un polo semplice in 0.9, che, avendo modulo minore di 1, non dà problemi di stabilità, ed un polo doppio in $0.2a$; per $|a| \geq 5$ tale polo risulta avere modulo maggiore od uguale ad 1 e quindi il sistema risulta instabile; se invece è $|a| < 5$ il sistema è stabile.

D-N) Il sistema sopra descritto é, per cotruzione, completamente raggiungibile. Il sistema è anche completamente osservabile se e solo se non vi sono cancellazioni nella f.d.t., quindi se $a \neq -12.5$.

E) Ponendo $z_1 = x$ e $z_2 = \dot{x}$ si ottiene la rappresentazione:

$$\begin{aligned} \dot{z_1} &= z_2 \\ \dot{z_2} &= -\frac{1}{\beta}\sin(z_1) - \frac{1}{\beta}\gamma z_2^3 + \frac{1}{\beta}u \end{aligned}$$

F) I punti di equilibrio a ingresso nullo sono rappresentati da tutte le coppie $z_1 = k\pi$, $z_2 = 0$ con k intero. La matrici del modello linearizzato sono date quindi da

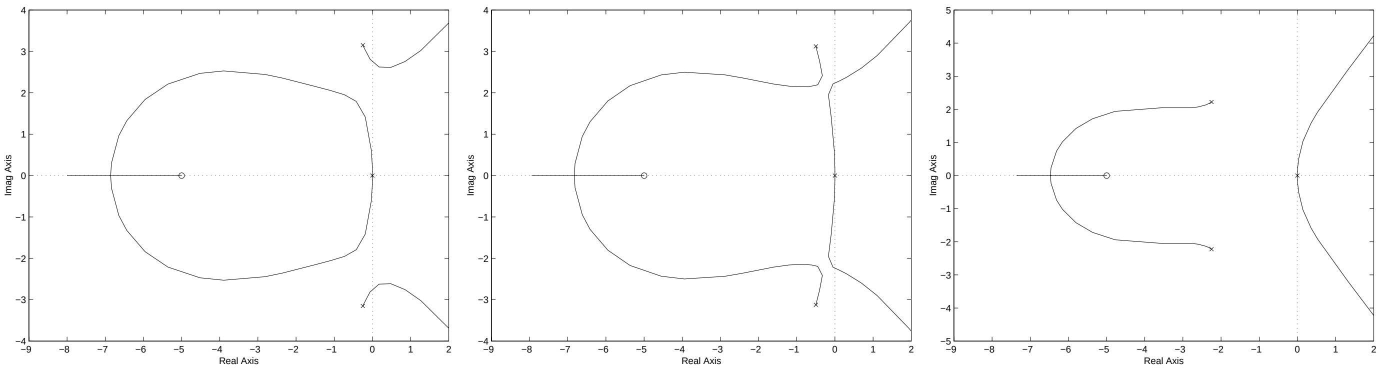
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{(-1)^{k+1}}{\beta} & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\beta} \end{bmatrix}$$

Quindi, gli equilibri con k dispari sono instabili; quelli con k pari devono essere studiati con altri metodi. In particolare, il sistema può essere riconosciuto come un pendolo con smorzamento nonlineare. Usando come candidata di Lyapunov una espressione simile all'energia meccanica del sistema $V = \frac{1}{2}z_2^2 + \frac{1}{\beta}(1 - \cos z_1)$, si ha

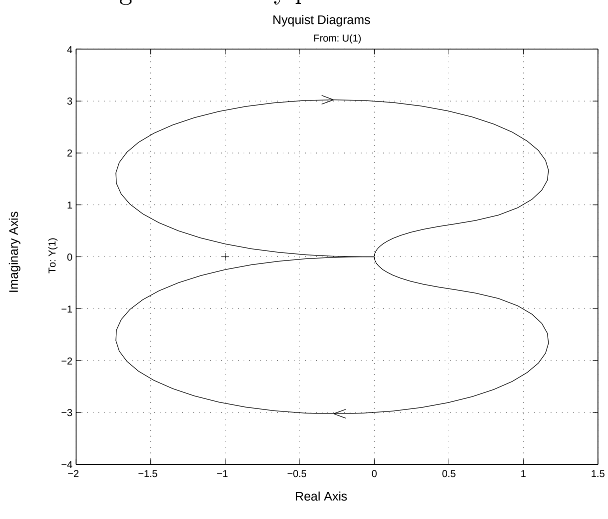
$$\dot{V} = -\frac{\gamma}{\beta}z_2^4$$

quindi il sistema è stabile. Per Krasovski, poichè nel luogo $\dot{V} = 0$ le uniche traiettorie possibili sono gli equilibri, si ha anche la asintotica stabilità.

G) Il luogo ha tre asintoti, ed un punto di biforcazione a sinistra dello zero. Vi sono due topologie possibili, a seconda del valore di δ: nella figura seguente è riportato il luogo nei casi $\delta = 1$, $\delta = 2$, e $\delta = 9$.



H) Nella figura seguente è riportato il diagramma di Nyquist nel caso $\alpha = 1$.



Per ogni valore di α, il diagramma di Nyquist non circonda il punto $-1 + j0$; ma la f.d.t. del sistema in anello aperto presenta una coppia di poli complessi a parte reale negativa ed un polo reale positivo, quindi il anche il sistema a ciclo chiuso è instabile.